10. Mai 2023
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
Henning Heister

Analysis für das Lehramt
Übungsblatt 03

Aufgabe 1 (Wegintegrale)**.**

(a) Berechnen Sie das Wegintegral von $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = |z|^2$ mit γ eine Parametrisierung des Randes der Menge $\{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z \in (0,1)\}$, wobei der Rand entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen wird.

(b) Es sei $R > 0$ und $\gamma(t) := R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ $(t \in [0, 2\pi])$. Berechnen Sie für alle $n \in \mathbb{Z}$ das Wegintegral

$$\int_\gamma z^n \, \mathrm{d}z.$$

(c) Bestimmen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ den Wert des reellen Integrals

$$\int_0^{2\pi} (\cos(t))^{2n} \, \mathrm{d}t,$$

indem Sie eine geeignete Funktion entlang des Weges $\gamma(t) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ $(t \in [0, 2\pi])$ integrieren.

Hinweis: Schreiben Sie $(\cos(t))^{2n}$ *mithilfe der* exp*-Funktion und nutzen Sie die Definition des Wegintegrals, um auf die zu integrierende Funktion zu schließen.*

Aufgabe 2 (Cauchyscher Integralsatz, Cauchysche Integralformel)**.**

(a) Berechnen Sie den Wert der zwei folgenden reellen Integrale

$$I_1 := \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\sin(t)} \cos(t + \cos(t)) \, \mathrm{d}t$$

und

$$I_2 := \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\sin(t)} \sin(t + \cos(t)) \, \mathrm{d}t,$$

indem Sie eine geeignete Funktion längs der Einheitskreislinie integrieren.

Hinweis: Berechnen Sie das komplexe Integral $I_1 + \mathrm{i}I_2$.

(b) Für $r > 0$ sei $\gamma_r(t) := r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ für $t \in [0, 2\pi]$. Berechnen Sie den Wert der folgenden Wegintegrale:

(i) $\displaystyle\int_{\gamma_1} \frac{\cos(\pi z)}{z} \, \mathrm{d}z,$

(ii) $\displaystyle\int_{\gamma_2} \frac{z^3}{z^2+1}\,\mathrm{d}z$,

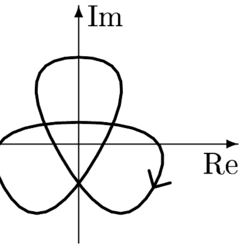
(iii) $\displaystyle\int_{\gamma_3} \frac{\mathrm{e}^z}{z^2+2z}\,\mathrm{d}z$ und

(iv) $\displaystyle\int_{\gamma_1} \frac{z^3}{z^2+4}\,\mathrm{d}z$.

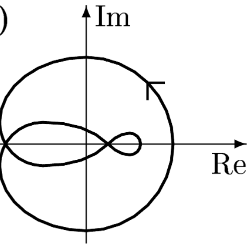
Aufgabe 3 (Index, Cauchysche Integralformel)**.** Bestimmen Sie für den skizzierten, geschlossenen und in Pfeilrichtung einmal durchlaufenen Weg γ jeweils die Umlaufzahl $\mathrm{ind}_\gamma(0)$ sowie das Wegintegral

$$\int_\gamma \frac{\exp(z^2) - 3\cos(z)}{z}\,\mathrm{d}z.$$

a)



b)



c)