Karlsruher Institut für Technologie

24. Mai 2023
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
Henning Heister

Analysis für das Lehramt
Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 04

Aufgabe 1 (Eigenschaften holomorpher Funktionen)**.**

(a) Entscheiden Sie in jedem der folgenden Fälle, ob es eine Funktion f gibt, die holomorph in $\mathbb{C}$ ist und die geforderte Eigenschaft erfüllt. Falls ja, wie sehen diese Funktionen dann aus?

(i) $f(\frac{1}{n}) = f(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2} \quad (n \in \mathbb{N})$,

(ii) $f(\frac{1}{n}) = \frac{(-1)^n}{n} \quad (n \in \mathbb{N})$,

(iii) $f(\frac{1}{n}) = f(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^3} \quad (n \in \mathbb{N})$,

(iv) $f(\frac{1}{3n}) = \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N})$.

(b) Es sei $\mathbb{D} \coloneqq \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $f \in H(\mathbb{D})$ und es gebe ein $C > 0$ mit $\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leq \frac{C}{\sqrt{|z|}}$ $(z \in \mathbb{D} \setminus \{0\})$. Zeigen Sie, dass die Funktion $g : \mathbb{D} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $g(z) \coloneqq \frac{f(z)}{z}$ in 0 eine hebbare Singularität besitzt.

Lösungsvorschlag.

(a) (i) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine in $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion, die

$$f\Big(\frac{1}{n}\Big) = f\Big(-\frac{1}{n}\Big) = \frac{1}{n^2}$$

für $n \in \mathbb{N}$ erfüllt. Dann ist f gegeben durch $f(z) = z^2$.

Definiere $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^2$. Dann ist g holomorph in $\mathbb{C}$ und es gilt $g(1/n) = g(-1/n) = 1/n^2$ für $n \in \mathbb{N}$. Somit gilt $\{1/n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \{z \in \mathbb{C} : f(z) = g(z)\}$ und diese hat den Häufungspunkt 0. Mit dem Identitätssatz folgt $f = g$ auf ganz $\mathbb{C}$. Also erfüllt genau die Funktion f alle geforderten Eigenschaften.

(ii) Es gibt keine in $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion f, welche

$$f(\frac{1}{n}) = \frac{(-1)^n}{n}$$

für $n \in \mathbb{N}$ erfüllt.

Angenommen es gäbe eine solche Funktion f. Dann gilt insbesondere

$$f(\frac{1}{2n}) = \frac{(-1)^{2n}}{2n} = \frac{1}{2n}$$

für $n \in \mathbb{N}$. Definiere $g(z) = z$. Dann gilt $g(1/(2n)) = 1/(2n) = f(1/2n)$ für $n \in \mathbb{N}$ und somit hat die Menge $\{1/(2n) : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \{z \in \mathbb{C} : f(z) = g(z)\}$ den Häufungspunkt 0. Mit dem Identitätssatz folgt $f(z) = g(z)$ für $z \in \mathbb{C}$, also müssten die Funktionen f und g insbesondere für $z = 1/(2n+1)$ denselben Wert annehmen, aber

$$f\Big(\frac{1}{2n+1}\Big) = \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = -\frac{1}{2n+1} \neq \frac{1}{2n+1} = g\Big(\frac{1}{2n+1}\Big).$$

Also kann keine solche Funktion existieren.

(iii) Es gibt keine in $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion, welche

$$f\Big(\frac{1}{n}\Big) = f\Big(-\frac{1}{n}\Big) = \frac{1}{n^3}$$

für $n \in \mathbb{N}$ erfüllt.

Angenommen es gäbe eine solche Funktion f. Definiere $g(z) = z^3$ für $z \in \mathbb{C}$. Dann gilt $g(1/n) = 1/n^3 = f(1/n)$ für $n \in \mathbb{N}$, also hat $\{1/n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \{z \in \mathbb{C} : f(z) = g(z)\}$ den Häufungspunkt 0. Mit dem Identitätssatz folgt $f = g$ auf $\mathbb{C}$, aber

$$f\Big(-\frac{1}{n}\Big) = \frac{1}{n^3} \neq -\frac{1}{n^3} = g\Big(-\frac{1}{n}\Big).$$

Also kann keine solche Funktion f existieren.

