Karlsruher Institut für Technologie

17. Mai 2023
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
Henning Heister

Analysis für das Lehramt
Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 03

Aufgabe 1 (Wegintegrale)**.**

(a) Berechnen Sie das Wegintegral von $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = |z|^2$ mit γ eine Parametrisierung des Randes der Menge $\{z \in \mathbb{C} :\ \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z \in (0,1)\}$, wobei der Rand entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen wird.

(b) Es sei $R > 0$ und $\gamma(t) \coloneqq R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ $(t \in [0, 2\pi])$. Berechnen Sie für alle $n \in \mathbb{Z}$ das Wegintegral

$$\int_\gamma z^n \,\mathrm{d}z.$$

(c) Bestimmen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ den Wert des reellen Integrals

$$\int_0^{2\pi} (\cos(t))^{2n} \,\mathrm{d}t,$$

indem Sie eine geeignete Funktion entlang des Weges $\gamma(t) \coloneqq \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ $(t \in [0, 2\pi])$ integrieren.

Hinweis: Schreiben Sie $(\cos(t))^{2n}$ *mithilfe der* exp*-Funktion und nutzen Sie die Definition des Wegintegrals, um auf die zu integrierende Funktion zu schließen.*

Lösungsvorschlag.

(a) Definiere $\gamma\colon [0,4] \to \mathbb{C}$ durch

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) = t & t \in [0,1), \\ \gamma_2(t) = 1 + \mathrm{i}(t-1) & t \in [1,2), \\ \gamma_3(t) = (1+\mathrm{i}) - (t-2) & t \in [2,3), \\ \gamma_4(t) = \mathrm{i} - \mathrm{i}(t-3) & t \in [3,4]. \end{cases}$$

Dann ist γ stückweise stetig differenzierbar und berandet die gegebene Menge gegen den Uhrzeigersinn. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_0^4 f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=1}^4 \int_{k-1}^k f(\gamma_k(t))\gamma_k'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t + \int_1^2 |1+\mathrm{i}(t-1)|^2 \mathrm{i}\,\mathrm{d}t + \int_2^3 |(1+\mathrm{i}) - (t-2)|^2(-1)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \int_3^4 |\mathrm{i} - \mathrm{i}(t-3)|^2 \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 t^2 \,\mathrm{d}t + \int_0^1 \mathrm{i}|1+\mathrm{i}t|^2 \,\mathrm{d}t + \int_0^1 (-1)|(1+\mathrm{i})|^2 \,\mathrm{d}t + \int_0^1 |(1-t)\mathrm{i}|^2(-\mathrm{i}) \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 t^2 + \mathrm{i}\big(1+t^2\big) - \big(2(1-t)+t^2\big) - \mathrm{i}(1-t)^2 \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 (-2+2t) + \mathrm{i}\big(1+t^2-\big(1-2t+t^2\big)\big) \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 (-2+2t) + \mathrm{i}2t \,\mathrm{d}t \\
&= \big[-2t+t^2\big]_0^1 + [\mathrm{i}2t]_0^1 \\
&= -2+1+\mathrm{i} \\
&= -1+\mathrm{i}.
\end{aligned}
$$

(b) Sei $R > 0$ und $\gamma(t) = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ für $t \in [0, 2\pi]$. Sei $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \neq -1$ und setze $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Es gilt, dass Ω in $\mathbb{C}$ offen ist und γ ein geschlossener, stückweise stetig differenzierbarer Weg in Ω ist. Weiter gilt, dass die Abbildung $z \mapsto z^n$ auf Ω die Stammfunktion $z \mapsto z^{n+1}/(n+1)$ hat. Mit Satz 7.1 folgt, dass

$$\int_\gamma z^n \,\mathrm{d}z = 0.$$

Sei $n = -1$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
\int_\gamma z^{-1} \,\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi} \gamma(t)^{-1}\gamma'(t) \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} R^{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{i} \,\mathrm{d}t \\
&= 2\pi\mathrm{i}
\end{aligned}
$$

Somit ergibt sich

$$\int_\gamma z^n \,\mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi\mathrm{i} & n = -1, \\ 0 & n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}. \end{cases}$$

