Karlsruher Institut für Technologie

07. Juni 2023
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
Henning Heister

Analysis für das Lehramt
Übungsblatt 06

Aufgabe 1 (Picard–Lindelöf).

(a) Zeigen Sie: Ist $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $f\colon D \to \mathbb{R}$ mit $(t,x) \mapsto f(t,x)$ stetig auf D und existiert die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x}$ auf D und ist stetig, so ist f lokal Lipschitz stetig auf D bezüglich x.

(b) Es seien $t_0, x_0 \in \mathbb{R}$ und $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(t,x) = \log(t^2x^2+1)$ für $(t,x) \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$u'(t) = f(t,u(t)), \quad u(t_0) = x_0 \tag{1}$$

eindeutig lösbar ist.

Aufgabe 2 (Stetige Abhängigkeit von den Anfangswerten). Es seien $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$ $(p \in \mathbb{N})$ offen, $f\colon D \to \mathbb{R}^p$ stetig auf D und Lipschitz stetig auf D bezüglich x mit Lipschitz-Konstante L. Betrachten Sie für $(t_0,x_0), (t_0,y_0) \in D$ die folgenden Anfangswertprobleme

$$u'(t) = f(t,u(t)), \quad u(t_0) = x_0, \tag{2}$$

und

$$v'(t) = f(t,v(t)), \quad v(t_0) = y_0. \tag{3}$$

Zeigen Sie, dass auf dem Schnitt I der beiden Existenzintervalle der Lösungen u von (2) und v von (3) folgende Abschätzung gilt:

$$|u(t) - v(t)| \leq |x_0 - y_0| e^{L|t-t_0|} \quad (t \in I).$$

Hinweis: Gronwall

Aufgabe 3 (Eigenschaften der Lösung eines Anfangswertproblems). Es seien $(t_0,x_0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ und $f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(t,x) = 1 + \frac{|x|}{t^2+1} \quad ((t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}).$$

Zeigen Sie, dass die nach links und rechts nicht fortsetzbare Lösung u des Anfangswertproblems

$$u'(t) = f(t,u(t)), \quad u(t_0) = x_0$$

auf ganz $\mathbb{R}$ existiert. Zeigen Sie außerdem, dass $u(t) \to \infty$ $(t \to \infty)$ und $u(t) \to -\infty$ $(t \to -\infty)$.

Aufgabe 4 (Das SIS-Modell)**.** Das *SIS-Modell* beschreibt die Ausbreitung einer Infektionskrankheit in einer Population, in der die Individuen nach überstandener Erkrankung keine Immunisierung haben und sich reinfizieren können. Das Modell geht von einer zeitlich konstanten Bevölkerungszahl $N \geq 1$ aus und unterteilt die Bevölkerung in zwei Klassen: $S = S(t)$ (die Infizierbaren, engl.: *Susceptibles*) und $I = I(t)$ (die Infizierenden, engl.: *Infectious*) zum Zeitpunkt $t \geq 0$. Das SIS-Modell beschreibt die zeitliche Entwicklung von I und S durch

$$\begin{aligned} I'(t) &= -\alpha I(t) + \beta I(t)S(t), \quad I(0) = I_0, \\ S'(t) &= \alpha I(t) - \beta I(t)S(t), \quad S(0) = S_0. \end{aligned} \tag{4}$$

Hierbei bezeichnen $\alpha > 0$ die *Heilungsrate*, $\beta > 0$ die *Infektionskontaktrate* sowie $I_0 > 0$ bzw. $S_0 > 0$ die Anzahl der Infizierenden bzw. Infizierbaren zum Startzeitpunkt $t = 0$.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $I_0 > 0$ und $S_0 > 0$ das Anfangswertproblem (4) eindeutig lösbar ist.

(b) Sei $(I, S)\colon (\omega_-, \omega_+) \to \mathbb{R}^2$ die eindeutige nichtfortsetzbare Lösung von (4). Zeigen Sie, dass (u, v) definiert durch $u(t) = \frac{I(\alpha^{-1}t)}{N}$, $v(t) = \frac{S(\alpha^{-1}t)}{N}$ $(t \in (\omega_-, \omega_+))$ folgendes Anfangswertproblem löst:

$$\begin{aligned} u'(t) &= (R-1)u(t) - Ru^2(t), \quad u(0) = u_0, \\ v'(t) &= -(R-1)u(t) + Ru^2(t), \quad v(0) = v_0. \end{aligned} \tag{5}$$

Hierbei ist $R = \frac{N\beta}{\alpha}$ die *Reproduktionsrate* der Infektion und $u_0 = I_0/N$, $v_0 = S_0/N$.

(c) Bestimmen Sie die eindeutige nichtfortsetzbare Lösung (u, v) von (5). Zeigen Sie, dass diese Lösung mindestens auf $[0, \infty)$ definiert ist. Bestimmen Sie weiterhin den Grenzwert $\lim_{t\to\infty}(u(t), v(t))$ in Abhängigkeit von R.

Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle $R \in (0, 1)$, $R = 1$ und $R > 1$ und beachten Sie das Beispiel zur logistischen Gleichung (Seiten 39 – 40 im Skript).