Karlsruher Institut für Technologie

07. Juni 2023
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
Henning Heister

Analysis für das Lehramt
Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 05

Aufgabe 1 (Ganze Funktionen)**.**

(a) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion, die nicht-konstant ist. Zeigen Sie, dass das Bild von f dicht in $\mathbb{C}$ ist.

(b) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion mit $f(z) \notin \mathbb{R}$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass f konstant ist.

(c) Zeigen Sie, dass es keine Funktion $f \in H(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ gibt mit

$$|f(z)| \geq \frac{1}{\sqrt{|z|}} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \tag{1}$$

Lösungsvorschlag.

(a) Angenommen, $f(\mathbb{C}) \subsetneq \mathbb{C}$ wäre nicht dicht in $\mathbb{C}$. Dann existiert so ein $w \in \mathbb{C} \setminus f(\mathbb{C})$ und ein $\delta > 0$, dass $B(w, \delta) \subseteq \mathbb{C} \setminus f(\mathbb{C})$. Wir definieren

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w}$$

für $z \in \mathbb{C}$. Dann ist $g \in H(\mathbb{C})$ und

$$|g(z)| = \frac{1}{|f(z) - w|} \leq \frac{1}{\delta}$$

für $z \in \mathbb{C}$. Somit ist g beschränkt auf $\mathbb{C}$. Mit dem Satz von Liouville (Satz 8.6) folgt, dass g konstant ist. Das bedeutet aber, dass auch f konstant ist, was der Voraussetzung widerspricht. Somit war die Annahme falsch und es gilt, $f(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C}$ ist dicht.

(b) Angenommen, f wäre nicht konstant. Da f eine ganze Funktion ist, folgt mit Punkt (a), dass $f(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C}$ dicht ist. Weil nach Voraussetzung $f(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ und das Bild von f dicht in $\mathbb{C}$ ist, existieren solche Zahlen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, dass $\operatorname{Im} f(z_1) < 0$ und $\operatorname{Im} f(z_2) > 0$. Da $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ aus zwei Zusammenhangskomponenten besteht, besteht das Bild von f auch aus mindestens zwei Zusammenhangskomponenten. Nach Satz 8.8 (a) ist $f(\mathbb{C})$ ein Gebiet (da f als nicht konstant angenommen ist), also insbesondere zusammenhängend. Dies ist ein Widerspruch, also war die Annahme falsch und die Behauptung ist bewiesen.

(c) Angenommen, es gäbe eine Funktion $f \in H(\mathbb{C} \setminus \{0\})$, die Gleichung (1) erfüllt. Dann ist f nullstellenfrei auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ und somit ist die Funktion g mit

$$g(z) = \frac{1}{f(z)}$$

für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ dort wohldefiniert und holomorph. Es gilt für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$|g(z)| = \frac{1}{|f(z)|} \overset{(1)}{\leq} \sqrt{|z|} \to 0 \tag{2}$$

für $z \to 0$. Das heißt, g kann stetig nach 0 (mit Funktionswert 0) fortgesetzt werden. Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz ist 0 eine hebbare Singularität. Wir bezeichnen die holomorphe Fortsetzung von g auf ganz $\mathbb{C}$ wieder mit g. Die einzige Nullstelle von g ist 0, das heißt, es existieren so ein $n \in \mathbb{N}$ und so eine Funktion $g_1 \in H(\mathbb{C})$ mit $g_1(0) \neq 0$, dass

$$g(z) = z^n g_1(z) \tag{3}$$

für $z \in \mathbb{C}$. Da g außer in der 0 keine Nullstelle besitzt, hat g_1 auf ganz $\mathbb{C}$ keine Nullstellen. Wir definieren $h(z) = z^{2n-1} g_1(z)^2$ für $z \in \mathbb{C}$. Es gilt, dass h ganz ist, $h(0) = 0$ und für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt

$$|h(z)| = \left| \frac{z^{2n}}{z} g_1(z)^2 \right| = \frac{1}{|z|} \left| (z^n g_1(z))^2 \right| \overset{3}{=} \frac{1}{|z|} |g(z)|^2 \overset{2}{\leq} \frac{1}{|z|} |z| = 1.$$

