Karlsruher Institut für Technologie

03. Mai 2023
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
Henning Heister

Analysis für das Lehramt
Übungsblatt 02

Aufgabe 1 (Komplexe Potenzreihen)**.** Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, für welche die gegebene Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)z^n.$$

konvergent ist. Berechnen Sie zusätzlich den Wert der Reihe für die $z \in \mathbb{C}$, für die die Reihe konvergiert.

Aufgabe 2 (Komplexe Funktionen)**.**

(a) Berechnen Sie den Real- und Imaginärteil folgender komplexer Zahlen:

(i) $z_1 := (1+\mathrm{i})^{\mathrm{i}}$,

(ii) $z_2 := (\log(\mathrm{i}))^{\mathrm{i}}$ und

(iii) $z_3 := \mathrm{i}^{(\mathrm{i}^{\mathrm{i}})}$.

(b) Berechnen Sie für $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| = 1$ alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $\mathrm{e}^z = w$.

(c) Berechnen Sie die Nullstellen der komplexen Funktionen exp, sin und cos.

Aufgabe 3 (Holomorphe Funktionen)**.** Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(a) f ist konstant.

(b) $\operatorname{Re} f$ ist konstant.

(c) $\operatorname{Im} f$ ist konstant.

(d) $|f|$ ist konstant.

Hinweis: Cauchy–Riemannsche Differentialgleichungen (siehe Aufgabe 2 von Übungsblatt 1) und Satz 4.1.

Aufgabe 4 (Komplexe Funktionen)**.**

(a) Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \sqrt{|z|}\frac{z+|z|}{|z+|z||}.$$

Zeigen Sie $f(z)^2 = z$ für $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ und folgern Sie, dass f holomorph ist.

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $\cos(z) = \frac{1}{2}$.

(c) Sind sin und cos auf $\mathbb{C}$ beschränkt? Begründen Sie.

Aufgabe 5 (Wegintegrale)**.**

(a) Es seien $a \in \mathbb{C}, r > 0, n \in \mathbb{N}$ und $\gamma(t) := a + re^{int}$ $(t \in [0, 2\pi])$ (n-mal positiv durchlaufener Kreis). Berechnen Sie die Weglänge $L(\gamma)$.

(b) Berechnen Sie das Wegintegral von $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \bar{z}z^2$ mit $\gamma(t) := e^{i(\pi - t)}$ und $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

(c) Es sei $r > 0$ und der Weg γ_r durch $\gamma_r(t) := r + it\,(0 \le t \le r)$ gegeben. Zeigen Sie:

$$\int_{\gamma_r} e^{-z^2}\, dz \to 0 \quad (r \to \infty).$$