Karlsruher Institut für Technologie

03. Mai 2023
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
Henning Heister

Analysis für das Lehramt
Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 01

Aufgabe 1 (Rechnen mit komplexen Zahlen)**.**

(a) Berechnen Sie für $n \in \mathbb{N}$ den Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen:

(i) $z_1 := \dfrac{3+5\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$,

(ii) $z_2 := \dfrac{1}{(1+\mathrm{i})^2}$ und

(iii) $z_3 := \left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^{3n}$.

(b) Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene:

(i) $D_1 := \left\{z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Re}\left(z^2\right) \leq 1\right\}$,

(ii) $D_2 := \{z \in \mathbb{C} : \ |z+2+\mathrm{i}| = |z-\mathrm{i}|\}$,

(iii) $D_3 := \{z \in \mathbb{C} : \ 1 < \mathrm{Re}(\mathrm{i}z) < 2\}$ und

(iv) $D_4 := \left\{z \in \mathbb{C} : \ |z+1-\mathrm{i}| < 2, \ \mathrm{Re}(z) \geq \dfrac{1}{2}\right\}$.

(c) Welche geometrische Form hat die Lösungsmenge der Gleichung $2z\bar{z} + \mathrm{i}z - \mathrm{i}\bar{z} - 1 = 0$?

(d) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, welche die gegebene Gleichung lösen: $z^2 - 2\bar{z} + 1 = 0$.

Lösungsvorschlag.

(a) (i) Es gilt

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{(3+5\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})} \\ &= \frac{6+3\mathrm{i}+10\mathrm{i}-5}{|2-\mathrm{i}|^2} \\ &= \frac{1+13\mathrm{i}}{2^2+(-1)^2} \\ &= \frac{1}{5} + \frac{13}{5}\mathrm{i}, \end{aligned}$$

also $\mathrm{Re}\, z_1 = 1/5$ und $\mathrm{Im}\, z_1 = 13/5$.

(ii) Es gilt

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{1}{(1+\mathrm{i})^2} \\ &= \frac{1}{1^2+2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\mathrm{i}} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{i}}{-1} \\
&= -\frac{1}{2}\mathrm{i},
\end{aligned}
$$

also $\operatorname{Re} z_2 = 0$ und $\operatorname{Im} z_2 = -1/2$.

(iii) Wir nutzen die Polarkoordinatendarstellung

$$1 - \sqrt{3}\mathrm{i} = r\mathrm{e}^{i\varphi} = r\cos\varphi + \mathrm{i}r\sin\varphi$$

mit $r = |z|$ und $\varphi = \arg z \in (-\pi, \pi]$. Somit gilt

$$r = \left|1 - \sqrt{3}\mathrm{i}\right| = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

und

$$
\begin{aligned}
1 - \sqrt{3}\mathrm{i} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} &= 2\cos\varphi + 2\mathrm{i}\sin\varphi \\
\iff \cos\varphi = \frac{1}{2} \wedge \sin\varphi &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \\
\iff \varphi &= -\frac{\pi}{3},
\end{aligned}
$$

also $1 - \mathrm{i}\sqrt{3} = 2\mathrm{e}^{-\pi/3\mathrm{i}}$. Wir berechnen also

$$
\begin{aligned}
\left(1 - \sqrt{3}\mathrm{i}\right)^{3n} &= \left(2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}\right)^{3n} \\
&= 2^{3n}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}\right)^{3n} \\
&= 2^{3n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3\cdot 3n} \\
&= 2^{3n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi} \\
&= 2^{3n}(\cos(-n\pi) + \mathrm{i}\sin(n\pi)) \\
&= 2^{3n}\left((-1)^n + 0\right).
\end{aligned}
$$

