Karlsruher Institut für Technologie

10. Mai 2023
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
Henning Heister

Analysis für das Lehramt
Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 02

Aufgabe 1 (Komplexe Potenzreihen)**.** Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, für welche die gegebene Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)z^n.$$

konvergent ist. Berechnen Sie zusätzlich den Wert der Reihe für die $z \in \mathbb{C}$, für die die Reihe konvergiert.

Lösungsvorschlag. Es sei $a_n = n(n+1)$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{n}\sqrt[n]{n+1} \to 1$$

für $n \to \infty$, also $R = 1$.

Für $|z| = 1$ divergiert die Reihe, da $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge ist für $|z| = 1$.

Die Reihe konvergiert also genau dann, wenn $|z| < 1$.

Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)z^n &= z\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)z^{n-1} \\
&= z\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)nz^{n-2} \\
&\overset{\text{Satz 3.2}}{=} z\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^2\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) \\
&= z\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^2\left(\frac{1}{1-z}\right) \\
&= z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{1}{(1-z)^2} \\
&= z\frac{2}{(1-z)^3} \\
&= \frac{2z}{(1-z)^3}
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 2 (Komplexe Funktionen)**.**

(a) Berechnen Sie den Real- und Imaginärteil folgender komplexer Zahlen:

(i) $z_1 := (1+\mathrm{i})^{\mathrm{i}}$,

(ii) $z_2 := (\log(\mathrm{i}))^{\mathrm{i}}$ und

(iii) $z_3 := \mathrm{i}^{(\mathrm{i}^{\mathrm{i}})}$.

(b) Berechnen Sie für $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| = 1$ alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $e^z = w$.

(c) Berechnen Sie die Nullstellen der komplexen Funktionen exp, sin und cos.

Lösungsvorschlag.

(a) (i) Wir bemerken zunächst, dass

$$\log(1+\mathrm{i}) = \log(|1+\mathrm{i}|) + \mathrm{i}\arg(1+\mathrm{i}) = \log\sqrt{2} + \mathrm{i}\frac{\pi}{4}.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} z_1 &= \left(1+\mathrm{i}^{\mathrm{i}}\right) \\ &= \exp(\log(1+\mathrm{i})\mathrm{i}) \\ &= \exp\left(-\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\log\sqrt{2}\right) \\ &= \mathrm{e}^{-\pi/4}\exp\left(\mathrm{i}\log\sqrt{2}\right) \\ &= \mathrm{e}^{-\pi/4}\left(\cos\log\sqrt{2} + \mathrm{i}\sin\log\sqrt{2}\right). \end{aligned}$$

Also folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} z_1 &= \mathrm{e}^{-\pi/4}\cos\log\sqrt{2} \text{ und} \\ \operatorname{Im} z_1 &= \mathrm{e}^{-\pi/4}\sin\log\sqrt{2}. \end{aligned}$$

(ii) Wie vorhin bemerken wir, dass

$$\begin{aligned} \log\mathrm{i} &= \log|\mathrm{i}| + \mathrm{i}\arg\mathrm{i} = \mathrm{i}\frac{\pi}{2} \text{ und} \\ \log\log\mathrm{i} &= \log\left(\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\right) = \log\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} z_2 &= (\log\mathrm{i})^{\mathrm{i}} \\ &= \exp(\log\log\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}) \\ &= \exp\left(-\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\log\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \mathrm{e}^{-\pi/2}\left(\cos\log\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\log\frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Also folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} z_2 &= \mathrm{e}^{-\pi/2}\cos\log\frac{\pi}{2} \text{ und} \\ \operatorname{Im} z_2 &= \mathrm{e}^{-\pi/2}\sin\log\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

(iii) Es gilt

$$\begin{aligned} z_3 &= \mathrm{i}^{(\mathrm{i}^{\mathrm{i}})} \\ &= \exp\big(\log \mathrm{i} \cdot \mathrm{i}^{\mathrm{i}}\big) \\ &= \exp\Big(\mathrm{i}\frac{\pi}{2} \exp(\log \mathrm{i} \cdot \mathrm{i})\Big) \\ &= \exp\Big(\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-\pi/2}\Big) \\ &= \cos\Big(\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-\pi/2}\Big) + \mathrm{i}\sin\Big(\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-\pi/2}\Big). \end{aligned}$$

Also folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} z_3 &= \cos\Big(\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-\pi/2}\Big) \text{ und} \\ \operatorname{Im} z_3 &= \sin\Big(\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-\pi/2}\Big). \end{aligned}$$

(b) Sei $z = x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ mit $\mathrm{e}^z = w$. Dann gilt

$$1 = |w| = \left|\mathrm{e}^x \mathrm{e}^{\mathrm{i}y}\right| = |\mathrm{e}^x|\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x,$$

also $x = 0$. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = w = |w|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg w} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg w} \\ \iff\ & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(y-\arg w)} = 1 \\ \iff\ & \cos(y - \arg w) = 1 \\ & \wedge \sin(y - \arg w) = 0 \\ \iff\ & y - \arg w = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ & \wedge y - \arg w = l\pi,\ l \in \mathbb{Z} \\ \iff\ & y - \arg w = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \implies\ & z = \mathrm{i}(\arg w + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Andererseits gilt für $k \in \mathbb{Z}$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg w + 2k\pi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg w}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\pi} = w\mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\pi} = w(\cos(2k\pi) + \mathrm{i}\sin(2k\pi)) = w.$$

Also sind die Zahlen $z_k = \mathrm{i}(\arg w + 2k\pi)$ genau die Lösungen der Gleichung $\mathrm{e}^z = w$.

