Karlsruher Institut für Technologie

14. Juni 2023
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
Henning Heister

Analysis für das Lehramt
Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 06

Aufgabe 1 (Picard–Lindelöf)**.**

(a) Zeigen Sie: Ist $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $f\colon D \to \mathbb{R}$ mit $(t,x) \mapsto f(t,x)$ stetig auf D und existiert die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x}$ auf D und ist stetig, so ist f lokal Lipschitz stetig auf D bezüglich x.

(b) Es seien $t_0, x_0 \in \mathbb{R}$ und $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(t,x) = \log(t^2x^2+1)$ für $(t,x) \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$u'(t) = f(t,u(t)), \quad u(t_0) = x_0 \tag{1}$$

eindeutig lösbar ist.

Lösungsvorschlag.

(a) Sei $(t_0,x_0) \in D$. Sei $\delta > 0$ und $(t,x),(t,y) \in D$ mit $|t-t_0|, |x-x_0|, |y-x_0| < \delta$. Da f bezüglich x differenzierbar ist, gilt nach dem Mittelwertsatz

$$f(t,x) - f(t,y) = \partial_x f(t,\xi)(x-y)$$

für ein ξ auf der Verbindungsstrecke zwischen x und y. Somit gilt

$$|f(t,x) - f(t,y)| = |\partial_x f(t,\xi)||x-y| \le L|x-y|,$$

wobei $L = \max|\partial_x f(\hat{t},\hat{x})|$, wobei das Maximum über $(\hat{t},\hat{x}) \in D$ mit $|\hat{t}-t_0|, |\hat{x}-x_0| \le \delta$ läuft. Dieses Maximum existiert, da $\partial_x f$ stetig ist und $\{(\hat{t},\hat{x}) \in D\colon |\hat{t}-t_0|, |\hat{x}-x_0| \le \delta\}$ kompakt ist. Wir wählen also zu $(t_0,x_0) \in D$ die Konstanten $\delta > 0$ und L wie oben. Dann gilt für alle $(t,x),(t,y) \in D$ mit $|t-t_0|, |x-x_0|, |y-x_0| < \delta$, dass $|f(t,x)-f(t,x)| \le L|x-y|$, also f lokal Lipschitz stetig bezüglich x ist.

(b) Da $t^2x^2 + 1 > 0$ für $t,x \in \mathbb{R}$ ist, ist f auf $\mathbb{R}^2$ wohldefiniert und als Komposition stetiger Funktionen stetig. Weiter ist f als Komposition bezüglich x differenzierbarer Funktionen bezüglich x differenzierbar und es gilt, dass

$$\partial_x f(t,x) = \frac{1}{t^2x^2+1} 2t^2x$$

für $t,x \in \mathbb{R}$ stetig ist. Somit ist nach Punkt (a) f lokal Lipschitz stetig auf $\mathbb{R}^2$, also ist Gleichung (1) nach dem Satz von Picard–Lindelöf eindeutig lösbar. □

Aufgabe 2 (Stetige Abhängigkeit von den Anfangswerten)**.** Es seien $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$ ($p \in \mathbb{N}$) offen, $f\colon D \to \mathbb{R}^p$ stetig auf D und Lipschitz stetig auf D bezüglich x mit Lipschitz-Konstante L. Betrachten Sie für $(t_0, x_0), (t_0, y_0) \in D$ die folgenden Anfangswertprobleme

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad u(t_0) = x_0, \tag{2}$$

und

$$v'(t) = f(t, v(t)), \quad v(t_0) = y_0. \tag{3}$$

Zeigen Sie, dass auf dem Schnitt I der beiden Existenzintervalle der Lösungen u von (2) und v von (3) folgende Abschätzung gilt:

$$|u(t) - v(t)| \leq |x_0 - y_0| \mathrm{e}^{L|t-t_0|} \quad (t \in I).$$

Hinweis: Gronwall

Lösungsvorschlag. Aus dem Satz von Picard–Lindelöf folgt, dass Gleichungen (2) und (3) eindeutig lösbar sind mit nicht fortsetzbaren Lösungen u von Gleichung (2) auf I_1 und v von Gleichung (3) auf I_2. Setze $I = I_1 \cap I_2$ und schreibe $I = (a, b)$. Es gilt $t_0 \in I$. Sei $t \in I$ mit $t \geq t_0$. Dann gilt

$$u(t) - v(t) = u(t_0) - v(t_0) + \int_{t_0}^{t} u'(s) - v'(s)\,\mathrm{d}s,$$

wobei $u'(s) - v'(s) = f(s, u(s)) - f(s, v(s))$, also

$$\begin{aligned} |u(t) - v(t)| &\leq |u(t_0) - v(t_0)| + \int_{t_0}^{t} |f(s, u(s)) - f(s, v(s))|\,\mathrm{d}s \\ &\leq |x_0 - y_0| + L \int_{t_0}^{t} |u(s) - v(s)|\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Setze $\varphi\colon [t_0, b) \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(t) = |u(t) - v(t)|$. Dann ist φ stetig auf $[t_0, b)$ und es gilt mit $\alpha = |x_0 - y_0|$ und $\beta = L$