(c) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ für $t \in [0, 2\pi]$. Wir suchen so eine Funktion, dass

$$\int_0^{2\pi} (\cos t)^{2n} \,\mathrm{d}t = \int_\gamma f(z) \,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\gamma'(t) \,\mathrm{d}t,$$

also

$$(\cos t)^{2n} = f(\gamma(t))\gamma'(t) = f(\gamma(t))\mathrm{i}\gamma(t)$$

für $t \in [0, 2\pi]$. Es gilt

$$(\cos t)^{2n} = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2}\right)^{2n} = \left(\frac{\gamma(t) + \gamma(t)^{-1}}{2}\right)^{2n} = \frac{1}{\mathrm{i}\gamma(t)}\left(\frac{\gamma(t) + \gamma(t)^{-1}}{2}\right)^{2n} \mathrm{i}\gamma(t).$$

Wir definieren

$$f(z) = \frac{1}{\mathrm{i}z}\left(\frac{z + z^{-1}}{2}\right)^{2n}$$

für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Damit erhalten wir

$$\int_0^{2\pi} (\cos t)^{2n} \,\mathrm{d}t = \int_\gamma f(z) \,\mathrm{d}z = \frac{1}{\mathrm{i}2^{2n}} \int_\gamma \frac{1}{z}\left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} \mathrm{d}z. \tag{1}$$

Weiter gilt für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\frac{1}{z}\left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} z^{2n-k}\left(\frac{1}{z}^{k}\right) = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} z^{2n-2k-1}.$$

Damit folgt mit Gleichung (1) und Punkt (b)

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} (\cos t)^{2n} \,\mathrm{d}t &= \frac{1}{\mathrm{i}2^{2n}} \int_\gamma \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} z^{2n-2k-1} \,\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{\mathrm{i}2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \int_\gamma z^{2n-2k-1} \,\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{\mathrm{i}2^{2n}} \binom{2n}{n} \int_\gamma z^{-1} \,\mathrm{d}z \\
&= \frac{\pi}{2^{2n-1}} \binom{2n}{n}.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 2 (Cauchyscher Integralsatz, Cauchysche Integralformel).

(a) Berechnen Sie den Wert der zwei folgenden reellen Integrale

$$I_1 := \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\sin(t)} \cos(t + \cos(t))\,\mathrm{d}t$$

und

$$I_2 := \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\sin(t)} \sin(t + \cos(t))\,\mathrm{d}t,$$

indem Sie eine geeignete Funktion längs der Einheitskreislinie integrieren.

Hinweis: Berechnen Sie das komplexe Integral $I_1 + \mathrm{i}I_2$.

(b) Für $r > 0$ sei $\gamma_r(t) := r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ für $t \in [0, 2\pi]$. Berechnen Sie den Wert der folgenden Wegintegrale:

(i) $\displaystyle\int_{\gamma_1} \frac{\cos(\pi z)}{z}\,\mathrm{d}z,$

(ii) $\displaystyle\int_{\gamma_2} \frac{z^3}{z^2+1}\,\mathrm{d}z,$

(iii) $\displaystyle\int_{\gamma_3} \frac{\mathrm{e}^z}{z^2+2z}\,\mathrm{d}z$ und

(iv) $\displaystyle\int_{\gamma_1} \frac{z^3}{z^2+4}\,\mathrm{d}z.$

Lösungsvorschlag.

(a) Wir berechnen das komplexe Integral $I_1 + \mathrm{i}I_2$ und wählen als Parametrisierung der Einheitskreislinie den Weg $\gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ für $t \in [0, 2\pi]$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
I_1 + \mathrm{i}I_2 &= \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\sin t}(\cos(t + \cos t) + \mathrm{i}\sin(t + \cos t))\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\sin t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t+\cos t)}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\cos t + \mathrm{i}\sin t)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \exp\bigl(\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\bigr)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$= \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z,$$

wobei $f(z) = -\mathrm{i}e^{\mathrm{i}z}$ für $z \in \mathbb{C}$ holomorph ist. Mit dem Cauchyschen Integralsatz (Satz 7.3) beziehungsweise Satz 7.1 folgt nun

$$I_1 + \mathrm{i}I_2 = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Somit ergibt sich für die reellen Integrale I_1 und I_2

$$I_1 = \operatorname{Re} 0 = 0$$
$$I_2 = \operatorname{Im} 0 = 0.$$

(b) Für $r > 0$ sei $\gamma_r(t) = re^{\mathrm{i}t}$ für $t \in [0, 2\pi]$.