(c) Für $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$1 = \mathrm{e}^0 = \mathrm{e}^{z-z} = \mathrm{e}^z\mathrm{e}^{-z},$$

also $\mathrm{e}^z \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Für $z \in \mathbb{C}$ gilt zudem

$$\begin{aligned} & \sin z = 0 \\ \iff & \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right) = 0 \\ \iff & \mathrm{e}^{\mathrm{i}2z} = 1 \\ \iff & 2z = \arg 1 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \iff & z = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Schließlich gilt für $z \in \mathbb{C}$, dass

$$\begin{aligned} & \cos z = 0 \\ \iff & \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right) = 0 \\ \iff & \mathrm{e}^{\mathrm{i}2z} = -1 \\ \iff & 2z = \arg(-1) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \iff & z = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

□

Aufgabe 3 (Holomorphe Funktionen)**.** Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(a) f ist konstant.

(b) $\operatorname{Re} f$ ist konstant.

(c) $\operatorname{Im} f$ ist konstant.

(d) $|f|$ ist konstant.

Hinweis: Cauchy–Riemannsche Differentialgleichungen (siehe Aufgabe 2 von Übungsblatt 1) und Satz 4.1.

Lösungsvorschlag. Sei f wie oben und setze $u := \operatorname{Re} f$ sowie $v := \operatorname{Im} f$. Die Implikationen (a) $\implies$ (b), (a) $\implies$ (c) und (a) $\implies$ (d) sind klar.

(b) $\implies$ (a) Sei u konstant. Dann folgt

$$\begin{aligned} & u_x = u_y = 0 \\ \implies & v_x = -u_y = 0 \\ \implies & f' = u_x + \mathrm{i}v_x = 0. \end{aligned}$$

Mit Satz 4.1 folgt also, dass f konstant ist, also folgt (a).

(c) $\Longrightarrow$ **(a)** Der Beweis funktioniert analog.

(d) $\Longrightarrow$ **(a)** Sei $|f|$ konstant und ohne Einschränkung sei auch $|f| \neq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & f(z) \neq 0 \quad \forall z \in \Omega \\ \Longrightarrow\ & y_f \text{ ist holomorph auf } \Omega \\ \Longrightarrow\ & \bar{f} = \frac{|f|^2}{f} = u - \mathrm{i}v \text{ ist holomorph auf } \Omega \\ \Longrightarrow\ & u_x = -v_y = -u_x \\ & u_y = v_x = -u_y \\ \Longrightarrow\ & f' = u_x + \mathrm{i}v_x = 0, \end{aligned}$$

also ist f konstant. □

Aufgabe 4 (Komplexe Funktionen)**.**

(a) Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \sqrt{|z|}\frac{z + |z|}{|z + |z||}.$$

Zeigen Sie $f(z)^2 = z$ für $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ und folgern Sie, dass f holomorph ist.

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $\cos(z) = \frac{1}{2}$.

(c) Sind sin und cos auf $\mathbb{C}$ beschränkt? Begründen Sie.

Lösungsvorschlag. (a) Wir zeigen zunächst, dass $f(z)^2 = z$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ und folgern daraus, dass f holomorph ist.

Zunächst ist f wohldefiniert, da

$$|z + |z|| = 0 \iff z + |z| = 0 \iff z = -|z| \implies z \in (-\infty, 0].$$

Ferner gilt für $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$

$$\begin{aligned} f(z)^2 &= |z|\frac{(z + |z|)^2}{|z + |z||^2} \\ &= |z|\frac{(z + |z|)^2}{(z + |z|)(\bar{z} + |z|)} \\ &= |z|\frac{z + |z|}{\bar{z} + z} \\ &= \frac{z|z| + |z|^2}{\bar{z} + |z|} \end{aligned}$$

$$= z\frac{|z| + \bar{z}}{\bar{z} + |z|}$$
$$= z.$$

Zudem ist f stetig auf $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ als Komposition stetiger Funktionen und $z \mapsto f^2(z) = z$ für $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ ist holomorph (da es ein Polynom ist). Somit folgt mit Aufgabe 3 von Übungsblatt 1, dass f holomorph ist.