$$\varphi(t) \leq \alpha + \beta \int_{t_0}^{t} \varphi(s)\,\mathrm{d}s$$

für $t \in [t_0, b)$. Mit dem Lemma von Gronwall folgt $\varphi(t) \leq \alpha \mathrm{e}^{\beta(t-t_0)}$, also

$$|u(t) - v(t)| \leq |x_0 - y_0| \mathrm{e}^{L(t-t_0)}$$

für $t \in [t_0, b)$.

Sei nun $t \in (a, t_0]$. Aus

$$u(t_0) - v(t_0) = u(t) - v(t) + \int_{t}^{t_0} u'(s) - v'(s)\,\mathrm{d}s$$

folgt

$$|u(t_0) - v(t_0)| \leq |u(t) - v(t)| + L \int_t^{t_0} |u'(s) - v'(s)| \, \mathrm{d}s.$$

Wieder folgt mit dem Lemma von Gronwall

$$|u(t) - v(t)| \leq |x_0 - y_0| \mathrm{e}^{L(t_0 - t)} = |x_0 - y_0| \mathrm{e}^{L|t - t_0|}.$$

Somit gilt

$$|u(t) - v(t)| \leq |x_0 - y_0| \mathrm{e}^{L|t - t_0|}$$

für alle $t \in I$. □

Aufgabe 3 (Eigenschaften der Lösung eines Anfangswertproblems)**.** Es seien $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(t, x) = 1 + \frac{|x|}{t^2 + 1} \quad ((t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}).$$

Zeigen Sie, dass die nach links und rechts nicht fortsetzbare Lösung u des Anfangswertproblems

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad u(t_0) = x_0$$

auf ganz $\mathbb{R}$ existiert. Zeigen Sie außerdem, dass $u(t) \to \infty$ $(t \to \infty)$ und $u(t) \to -\infty$ $(t \to -\infty)$.

Lösungsvorschlag. Da $t^2 + 1 > 0$ für $t \in \mathbb{R}$, ist f wohldefiniert und stetig auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Weiter ist f dort auch Lipschitz stetig bezüglich x: Seien $t, x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt mit der inversen Dreiecksungleichung

$$|f(t, x) - f(t, y)| = \frac{||x| - |y||}{t^2 + 1} \leq \frac{1}{t^2 + 1} |x - y| \leq |x - y|.$$

Mit Picard–Lindelöf folgt, dass das Anfangswertproblem eindeutig lösbar ist und eine nicht fortsetzbare Lösung u auf (ω_-, ω_+) hat.

Weiter gilt, dass

$$|f(t, x)| = 1 + \frac{|x|}{t^2 + 1} \leq 1 + |x|$$

für $t, x \in \mathbb{R}$. Satz 10.3 mit $\alpha = \beta = 1$ liefert $(\omega_-, \omega_+) = (-\infty, \infty)$.

Wir zeigen nun, dass $u(t) \to \pm\infty$ für $t \to \pm\infty$. Es gilt $f(t, x) = 1 + |x|/(t^2 + 1) \geq 1$ für $t, x \in \mathbb{R}$. Sei $t \geq t_0$. Dann

$$u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^{t} u'(s) \, \mathrm{d}s$$

$$\begin{aligned} &= u(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\,\mathrm{d}s \\ &\geq x_0 + t - t_0 \\ &\to \infty \quad (t \to \infty) \\ \implies u(t) &\to \infty \quad (t \to \infty). \end{aligned}$$

Sei $t \leq t_0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} u(t_0) - u(t) &= \int_{t}^{t_0} u'(s)\,\mathrm{d}s \\ &= \int_{t}^{t_0} f(s, u(s))\,\mathrm{d}s \\ &\geq t_0 - t \\ \iff u(t) &\leq x_0 - t_0 + t \\ &\to -\infty \quad (t \to -\infty). \end{aligned}$$

□

Aufgabe 4 (Das SIS-Modell)**.** Das *SIS-Modell* beschreibt die Ausbreitung einer Infektionskrankheit in einer Population, in der die Individuen nach überstandener Erkrankung keine Immunisierung haben und sich reinfizieren können. Das Modell geht von einer zeitlich konstanten Bevölkerungszahl $N \geq 1$ aus und unterteilt die Bevölkerung in zwei Klassen: $S = S(t)$ (die Infizierbaren, engl.: *Susceptibles*) und $I = I(t)$ (die Infizierenden, engl.: *Infectious*) zum Zeitpunkt $t \geq 0$. Das SIS-Modell beschreibt die zeitliche Entwicklung von I und S durch

$$\begin{aligned} I'(t) &= -\alpha I(t) + \beta I(t)S(t), \quad I(0) = I_0, \\ S'(t) &= \quad \alpha I(t) - \beta I(t)S(t), \quad S(0) = S_0. \end{aligned} \tag{4}$$