(i) Die Funktion $f(z) = \cos(\pi z)$ für $z \in \mathbb{C}$ ist in $\mathbb{C}$ holomorph und γ_r ist ein geschlossener, stückweise stetig differenzierbarer Weg in $\mathbb{C}$. Da $z_0 = 0$ im Inneren des Integrationsweges liegt, also $\operatorname{ind}_{\gamma_1}(z_0) = 1$, folgt mit der Cauchyschen Integralformel (Satz 7.4)

$$\int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} \frac{\cos(\pi z)}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} f(z_0) \operatorname{ind}_{\gamma_1}(z_0) = 2\pi\mathrm{i}.$$

(ii) Es gilt für $z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm\mathrm{i}\}$

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})} = \frac{\mathrm{i}/2}{z+\mathrm{i}} - \frac{\mathrm{i}/2}{z-\mathrm{i}}.$$

Weiter gilt, dass die Punkte i und $-\mathrm{i}$ im Inneren des Integrationsweges liegen und somit $\operatorname{ind}_{\gamma_2}(\mathrm{i}) = 1 = \operatorname{ind}_{\gamma_2}(-\mathrm{i})$ gilt. Die Funktion $z \mapsto \mathrm{i}/2z^3$ für $z \in \mathbb{C}$ ist holomorph in $\mathbb{C}$ und damit folgt mit der Cauchyschen Integralformel

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_2} \frac{z^3}{z^2+1} &= \int_{\gamma_2} \frac{\mathrm{i}z^3/2}{x+\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_2} \frac{\mathrm{i}z^3/2}{z-\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z \\
&= 2\pi\mathrm{i}\left[\frac{\mathrm{i}z^3}{2}\right]_{z=-\mathrm{i}} \operatorname{ind}_{\gamma_2}(-\mathrm{i}) - 2\pi\mathrm{i}\left[\frac{\mathrm{i}z^3}{2}\right]_{z=\mathrm{i}} \operatorname{ind}_{\gamma_2}(\mathrm{i}) \\
&= 2\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{i}(-\mathrm{i})^3}{2} - 2\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{i}\mathrm{i}^3}{2} \\
&= -\pi\mathrm{i} - \pi\mathrm{i} \\
&= -2\pi\mathrm{i}.
\end{aligned}$$

(iii) Wieder folgt mittels Partialbruchzerlegung für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -2\}$

$$\frac{1}{z^2+2z} = \frac{1}{z(z+2)} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+2}\Big).$$

Die Punkte 0 und -2 liegen im Inneren des Integrationsweges und somit gilt $\operatorname{ind}_{\gamma_3}(0) = 1 = \operatorname{ind}_{\gamma_3}(-2)$. Die Funktion $z \mapsto \mathrm{e}^z$ ist holomorph in $\mathbb{C}$ und damit folgt mit der Cauchyschen Integralformel

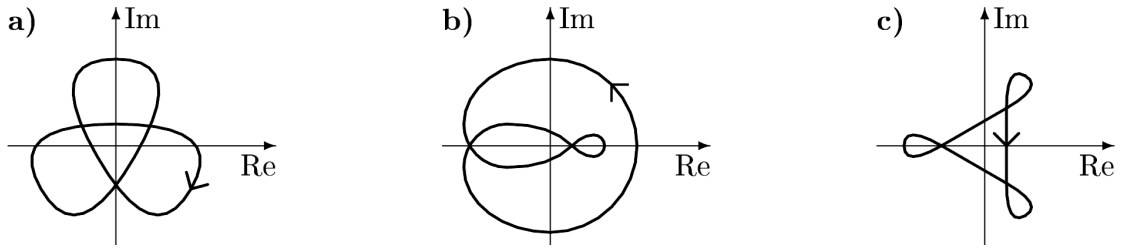
$$\begin{aligned}\int_{\gamma_3} \frac{\mathrm{e}^z}{z^2+2z}\,\mathrm{d}z &= \frac{1}{2}\left(\int_{\gamma_3} \frac{\mathrm{e}^z}{z}\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_3} \frac{\mathrm{e}^z}{z+2}\,\mathrm{d}z\right)\\ &= \frac{1}{2}\big(2\pi\mathrm{i}[\mathrm{e}^z]_{z=0}\operatorname{ind}_{\gamma_3}(0) - 2\pi\mathrm{i}[\mathrm{e}^z]_{z=-2}\operatorname{ind}_{\gamma_3}(-2)\big)\\ &= \frac{1}{2}\big(2\pi\mathrm{i} - 2\pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{-2}\big)\\ &= \big(1-\mathrm{e}^{-2}\big)\pi\mathrm{i}.\end{aligned}$$