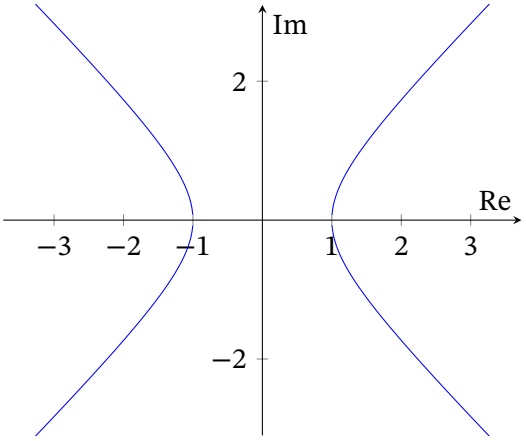
Somit gilt $\operatorname{Re} z_3 = (-1)^n 2^{3n}$ und $\operatorname{Im} z_3 = 0$.

(b) (i) Für $u = x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

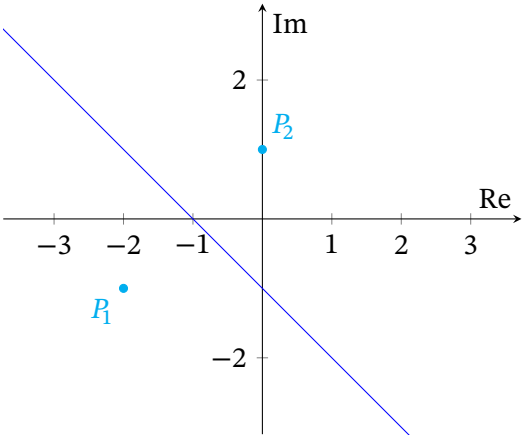
$$
\begin{aligned}
z^2 = (x + \mathrm{i}y)^2 &= x^2 - y^2 + \mathrm{i}2xy \\
\implies \operatorname{Re} z^2 = x^2 - y^2 &\leq 1
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} &\iff x^2 \leq 1 + y^2 \\ &\iff |x| \leq \sqrt{1+y^2} \\ &\iff -\sqrt{1+y^2} \leq x \leq \sqrt{1+y^2}. \end{aligned}$$

Die gesuchte Menge ist also die zwischen den beiden blauen Linien.



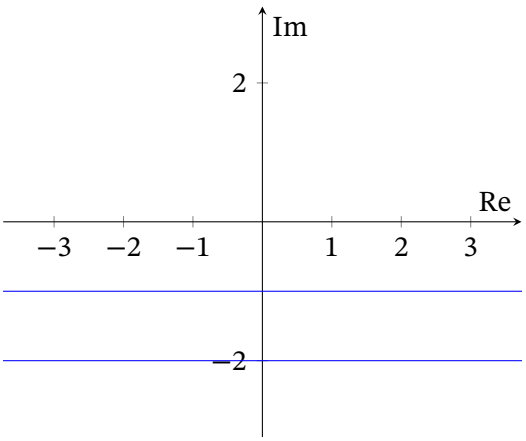
(ii) Mit $P_1 = -2 - \mathrm{i}$ und $P_2 = \mathrm{i}$ hat D_2 die Form $\{z \in \mathbb{C} : |z - P_1| = |z - P_2|\}$, also ist die gesuchte Menge die dunkelblaue Linie.



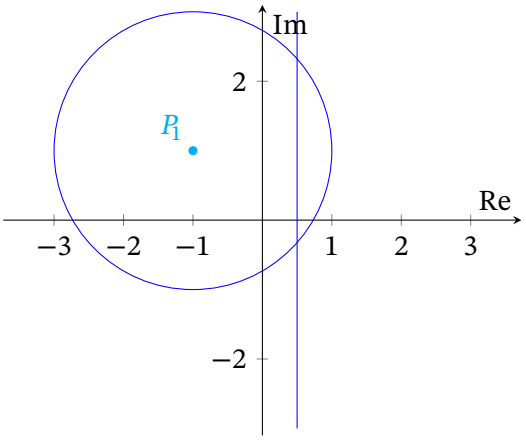
(iii) Für $z = x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $\mathrm{i}z = \mathrm{i}(x + \mathrm{i}y) = \mathrm{i}x - y = -y + \mathrm{i}x$, also $\operatorname{Re}(\mathrm{i}z) = -y = -\operatorname{Im} z$. Somit gilt