(iv) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine in $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion, die

$$f\Big(\frac{1}{3n}\Big) = \frac{1}{n}$$

für $n \in \mathbb{N}$ erfüllt. Dann ist f gegeben durch $f(z) = 3z$ für $z \in \mathbb{C}$.

Definiere $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto 3z$, dann ist g holomorph in $\mathbb{C}$. Es gilt $g(1/(3n)) = 1/n = f(1/(3n))$ für $n \in \mathbb{N}$. Somit hat $\{1/(3n) : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \{z \in \mathbb{C} : f(z) = g(z)\}$ den Häufungspunkt 0. Mit dem Identitätssatz folgt $f = g$ auf $\mathbb{C}$, also $f(z) = 3z$ für $z \in \mathbb{C}$.

(b) Mit der Stetigkeit von f gilt

$$f(0) = \lim_{z \to 0} f(z) = 0.$$

Da f komplex differenzierbar ist, gilt für $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$

$$g(z) = \frac{f(z)}{z} = \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} \to f'(0).$$

Somit lässt sich g stetig nach 0 (mit Funktionswert $f'(0)$) fortsetzen. Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz ist 0 damit eine hebbare Singularität von g. □

Aufgabe 2 (Klassifikation isolierter Singularitäten)**.** Bestimmen Sie von den folgenden Funktionen f jeweils die Art und Lage sämtlicher isolierter Singularitäten. Der Definitionsbereich sei dabei jeweils die Menge der $z \in \mathbb{C}$, für die der Ausdruck erklärt ist.

(a) $f(z) \coloneqq \dfrac{z}{z^2 - z - 12}$,

(b) $f(z) \coloneqq \dfrac{1}{\sin(\frac{1}{z})}$,

(c) $f(z) \coloneqq \dfrac{\sin(z) - z}{z^3}$,

(d) $f(z) \coloneqq \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}}{(z-1)^2}$.

Lösungsvorschlag.

(a) Die Funktion $f(z) = z/(z^2 - z - 12)$ ist für $z \in \mathbb{C} \setminus \{-3, 4\}$ wohldefiniert und holomorph. In $z = -3$ und $z = 4$ liegen also isolierte Singularitäten vor. Es gilt:

$$(z-4)f(z) = \frac{z}{z+3} \to \frac{4}{7} \neq 0$$

für $z \to 4$, also liegt in $z = 4$ ein Pol erster Ordnung vor. Analog gilt

$$(z+3)f(z) = \frac{z}{z-4} \to \frac{3}{7} \neq 0$$

für $z \to -3$, also liegt in $z = -3$ ebenfalls ein Pol erster Ordnung vor.

(b) Die Funktion ist für $z = 0$ und die Nullstellen von $z \mapsto \sin(1/z)$ nicht definiert. In allen anderen Punkten ist f holomorph. Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} &\sin\frac{1}{z} = 0 \\ \iff\ &\frac{1}{z} = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \\ \iff\ &z = \frac{1}{k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Somit sind $z_k = 1/(k\pi)$ für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ einfache Nullstellen von $\sin(1/z)$, denn

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \sin\frac{1}{z}\right)(z_k) = -(k\pi)^{-2}\cos(k\pi) \neq 0.$$

Die z_k sind isolierte Singularitäten und da es sich um einfache Nullstellen von $g(z) = \sin(1/z)$ handelt, existiert zu z_k so eine Funktion g_k, die in einer Umgebung U von z_k holomorph ist und $g_k(z_k) \neq 0$, dass $g(z) = (z - z_k)g_k(z)$ für $z \in U$. Somit folgt

$$(z - z_k)f(z) = \frac{1}{g_k(z)} \to \frac{1}{g_k(z_k)} \neq 0$$

für $z \to z_k$. Also liegen in den Punkten z_k Pole erster Ordnung vor. Der Punkt 0 ist keine isolierte Singularität.