(iv) Der Nenner z^2+4 hat nur die Nullstellen 2i und -2i, folglich ist die Funktion $z \mapsto z^3(z^2+4)^{-1}$ auf $Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$ holomorph. Da γ_1 ein geschlossener, stückweise stetig differenzierbarer Weg in Ω ist, gilt nach dem Cauchyschen Integralsatz (Satz 7.3)

$$\int_{\gamma_1} \frac{z^3}{z^2+4}\,\mathrm{d}z = 0. \qquad \square$$

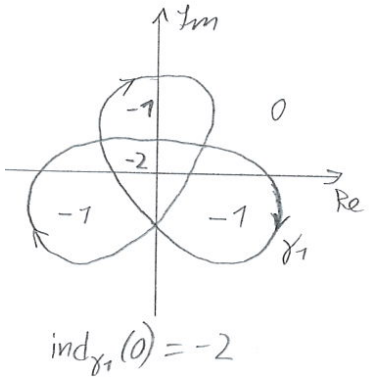
Aufgabe 3 (Index, Cauchysche Integralformel)**.** Bestimmen Sie für den skizzierten, geschlossenen und in Pfeilrichtung einmal durchlaufenen Weg γ jeweils die Umlaufzahl $\operatorname{ind}_\gamma(0)$ sowie das Wegintegral

$$\int_\gamma \frac{\exp(z^2) - 3\cos(z)}{z}\,\mathrm{d}z.$$

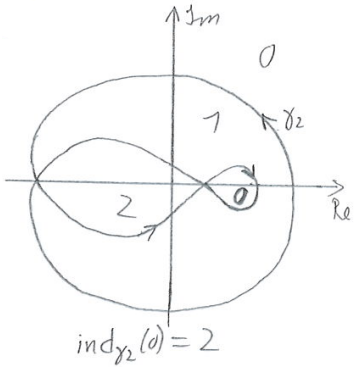


Lösungsvorschlag. Wir bestimmen zunächst die Umlaufzahlen graphisch in den folgenden Bildern.

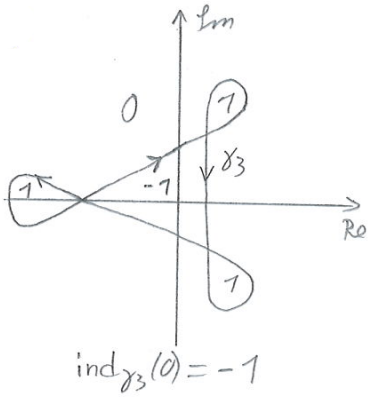
(a)



(b)



(c)



Wir definieren $f(z) = \exp(z^2) - 3\cos z$ für $z \in \mathbb{C}$. Es gilt $f \in H(\mathbb{C})$ und γ_1, γ_2 und γ_3 sind geschlossene, stückweise stetig differenzierbare Wege in $\mathbb{C}$, wobei $0 \notin \gamma_k^*$ für $k = 1, \dots, 3$. Es

folgt mit der Cauchyschen Integralformel (Satz 7.4)

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{\exp(z^2) - 3\cos z}{z}\,\mathrm{d}z &= \int_\gamma \frac{f(z)}{z-0}\,\mathrm{d}z \\ &= 2\pi\mathrm{i} f(0)\,\mathrm{ind}_\gamma(0) \\ &= 2\pi\mathrm{i}(-2)\,\mathrm{ind}_\gamma(0) \\ &= -4\pi\mathrm{i}\,\mathrm{ind}_\gamma(0).\end{aligned}$$

Damit ergibt sich

(a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{z}\,\mathrm{d}z = 8\pi\mathrm{i}$,

(b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{z}\,\mathrm{d}z = -8\pi\mathrm{i}$ und

(c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{z}\,\mathrm{d}z = 4\pi\mathrm{i}$. □