$$\begin{aligned} &1 < \operatorname{Re}(\mathrm{i}z) < 2 \\ \iff\ &1 < -\operatorname{Im} z < 2 \\ \iff\ &-1 > \operatorname{Im} z > -2, \end{aligned}$$

also ist die gesuchte Menge die zwischen den beiden blauen Linien.



(iv) Mit $P_1 = -1 + \mathrm{i}$ hat D_4 die Form $\{z \in \mathbb{C} : |z - P_1| < 2,\ \operatorname{Re} z \geq 1/2\}$. Die gesuchte Menge ist somit der Teil des Kreises, der rechts der blauen Linie liegt.



(c) Wir berechnen

$$
\begin{aligned}
& 2z\bar{z} + \mathrm{i}z - 1 = 0 \\
\iff\ & z\bar{z} + \frac{\mathrm{i}}{2}z - \frac{\mathrm{i}}{2}\bar{z} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \\
\iff\ & \left(z - \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)\left(\bar{z} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right) - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \\
\iff\ & \left(z - \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)\overline{\left(z - \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)} = \frac{3}{4} \\
\iff\ & \left|z - \frac{1}{2}\mathrm{i}\right|^2 = \frac{3}{4} \\
\iff\ & \left|z - \frac{1}{2}\mathrm{i}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}
$$

Somit beschreibt die Gleichung einen Kreis mit Mittelpunkt $1/2\mathrm{i}$ und Radius $\sqrt{3}/2$.

(d) Für $z \in \mathbb{C}$ mit $z = x + \mathrm{i}y$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} & z^2 - 2\bar{z} + 1 = 0 \\ \iff & (x + \mathrm{i}y)^2 - 2(x - \mathrm{i}y) + 1 = 0 \\ \iff & x^2 - y^2 + \mathrm{i}2xy - 2x + 2\mathrm{i}y + 1 = 0 \\ \iff & \left(x^2 - y^2 - 2x + 1\right) + \mathrm{i}(2xy + 2y) = 0 \\ \iff & x^2 - y^2 - 2x + 1 = 0 \\ & \wedge y(x + 1) = 0. \end{aligned}$$

Falls $y = 0$, so folgt

$$\begin{aligned} & (x - 1)^2 = 0 \\ \iff & x - 1 = 0 \\ \iff & x = 1. \end{aligned}$$

Falls $y \neq 0$, also $x = -1$, so folgt

$$\begin{aligned} & 1 - y^2 + 2 + 1 = 0 \\ \iff & y^2 = 4 \\ \iff & y \in \{-2, 2\}. \end{aligned}$$

Somit ist die Lösungsmenge der obigen Gleichung $\{1, -1 \pm 2\mathrm{i}\}$. □

Aufgabe 2 (Komplexe Differenzierbarkeit = Reelle Differenzierbarkeit + Cauchy–Riemann-sche Differentialgleichungen)**.** Es seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Definieren wir $u := \operatorname{Re} f$ und $v := \operatorname{Im} f$, so können wir $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ für alle $z := x + \mathrm{i}y \in D$ schreiben (wobei wir den Definitionsbereich D von u und v als Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ auffassen). Im Folgenden sei $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0 \in D$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) f ist komplex differenzierbar in z_0.

(b) u und v sind reell differenzierbar in (x_0, y_0) und es gelten $u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0)$, $u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0)$.

Nutzen Sie hierfür, dass f genau dann in z_0 komplex differenzierbar ist, wenn es ein $c \in \mathbb{C}$ gibt mit $\lim_{z \to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0) - c(z - z_0)|}{|z - z_0|} = 0$, und bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von $f(z) - f(z_0) - c(z - z_0)$.