Somit ist h auch beschränkt und mit dem Satz von Liouville folgt, dass h konstant ist, also $h(z) = h(0) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Sei nun $z \neq 0$ und somit auch $z^{2n-1} \neq 0$. Aus der Definition von h folgt, dass $g_1(z) = 0$, was ein Widerspruch ist, da g_1 nullstellenfrei ist. Daraus folgt die Behauptung. □

Aufgabe 2 (Residuensatz)**.**

(a) Sei $\gamma(t) \coloneqq \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ $(t \in [0, 2\pi])$. Berechnen Sie den Wert der folgenden Wegintegrale:

(i) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z}{z^4 - 4z^2 + 2} \, \mathrm{d}z$ und

(ii) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - 1} \, \mathrm{d}z.$

(b) Bestimmen Sie den Wert der folgenden reellen Integrale:

(i) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1 + (\sin(t))^2} \, \mathrm{d}t$ und

(ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2 - 2}{(t^2 + 2)(t^2 + 4)} \, \mathrm{d}t.$

Lösungsvorschlag.

(a) (i) Es gilt

$$z^4 - 4z^2 + 2 = 0$$

$$\iff \left(z^2-2\right)^2 = 2$$
$$\iff z_1 = \sqrt{2+\sqrt{2}}, z_2 = -\sqrt{2+\sqrt{2}}, z_3 = \sqrt{2-\sqrt{2}}, z_4 = -\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Wir setzen $A = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$. Weiter gilt

$$\begin{aligned}\lim_{z\to z_1}(z-z_1)f(z) &= \lim_{z\to z_1}\frac{z}{(z-z_2)(z^2-2+\sqrt{2})}\\ &= \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}(2+\sqrt{2}-2+\sqrt{2})}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{8}\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\lim_{z\to z_3}(z-z_3)f(z) &= \lim_{z\to z_3}\frac{z}{(z^2-2-\sqrt{2})(z-z_4)}\\ &= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{(2-\sqrt{2}-2-\sqrt{2})(2\sqrt{2-\sqrt{2}})}\\ &= -\frac{\sqrt{2}}{8}.\end{aligned}$$

Somit und mit analogen Rechnungen für z_2 und z_4 folgt $\operatorname{res}(f, z_1) = \operatorname{res}(f, z_2) = \sqrt{2}/8$ und $\operatorname{res}(f, z_3) = \operatorname{res}(f, z_4) = -\sqrt{2}/8$. Diese Punkte sind Pole erster Ordnung und die einzigen Singularitäten von f, überall sonst ist f holomorph, also ist f meromorph.

Der Weg γ ist ein geschlossener, stückweise stetig differenzierbarer Weg, der nicht durch die Singularitäten läuft, da $|z_1| = |z_2| > 1$ und $|z_3| = |z_4| < 1$. Insbesondere gilt dann $\operatorname{ind}_\gamma(z_1) = \operatorname{ind}_\gamma(z_2) = 0$ und $\operatorname{ind}_\gamma(z_3) = \operatorname{ind}_\gamma(z_4) = 1$. Mit dem Residuensatz folgt nun

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z &= 2\pi\mathrm{i}\sum_{a\in A}\operatorname{res}(f,a)\operatorname{ind}_\gamma(a)\\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\mathrm{i}.\end{aligned}$$

(ii) Wir berechnen die Nullstellen des Nenners. Es gilt für $z = x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - 1 = 0\\ \iff\ &\sin x = 0 \wedge \cos x = \mathrm{e}^y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\iff x = k\pi\,(k \in \mathbb{Z}) \wedge \cos x = \mathrm{e}^{y} \\
&\iff x = 2k\pi\,(k \in \mathbb{Z}) \wedge y = 0 \\
&\iff z \in \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.
\end{aligned}$$

Definiere $f(z) = z/(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - 1)$ auf $\mathbb{C} \setminus \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Dann ist f auf diesem Gebiet holomorph. Die Punkte $z_k = 2k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$ sind isolierte Singularitäten von f. Lediglich z_0 liegt im Inneren des Integrationswegs, das heißt $\operatorname{ind}_\gamma(z_0) = 1$ und $\operatorname{ind}_\gamma(z_k) = 0$ für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Da f also meromorph auf $\mathbb{C}$ ist, folgt mit dem Residuensatz