(b) Sei $z \in \mathbb{C}$ und $w = e^{iz}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\cos z \frac{1}{2} \\
\iff &\frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) = \frac{1}{2} \\
\iff &e^{iz} + e^{-iz} = 1 \\
\iff &w + w^{-1} = 1 \\
\iff &w^2 + 1 = w \\
\iff &w^2 - w + 1 = 0 \\
\iff &\left(w - \frac{1}{2}\right)^2 + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0 \\
\iff &\left(w - \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4} \\
\iff &w - \frac{1}{2} = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}i \\
\iff &w = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \\
\iff &e^{iz} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{\pm i\pi/3} \\
\iff &e^{i(z \mp \pi/3)} = 1 \\
\iff &z \mp \frac{\pi}{3} = 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z} \\
\iff &z = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

(c) Die Funktionen sin und cos sind auf $\mathbb{C}$ nicht beschränkt. Für $y > 0$ gilt

$$\begin{aligned}
|\sin(iy)| &= \left|\frac{1}{2i}\left(e^{ii y} - e^{-ii y}\right)\right| \\
&= \frac{1}{2}|e^{-y} - e^{y}| \\
&= \frac{1}{3}(e^{y} - e^{-y})
\end{aligned}$$

$$\to \infty$$

für $y \to \infty$. Somit ist sin auf $\mathbb{C}$ unbeschränkt. Für cos folgt die Unbeschränktheit aus einer analogen Rechnung. □

Aufgabe 5 (Wegintegrale)**.**

(a) Es seien $a \in \mathbb{C}, r > 0, n \in \mathbb{N}$ und $\gamma(t) := a + re^{int}$ $(t \in [0, 2\pi])$ (n-mal positiv durchlaufener Kreis). Berechnen Sie die Weglänge $L(\gamma)$.

(b) Berechnen Sie das Wegintegral von $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \bar{z}z^2$ mit $\gamma(t) := e^{i(\pi - t)}$ und $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

(c) Es sei $r > 0$ und der Weg γ_r durch $\gamma_r(t) := r + it$ $(0 \le t \le r)$ gegeben. Zeigen Sie:

$$\int_{\gamma_r} e^{-z^2}\, dz \to 0 \quad (r \to \infty).$$

Lösungsvorschlag.

(a) Es gilt $\gamma' = rine^{int}$ für alle $t \in [0, 2\pi]$. Somit folgt

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^{2\pi} |\gamma'(t)|\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left|rine^{int}\right| dt \\ &= \int_0^{2\pi} |r||i||n|\left|e^{int}\right| dt \\ &= rn \int_0^{2\pi} dt \\ &= 2\pi rn. \end{aligned}$$

(b) Für $t \in [0, 2\pi]$ gilt

$$f(\gamma(t)) = \overline{\gamma(t)}\gamma(t)^2 = e^{-i(\pi - t)}e^{2i(\pi - t)} = e^{i(\pi - t)}$$

und $\gamma'(t) = -ie^{i(\pi - t)}$. Somit folgt

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_0^{\pi/2} f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi-t)}(-\mathrm{i})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi-t)}\,\mathrm{d}t \\
&= -\mathrm{i}\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}(\pi-t)}\,\mathrm{d}t \\
&= -\mathrm{i}\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t \\
&= -\mathrm{i}\Big[\frac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t}\Big]_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{2}(-1-1) \\
&= -1.
\end{aligned}
$$

(c) Für $t \in [0, r]$ gilt $\gamma'(t) = 1$. Also gilt

$$
\begin{aligned}
&\int_{\gamma_r} \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z \\
&\qquad = \int_0^r \mathrm{e}^{-\gamma_r(t)^2}\gamma_r'(t)\,\mathrm{d}t \\
&\qquad = \mathrm{i}\int_0^r \mathrm{e}^{-(r^2-t^2)-\mathrm{i}2rt}\,\mathrm{d}t \\
\Longrightarrow \quad &\left|\int_{\gamma_r} \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z\right| \le \int_0^r \left|\mathrm{e}^{-(r^2-t^2)}\right|\left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2rt}\right|\,\mathrm{d}t \\
&\qquad = \int_0^r \mathrm{e}^{-r^2-t^2}\,\mathrm{d}t \\
&\qquad \le \int_0^r \mathrm{e}^{-r^2+rt}\,\mathrm{d}t \\
&\qquad = \mathrm{e}^{-r^2}\int_0^r \mathrm{e}^{rt}\,\mathrm{d}t \\
&\qquad = \mathrm{e}^{-r^2}\frac{1}{r}\Big[\frac{1}{r}\mathrm{e}^{rt}\Big]_0^r \\
&\qquad = \frac{\mathrm{e}^{-r^2}}{r}\Big(\mathrm{e}^{r^2}-1\Big) \\
&\qquad = \frac{1}{r}\Big(1-\mathrm{e}^{-r^2}\Big) \\
&\qquad \le \frac{1}{r} \\
&\qquad \to 0
\end{aligned}
$$

für $r \to \infty$. Damit folgt die Behauptung. □