Lösungsvorschlag. Es sei $z = x + \mathrm{i}y \in D$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und $z \neq z_0$, es sei $f = u + \mathrm{i}v$ für zwei Funktionen $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und ferner sei $c = a + \mathrm{i}b$ für $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt, dass

$$\begin{aligned}
&f(z)f(z_0) - c(z - z_0)\\
&\quad= u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y) - (u(x_0,y_0) + \mathrm{i}v(x_0,y_0)) - (a + \mathrm{i}b)((x - x_0) + \mathrm{i}(y - y_0))\\
&\quad= u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y) - (u(x_0,y_0) + \mathrm{i}v(x_0,y_0))\\
&\qquad- (a(x - x_0) - b(y - y_0) + \mathrm{i}(b(x - x_0) + a(y - y_0)))\\
&\quad= \left(u(x,y) - u(x_0,y_0) - \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}\right) + \mathrm{i}\left(v(x,y) - v(x_0,y_0) - \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}\right)\\
&\quad=: P(x,y) + \mathrm{i}Q(x,y).
\end{aligned}$$

Die Funktion f ist in $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0 \in D$ mit $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ genau dann komplex differenzierbar, wenn gilt

$$\begin{aligned}
&\exists c = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}\,(a, b \in \mathbb{R})\colon \lim_{z \to z_0}\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - c\right| = 0\\
\iff\ &\exists c = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}\,(a, b \in \mathbb{R})\colon \lim \frac{|f(z) - f(z_0) - c(z - z_0)|}{|z - z_0|} = 0\\
\iff\ &\exists c = (a, b) \in \mathbb{R}^2\colon \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{|P(x,y) + \mathrm{i}Q(x,y)|}{\left|\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}\right|} = 0\\
\iff\ &\exists c = (a, b) \in \mathbb{R}^2\colon \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{|P(x,y)|}{\left|\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}\right|} = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{|Q(x,y)|}{\left|\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}\right|} = 0\\
\iff\ &u \text{ und } v \text{ sind in } (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \text{ reell differenzierbar und es gelten}\\
&\qquad(\nabla u)(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} u_x(x_0,y_0) & u_y(x_0,y_0) \end{pmatrix} = (a \ \ -b)\\
&\qquad(\nabla v)(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} v_x(x_0,y_0) & v_y(x_0,y_0) \end{pmatrix} = (b \ \ a) \text{ für } a, b \in \mathbb{R}\\
\iff\ &u \text{ und } v \text{ sind reell differenzierbar in } x_0, y_0 \text{ und es gelten}\\
&\qquad u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0)\\
&\qquad u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0).
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 3 (Komplexe Differenzierbarkeit und Holomorphie)**.**

(a) Zeigen Sie mithilfe der Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen, dass die Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) := \bar{z}$ an keiner Stelle komplex differenzierbar ist.

(b) Es sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ stetig und die Abbildung $z \mapsto f(z)^2$ sei holomorph auf $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass dann f holomorph auf $\mathbb{C}$ ist und berechnen Sie die Ableitung.

Lösungsvorschlag.

(a) Für $z = x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(z) = \bar{z} = x - \mathrm{i}y = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y),$$

wobei $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ u(x,y) = x$ und $v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ v(x,y) = -y$. Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} u_x(x,y) &= 1, & u_y(x,y) &= 0,\\ v_x(x,y) &= 0,\\ v_y(x,y) &= -1, \end{aligned}$$

also $u_y(x,y) = 1 \neq -1 = v_y(x,y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Somit ist f in jedem Punkt $z \in \mathbb{C}$ nicht komplex differenzierbar.