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z &= 2\pi\mathrm{i} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \operatorname{res}(f, z_k) \operatorname{ind}_\gamma(z_k) \\
&= 2\pi\mathrm{i} \operatorname{res}(f, 0). \qquad (4)
\end{aligned}$$

Weiter gilt für $z \neq 0$ und z nahe 0

$$\frac{z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - 1} = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - 1}{z}\right)^{-1} \to \left(\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\right]_{z=0}\right)^{-1} = -\mathrm{i}$$

für $z \to 0$. Somit lässt sich f stetig nach 0 fortsetzen. Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz ist 0 eine hebbare Singularität, insbesondere gilt dann $\operatorname{res}(f, 0) = 0$. Aus Gleichung (4) erhalten wir

$$\int_\gamma \frac{z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - 1}\,\mathrm{d}z = 0.$$

(b) (i) Für $t \in \mathbb{R}$ gilt mit $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$

$$\begin{aligned}
(\sin t)^2 &= \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t} - 2 + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t}}{-4} \\
&= \frac{z^2 - 2 + z^{-2}}{-4} \\
&= -\frac{z^4 - 2z^2 + 1}{4z^2} \\
\implies 1 + (\sin t)^2 &= \frac{-z^4 + 6z^2 - 1}{4z^2} \\
\implies \frac{1}{1 + (\sin t)^2} &= -\frac{4\mathrm{i}z}{-z^4 + 6z^2 - 1}\mathrm{i}z.
\end{aligned}$$

Definiere $f(z) = (4\mathrm{i}z/(z^4 - 6z^2 + 1))$, wobei der Definitionsbereich noch zu bestimmen ist. Dann gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1 + (\sin t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z. \qquad (5)$$

Wir berechnen nun die Pole von f. Es gilt

$$\begin{aligned} & z^4 - 6z^2 + 1 = 0 \\ \iff & \left(z^2 - 3\right)^2 = 8 \\ & \iff z^2 = 3 \pm 2\sqrt{2} \\ & \iff z_{1,2} = \pm\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} \quad \vee \quad z_{3,4} = \pm\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Es gilt

$$(z - z_3)f(z) \to \frac{4\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}\mathrm{i}}{-4\sqrt{2}2\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{i}$$

und analog für z_4. In z_3 und z_4 liegen Pole erster Ordnung und es gilt $\operatorname{res}(f, z_3) = \operatorname{res}(f, z_4) = -1/(2\sqrt{2})\mathrm{i}$. Analog sieht man, dass in z_1 und z_2 Pole erster Ordnung liegen mit Index 0. Setze $A = \{z_1, \ldots, z_4\}$. Dann $f \in H(\mathbb{C} \setminus A)$, also f meromorph. Mit dem Residuensatz folgt aus Gleichung (5)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1 + (\sin t)^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}\pi.$$

(ii) Setze $P_1 = z^2 - 2$ und $P_2 = (z^2 + 2)(z^2 + 4)$ für $z \in \mathbb{C}$. Der Grad von P_2 ist 4 und damit echt größer als 2, der Grad von P_1; zudem ist $P_2(t) \neq 0$ für $t \in \mathbb{R}$. Wir berechnen die Residuen der Funktion $R(z) = P_1(z)/P_2(z)$. Es gilt $P_2(z) = 0 \iff z \in \{\pm\sqrt{2}\mathrm{i}, \pm 2\mathrm{i}\} = A$. Für $z \in A$ handelt es sich um Pole erster Ordnung von R:

$$\begin{aligned} \lim_{z \to \sqrt{2}\mathrm{i}} \left(z - \sqrt{2}\mathrm{i}\right) R(z) &= \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i} \\ \lim_{z \to 2\mathrm{i}} (z - 2\mathrm{i}) R(z) &= \frac{3}{4}\mathrm{i}. \end{aligned}$$

Mit Satz 9.2 folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2 - 2}{(t^2 + 2)(t^2 + 4)}\,\mathrm{d}t = \pi\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right). \qquad \square$$

Aufgabe 3 (Differentialgleichungen mit getrennten Veränderlichen)**.**

(a) Es seien $t_0 \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$u'(t) = 1 + u(t)^2, \quad u(t_0) = x_0 \tag{6}$$

und geben Sie das maximale Existenzintervall (ω_-, ω_+) an.

