24. Mai 2023
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
Henning Heister

Analysis für das Lehramt
Übungsblatt 05

Aufgabe 1 (Ganze Funktionen).

(a) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion, die nicht-konstant ist. Zeigen Sie, dass das Bild von f dicht in $\mathbb{C}$ ist.

(b) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion mit $f(z) \notin \mathbb{R}$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass f konstant ist.

(c) Zeigen Sie, dass es keine Funktion $f \in H(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ gibt mit

$$|f(z)| \geq \frac{1}{\sqrt{|z|}} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \tag{1}$$

Aufgabe 2 (Residuensatz).

(a) Sei $\gamma(t) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ $(t \in [0, 2\pi])$. Berechnen Sie den Wert der folgenden Wegintegrale:

(i) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z}{z^4 - 4z^2 + 2}\,\mathrm{d}z$ und

(ii) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - 1}\,\mathrm{d}z$.

(b) Bestimmen Sie den Wert der folgenden reellen Integrale:

(i) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1 + (\sin(t))^2}\,\mathrm{d}t$ und

(ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2 - 2}{(t^2 + 2)(t^2 + 4)}\,\mathrm{d}t$.

Aufgabe 3 (Differentialgleichungen mit getrennten Veränderlichen).

(a) Es seien $t_0 \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$u'(t) = 1 + u(t)^2, \quad u(t_0) = x_0$$

und geben Sie das maximale Existenzintervall (ω_-, ω_+) an.

(b) Es sei folgendes Anfangswertproblem gegeben:

$$u'(t) = \mathrm{e}^{u(t)} \sin(t), \quad u(0) = 0.$$

Bestimmen Sie die Lösung des angegebenen Anfangswertproblems und das maximale Existenzintervall (ω_-, ω_+).

Aufgabe 4.

(a) Es sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und u eine Lösung des autonomen Systems

$$u'(t) = f(u(t)). \tag{2}$$

(i) Es sei $u: (\omega_-, \omega_+) \to \mathbb{R}$ die nicht fortsetzbare Lösung von Gleichung (2) mit $u(0) = 0$. Ferner sei f lokal Lipschitz stetig und $f(-1) = f(1) = 0$. Zeigen Sie, dass u auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.

Hinweis: Zeigen Sie, dass die Werte von u in einem beschränkten Intervall bleiben.

(ii) Es sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $u: J \to \mathbb{R}$ eine Lösung von Gleichung (2). Für ein $t_0 \in \mathbb{R}$ gelte $u(t_0) > 0$ und f erfülle $f(0) > 0$.

(1) Zeigen Sie, dass $u(t) > 0$ für $t \geq t_0$.

(2) Zeigen Sie, dass $f(0) \geq 0$ nicht für die obige Aussage reicht.

(b) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f \in C([a,b] \times \mathbb{R})$. Die Funktion $v \in C^1([a,b], \mathbb{R})$ erfülle die strikte Differentialungleichung

$$v'(t) < f(t, v(t))$$

für alle $t \in (a, b]$. Sei außerdem $y: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(a) = y_0$$

für ein $y_0 > v(a)$.

Zeigen Sie, dass $v(t) < y(t)$ für alle $t \in [a, b]$.