(b) Sei $z_0 \in \mathbb{C}$. Dann gilt für $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \frac{(f(z) - f(z_0))(f(z) + f(z_0))}{(z - z_0)(f(z) + f(z_0))}\\ &= \frac{f^2(z) - f^2(z_0)}{z - z_0} \frac{1}{f(z) + f(z_0)}\\ &\to \left(f^2\right)'(z_0) \frac{1}{2f(z_0)} \end{aligned}$$

für $z \to z_0$, da f^2 holomorph ist und f stetig ist sowie $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Somit ist f in z_0 komplex differenzierbar und es gilt $f'(z_0) = (f^2)'(z_0)/(2f(z_0))$. Da $z_0 \in \mathbb{C}$ beliebig gewählt war, folgt, dass f holomorph ist. □

Aufgabe 4 (Komplexe Potenzreihen)**.**

(a) Berechnen Sie jeweils den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen.

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (2 + n\mathrm{i})^n z^n$,

(ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (\mathrm{i}n^2 + 2^n) z^{2n}$ und

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}n)^{n-1}}{n!} z^n$.

(b) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, für welche die gegebene Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)z^n}{n^2}$$

konvergent ist.

Lösungsvorschlag.

(a) (i) Setze $a_n := (2+\mathrm{i}n)^n$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{|a_n|} = |2+\mathrm{i}n| \geq |\mathrm{Im}(2+\mathrm{i}n)| = n \to \infty \ (n \to \infty) \\ \implies \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty \\ \implies R = 0. \end{aligned}$$

(ii) Setze $a_{2n} = \mathrm{i}n^2 + 2^n$ und $a_{2n+1} = 0$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt für $n \geq 4$

$$\begin{aligned} 2^n &= |\mathrm{Re}(a_{2n})| \\ &\leq |a_{2n}| \\ &= |2^n + \mathrm{i}n^2| \\ &= \sqrt{(2^n)^2 + (n^2)^2} \\ &\leq \sqrt{(2^n)^2 + (2^n)^2} \\ &= 2^n\sqrt{2} \\ \implies 2^{1/2} &\leq \sqrt[2n]{|a_{2n}|} \\ &\leq 2^{1/2}2^{1/(4n)} \\ &\to 2^{1/2} \ (n \to \infty) \\ \implies \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{|a_{2n}|} = 2^{1/2} &= \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \\ \implies R &= \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

(iii) Setze $a_n = (\mathrm{i}n)^{n-1}/n!$ für $n \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| &= \frac{n^{n-1}/n!}{(n+1)^n/(n+1)!} \\ &= \frac{n^{n-1}}{(n+1)^{n-1}} \\ &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-1} \\ &= \left(\frac{1}{1-1/n}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{(1+1/n)^{n-1}} \end{aligned}$$

$$\to \frac{1}{\mathrm{e}} \quad (n \to \infty)$$
$$\implies R = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

(b) Setze $a_n = (n-1)/n$. Für $n \geq 2$ gilt

$$\frac{1}{2n} = \frac{n/2}{n^2} \leq |a_n| = \frac{n-1}{n^2} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \tag{1}$$

und damit

$$1 \longleftarrow \frac{1}{\sqrt[n]{2}} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \leq \sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1$$

für $n \to \infty$. Mit dem Sandwichlemma folgt also $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, also $R = 1$. Die Reihe konvergiert also für $|z| < 1$ und divergiert für $|z| > 1$.

Die Folge $(a_n)_{n\geq 2}$ ist fallend, da

$$a_n = \frac{n-1}{n^2} = \frac{1}{n}\frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

und $x \mapsto x(1-x)$ für $x \in [0, 1/2]$ wachsend ist. Weiter gilt

$$|a_n| \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \to 0$$

für $n \to \infty$, also konvergiert die Reihe nach Satz 3.3 für $|z| \leq 1$ mit $z \neq 1$.

Für $z = 1$ divergiert die Reihe nach Gleichung (1) und dem Minorantenkriterium.

Insgesamt konvergiert die Reihe genau dann, wenn $|z| \leq 1$ und $z \neq 1$. □