(b) Es sei folgendes Anfangswertproblem gegeben:

$$u'(t) = \mathrm{e}^{u(t)} \sin(t), \quad u(0) = 0. \tag{7}$$

Bestimmen Sie die Lösung des angegebenen Anfangswertproblems und das maximale Existenzintervall (ω_-, ω_+).

Lösungsvorschlag.

(a) Setze $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t,x) = 1 + x^2$. Dann ist f stetig auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und lokal Lipschitz stetig bezüglich x, da f stetig partiell differenzierbar ist. Mit Picard–Lindelöf folgt, dass Gleichung (6) eindeutig lösbar ist und eine nicht fortsetzbare Lösung $u : (\omega_-, \omega_+) \to \mathbb{R}$ besitzt. Weiter gilt $f(t,x) = g(t)h(x)$ mit $g(t) = 1$ für $t \in \mathbb{R}$ und $h(x) = 1 + x^2$ für $x \in \mathbb{R}$. Es gilt $h(x_0) \geq 1$, also $h(x_0) \neq 0$ und $g \neq 0$. Somit erhält man

$$\begin{aligned}
t - t_0 &= \int_{t_0}^{t} g(s)\,\mathrm{d}s \\
&= \int_{x_0}^{u(t)} \frac{1}{h(x)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{x_0}^{u(t)} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= [\arctan x]_{x_0}^{u(t)} \\
&= \arctan u(t) - \arctan x_0 \\
\iff \arctan u(t) &= \arctan x_0 + t - t_0 \\
\implies u(t) &= \tan(\arctan x_0 + t - t_0),
\end{aligned}$$

wobei $\arctan x_0 + t - t_0 \in (-\pi/2, \pi/2)$. Also hat Gleichung (6) die Lösung $u(t) = \tan(\arctan x_0 + t - t_0)$ auf $I = (-\pi/2 + t_0 - \arctan x_0, \pi/2 + t_0 - \arctan x_0)$.

(b) Es sei $f(t,x) = \mathrm{e}^x \sin t$ für $t, x \in \mathbb{R}$. Dann ist f stetig und stetig partiell differenzierbar, somit lokal Lipschitz stetig bezüglich x. Mit Picard–Lindelöf folgt, dass Gleichung (7) eindeutig lösbar ist und die nicht fortsetzbare Lösung $u : (\omega_-, \omega_+) \to \mathbb{R}$ besitzt. Weiter gilt $f(t,x) = g(t)h(x)$ mit $g(t) = \sin t$ und $h(x) = \mathrm{e}^x$ für $t, x \in \mathbb{R}$, also

$$\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s = \int_{x_0}^{u(t)} \frac{1}{h(x)}\,\mathrm{d}x, \tag{8}$$

wobei $t_0 = x_0 = 0$. Die linke Seite ergibt

$$\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^t \sin s\,\mathrm{d}s = [-\cos s]_{s=0}^{t} = -\cos t + 1$$

und für die rechte Seite gilt

$$\int_0^{u(t)} \frac{1}{h(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{u(t)} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = [-\mathrm{e}^{-x}]_{x=0}^{u(t)} = -\mathrm{e}^{-u(t)} + 1.$$

Aus Gleichung (8) folgt

$$\begin{aligned} &\mathrm{e}^{-u(t)} = \cos t, \quad t \in (\omega_-, \omega_+) \\ \Longrightarrow\ &-u(t) = \log\cos t, \quad \cos t > 0. \end{aligned}$$

Somit ist die nicht fortsetzbare Lösung von Gleichung (7) gegeben durch $u(t) = -\log\cos t$ für $t \in (-\pi/2, \pi/2)$.

□

Aufgabe 4.

(a) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und u eine Lösung des autonomen Systems

$$u'(t) = f(u(t)). \tag{9}$$

(i) Es sei $u\colon (\omega_-, \omega_+) \to \mathbb{R}$ die nicht fortsetzbare Lösung von Gleichung (9) mit $u(0) = 0$. Ferner sei f lokal Lipschitz stetig und $f(-1) = f(1) = 0$. Zeigen Sie, dass u auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.