(c) Die Funktion $f(z) = (\sin z - z)z^{-3}$ hat nur in $z = 0$ eine Singularität. Mit der Reihendarstellung des Sinus gilt für $z \in \mathbb{C}$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

und damit

$$\frac{\sin z - z}{z^3} = -\frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \dots$$

holomorph in $\mathbb{C}$. Somit ist $z = 0$ eine hebbare Singularität.

(d) Die Funktion ist für $z = 0$ und $z = 1$ nicht wohldefiniert. In $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ ist f holomorph. Wegen $(z - 1)^2 f(z) = e^{1/z} \to e \neq 0$ für $z \to 1$ besitzt f in $z = 1$ einen Pol zweiter Ordnung. In $z = 0$ liegt eine wesentliche Singularität vor, denn:

- Es gilt $1/n \to 0$ und $e^n \to \infty$ für $n \to \infty$, also $f(1/n) \to \infty$ für $n \to \infty$. Also ist die Singularität nicht hebbar.
- Es gilt $-1/n \to 0$ und $e^{-n} \to 0$ für $n \to \infty$, also $f(-1/n) \to 0$ für $n \to \infty$. Also liegt in $z = 0$ kein Pol vor. □

Aufgabe 3 (Cauchysche Integralformel und Ungleichungen)**.**

(a) Für $r > 0$ sei $\gamma_r(t) := re^{it}$ $(t \in [0, 2\pi])$. Berechnen Sie den Wert der folgenden Wegintegrale:

(i) $\displaystyle\int_{\gamma_2} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}\,dz$,

(ii) $\displaystyle\int_{\gamma_4} \frac{ze^{iz}}{(z-\pi)^3}\,dz$.

(b) Es seien $\alpha, \beta \geq 0$ und $f \in H(\mathbb{C})$, sodass gilt:

$$|f(z)| \leq \alpha|z|^{\frac{3}{2}} + \beta \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Zeigen Sie: Es existieren $a, b \in \mathbb{C}$ mit $f(z) = az + b\,(z \in \mathbb{C})$.

Lösungsvorschlag.

(a) (i) Definiere $f(z) = e^{2z}$ für $z \in \mathbb{C}$. Dann ist $f \in H(\mathbb{C})$ und es gilt

$$f^{(3)}(z) = 2^3 e^{2z} = 8e^{2z}$$

für $z \in \mathbb{C}$. Des Weiteren liegt -1 im Inneren des Integrationswegs, das heißt $\operatorname{ind}_{\gamma_2}(-1) = 1$. Mit der Cauchyschen Integralformel für Ableitungen folgt

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}\,dz &= \int_{\gamma_2} \frac{f(z)}{(z-(-1))^{3+1}}\,dz \\ &= \frac{2\pi i}{3!} f^{(3)}(-1)\operatorname{ind}_{\gamma_2}(-1) \\ &= \frac{2\pi i}{6} 8e^{-2}1 \\ &= \frac{8\pi}{3e^2} i.\end{aligned}$$

(ii) Definiere $f(z) = ze^{iz}$ für $z \in \mathbb{C}$. Dann gilt $f \in H(\mathbb{C})$ und für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned}f'(z) &= e^{iz} + ize^{iz} \\ f''(z) &= 2ie^{iz} - ze^{iz}.\end{aligned}$$

Insbesondere ist $f''(\pi) = -\pi e^{i\pi} + 2ie^{i\pi} = \pi - 2i$ und $\operatorname{ind}_{\gamma_4}(\pi) = 1$. Mit der Cauchyschen Integralformel für Ableitungen folgt

$$\begin{aligned}&\int_{\gamma_4} \frac{ze^{iz}}{(z-\pi)^3}\,dz \\ &\qquad = \int_{\gamma_4} \frac{f(z)}{(z-\pi)^3}\,dz \\ &\qquad = \frac{2\pi i}{2!} f''(\pi)\operatorname{ind}_{\gamma_4}(\pi) \\ &\qquad = \pi i(\pi - 2i)1 \\ &\qquad = 2\pi + i\pi^2.\end{aligned}$$

