Karlsruher Institut für Technologie

17. Mai 2023
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
Henning Heister

Analysis für das Lehramt
Übungsblatt 04

Aufgabe 1 (Eigenschaften holomorpher Funktionen).

(a) Entscheiden Sie in jedem der folgenden Fälle, ob es eine Funktion f gibt, die holomorph in $\mathbb{C}$ ist und die geforderte Eigenschaft erfüllt. Falls ja, wie sehen diese Funktionen dann aus?

(i) $f(\frac{1}{n}) = f(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2} \quad (n \in \mathbb{N})$,

(ii) $f(\frac{1}{n}) = \frac{(-1)^n}{n} \quad (n \in \mathbb{N})$,

(iii) $f(\frac{1}{n}) = f(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^3} \quad (n \in \mathbb{N})$,

(iv) $f(\frac{1}{3n}) = \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N})$.

(b) Es sei $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $f \in H(\mathbb{D})$ und es gebe ein $C > 0$ mit $\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leq \frac{C}{\sqrt{|z|}}$ $(z \in \mathbb{D} \setminus \{0\})$. Zeigen Sie, dass die Funktion $g : \mathbb{D} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $g(z) := \frac{f(z)}{z}$ in 0 eine hebbare Singularität besitzt.

Aufgabe 2 (Klassifikation isolierter Singularitäten). Bestimmen Sie von den folgenden Funktionen f jeweils die Art und Lage sämtlicher isolierter Singularitäten. Der Definitionsbereich sei dabei jeweils die Menge der $z \in \mathbb{C}$, für die der Ausdruck erklärt ist.

(a) $f(z) := \dfrac{z}{z^2 - z - 12}$,

(b) $f(z) := \dfrac{1}{\sin(\frac{1}{z})}$,

(c) $f(z) := \dfrac{\sin(z) - z}{z^3}$,

(d) $f(z) := \dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{(z-1)^2}$.

Aufgabe 3 (Cauchysche Integralformel und Ungleichungen).

(a) Für $r > 0$ sei $\gamma_r(t) := re^{it}$ $(t \in [0, 2\pi])$. Berechnen Sie den Wert der folgenden Wegintegrale:

(i) $\displaystyle\int_{\gamma_2} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}\,dz$,

(ii) $\displaystyle\int_{\gamma_4} \frac{ze^{iz}}{(z-\pi)^3}\,dz$.

(b) Es seien $\alpha, \beta \geq 0$ und $f \in H(\mathbb{C})$, sodass gilt:

$$|f(z)| \leq \alpha |z|^{\frac{3}{2}} + \beta \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Zeigen Sie: Es existieren $a, b \in \mathbb{C}$ mit $f(z) = az + b\,(z \in \mathbb{C})$.

Aufgabe 4 (Mittelwertseigenschaft, Maximumsprinzip)**.**

(a) Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f: \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie mittels der Cauchyschen Integralformel folgende Aussage: Sind $z_0 \in \Omega$ und $r > 0$ so klein, dass $z_0 + re^{it} \in \Omega$ für alle $t \in [0, 2\pi]$, so gilt

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\,dt.$$

(b) Sei f wie in Punkt (a). Folgern Sie aus Punkt (a), dass $|f|$ kein striktes Maximum besitzt, das heißt, dass kein $z_0 \in \Omega$ existiert mit $|f(z_0)| > |f(z)|$ für alle $z \in \Omega \setminus \{z_0\}$.

Hinweis: Führen Sie einen Widerspruchsbeweis.