Hinweis: Zeigen Sie, dass die Werte von u in einem beschränkten Intervall bleiben.

(ii) Es sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $u\colon J \to \mathbb{R}$ eine Lösung von Gleichung (9). Für ein $t_0 \in J$ gelte $u(t_0) > 0$ und f erfülle $f(0) > 0$.

(1) Zeigen Sie, dass $u(t) > 0$ für $t \geq t_0$.

(2) Zeigen Sie, dass $f(0) \geq 0$ nicht für die obige Aussage reicht.

(b) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f \in C([a,b] \times \mathbb{R})$. Die Funktion $v \in C^1([a,b], \mathbb{R})$ erfülle die strikte Differentialungleichung

$$v'(t) < f(t, v(t))$$

für alle $t \in (a, b]$. Sei außerdem $y\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(a) = y_0$$

für ein $y_0 > v(a)$.

Zeigen Sie, dass $v(t) < y(t)$ für alle $t \in [a,b]$.

Lösungsvorschlag.

(a) (i) Wir zeigen, dass die Werte von u zwischen -1 und 1 bleiben. Nach Satz 10.2 trifft genau eine der drei folgenden Situationen ein:

Fall 1: $u'(t) = 0$ für alle $t \in (\omega_-, \omega_+)$. In diesem Fall ist u konstant und nach Bemerkung 3 nach Satz 10.1 ist u auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

Fall 2: $u'(t) > 0$ für alle $t \in (\omega_-, \omega_+)$. Wir setzen $t_0 = \inf\{t > 0 : u(t) > 1\}$. Aufgrund der Stetigkeit von u folgt, dass $u(t_0) = 1$. Damit folgt $u'(t_0) = f(u(t_0)) = f(1) = 0$, ein Widerspruch. Somit liegt die Menge G_+ aus Bemerkung 3 nach Satz 10.1 für alle $c > 0$ in einer kompakten Menge. Ein analoges Argument gilt für negative t. Somit ist u nach dieser Bemerkung auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

Fall 3: $u'(t) < 0$ für alle $t \in (\omega_-, \omega_+)$. Dieser Fall ist analog zum zweiten Fall.

(ii) (1) Wir nehmen an, die Behauptung wäre falsch, das heißt, u wird irgendwann nichtpositiv. Definiere $t_1 = \inf\{t \geq t_0 : u(t) \leq 0\}$. Da u stetig ist, gilt also $u(t_1) = 0$. Außerdem ist $u'(t_1) = f(u(t_1)) = f(0) > 0$. Andererseits gilt durch Betrachtung des linksseitigen Differenzenquotienten

$$u'(t_1) = \lim_{h \to 0^-} \frac{1}{h}(u(t_1 + 7) - u(t_1)) = \lim_{h \to 0^-} \frac{1}{h} u(t_1 + h) \leq 0.$$

Dies ist ein Widerspruch und es folgt die Behauptung.

(2) Die Funktion $u(t) = -t^3$ für $t \in \mathbb{R}$ ist eine Lösung von Gleichung (9) mit $f(x) = -3|x|^{2/3}$ für $x \in \mathbb{R}$. Hier gilt $u(-1) > 0$, $u(1) < 0$ und $f(0) = 0$.

(b) Angenommen, die Behauptung wäre falsch. Dann gibt es ein $t \in [a, b]$ mit $v(t) \geq y(t)$. Setze $t_1 = \inf\{t \in [a, b] : v(t) \geq y(t) > a\}$. Nach Definition von t_1 gilt $v(t) < y(t)$ für alle $t \in (a, t_1]$. Da v und y stetig sind, folgt $v(t_1) = y(t_1)$. Insgesamt folgt

$$f(t_1, v(t_1)) > v'(t_1) = \lim_{t \to t_1^-} \frac{v(t_1) - v(t)}{t_1 - t} \geq \lim_{t \to t_1^-} \frac{y(t_1) - y(t)}{t_1 - t} = y'(t_1) = f(t_1, y(t_1)),$$

ein Widerspruch. □