(b) Da $f \in H(\mathbb{C})$, kann f als Potenzreihe (mit Konvergenzradius ∞) geschrieben werden. Sei daher

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

für $z \in \mathbb{C}$. Sei $R > 0$ und $B(0,R)$ die Kreisscheibe um 0 mit Radius R. Insbesondere gilt $f \in H(B(0,R))$. Nach Voraussetzung gilt für $z \in B(0,R)$

$$|f(z)| \le \alpha |z|^{3/2} + \beta \le \alpha R^{3/2} + \beta =: M_R.$$

Mit Satz 8.5 folgt

$$|c_n| = \frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} \leq \frac{M_R}{R^n}$$

für $n \in \mathbb{N}$. Sei $n \geq 2$. Dann gilt

$$|c_n| \leq \frac{M_R}{R^n} = \frac{\alpha}{R^{n-3/2}} + \frac{\beta}{R^n} \to 0$$

für $R \to \infty$, da $n - 3/2 \geq 1/2$. Also ist $c_n = 0$ für $n \geq 2$ und somit $f(z) = c_0 + c_1 z$ für $z \in \mathbb{C}$. Im Falle $n = 0$ und $n = 1$ kann man keine genaueren Aussagen über c_0 und c_1 treffen. Die Wahl $a = c_1$ und $b = c_0$ beweist die Behauptung. □

Aufgabe 4 (Mittelwertseigenschaft, Maximumsprinzip)**.**

(a) Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie mittels der Cauchyschen Integralformel folgende Aussage: Sind $z_0 \in \Omega$ und $r > 0$ so klein, dass $z_0 + re^{it} \in \Omega$ für alle $t \in [0, 2\pi]$, so gilt

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\, dt.$$

(b) Sei f wie in Punkt (a). Folgern Sie aus Punkt (a), dass $|f|$ kein striktes Maximum besitzt, das heißt, dass kein $z_0 \in \Omega$ existiert mit $|f(z_0)| > |f(z)|$ für alle $z \in \Omega \setminus \{z_0\}$.

Hinweis: Führen Sie einen Widerspruchsbeweis.

Lösungsvorschlag.

(a) Da Ω offen ist, existiert so ein $R > r$, dass noch $\Omega_0 = B(z_0, R) \subseteq \Omega$ ist. Dann ist Ω_0 offen und konvex und f holomorph auf Ω_0. Ferner definiert $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$ mit $t \in [0, 2\pi]$ einen stückweise stetig differenzierbaren Weg γ in Ω_0. Mit der Cauchyschen Integralformel und $\mathrm{ind}_\gamma(z_0) = 1$ folgt

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}\, d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z_0} \gamma'(t)\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}} rie^{it}\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\, dt. \end{aligned}$$

(b) Angenommen, es existiert so ein $z_0 \in \Omega$, dass

$$|f(z_0)| > |f(z)| \tag{1}$$

für alle $z \in \Omega \setminus \{z_0\}$. Da Ω offen ist, existiert ein $r > 0$ mit $z_0 + re^{it} \in \Omega$ für alle $t \in [0, 2\pi]$. Mit Punkt (a) folgt

$$\begin{aligned} |f(z_0)| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} f\big(z_0 + re^{it}\big)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{|f(z_0 + re^{it})|}_{<|f(z_0)|}\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

also mit der Stetigkeit von f und Gleichung (1)

$$\begin{aligned} &< \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0)|\,\mathrm{d}t \\ &= |f(z_0)|, \end{aligned}$$

also $|f(z_0)| < |f(z_0)|$. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme. □