Hierbei bezeichnen $\alpha > 0$ die *Heilungsrate*, $\beta > 0$ die *Infektionskontaktrate* sowie $I_0 > 0$ bzw. $S_0 > 0$ die Anzahl der Infizierenden bzw. Infizierbaren zum Startzeitpunkt $t = 0$.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $I_0 > 0$ und $S_0 > 0$ das Anfangswertproblem (4) eindeutig lösbar ist.

(b) Sei $(I, S) \colon (\omega_-, \omega_+) \to \mathbb{R}^2$ die eindeutige nichtfortsetzbare Lösung von (4). Zeigen Sie, dass (u, v) definiert durch $u(t) = \frac{I(\alpha^{-1}t)}{N}$, $v(t) = \frac{S(\alpha^{-1}t)}{N}$ $(t \in (\omega_-, \omega_+))$ folgendes Anfangswertproblem löst:

$$\begin{aligned} u'(t) &= \quad (R-1)u(t) - Ru^2(t), \quad u(0) = u_0, \\ v'(t) &= -(R-1)u(t) + Ru^2(t), \quad v(0) = v_0. \end{aligned} \tag{5}$$

Hierbei ist $R = \frac{N\beta}{\alpha}$ die *Reproduktionsrate* der Infektion und $u_0 = I_0/N$, $v_0 = S_0/N$.

(c) Bestimmen Sie die eindeutige nichtfortsetzbare Lösung (u, v) von (5). Zeigen Sie, dass diese Lösung mindestens auf $[0, \infty)$ definiert ist. Bestimmen Sie weiterhin den Grenzwert $\lim_{t\to\infty}(u(t), v(t))$ in Abhängigkeit von R.

Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle $R \in (0, 1)$, $R = 1$ und $R > 1$ und beachten Sie das Beispiel zur logistischen Gleichung (Seiten 39 – 40 im Skript).

Lösungsvorschlag.

(a) Die eindeutige Lösbarkeit folgt aus dem Satz von Picard–Lindelöf: Definiere

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha x + \beta xy \\ \alpha x - \beta xy \end{pmatrix}.$$

Dann ist f stetig differenzierbar, also nach Aufgabe 1 (a) lokal Lipschitz stetig bezüglich (x, y) auf $\mathbb{R}^2$. Nach Picard–Lindelöf folgt, dass für jedes $(I_0, S_0) \in (0, \infty)^2$ eine eindeutige nicht fortsetzbare Lösung

$$\begin{pmatrix} I \\ S \end{pmatrix} : (\omega_-, \omega_+) \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix} I(t) \\ S(t) \end{pmatrix}$$

existiert.

(b) Es gelten $u(0) = I_0/N$, $v(0) = S_0/N$ und für $t \in J$

$$\begin{aligned} u'(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{I(t/\alpha)}{N}\right) \\ &= \frac{1}{\alpha}\left(\frac{-\alpha I(t/\alpha) + \beta I(t/\alpha)S(t/\alpha)}{N}\right) \\ &= \frac{1}{\alpha}(-\alpha u(t) + \beta u(t)S(t/\alpha)) \\ &= \frac{1}{\alpha}(-\alpha u(t) + \beta N u(t)v(t)) \\ &= \frac{1}{\alpha}(-\alpha u(t) + \beta N u(t)(1 - u(t))) \\ &= -u(t) + \frac{\beta N}{\alpha}u(t) - \frac{\beta N}{\alpha}u^2(t) \\ &= (R - I)u(t) - Ru^2(t) \end{aligned}$$

mit $R = \beta N/\alpha$. Da $u(t) + v(t) = 1$ für alle $t \in J$, gilt $u'(t) + v'(t) = 0$, also

$$v'(t) = -u'(t) = -(R - I)u(t) + Ru^2(t)$$

für $t \in J$. Also löst (u, v) das Anfangswertproblem in Gleichung (5).

(c) Im Folgenden bestimmen wir nur u, da $v = 1-u$. Setze $a = R-1$, $b = R$ und betrachte

$$u'(t) = au(t) - bu^2(t) = f(u(t)), \quad u(0) = u_0,$$

wobei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax - bx^2$.

Fall 1: $R > 1$. (logistische Gleichung, siehe Seiten 39 – 40 im Skript). Dann sind 0 und $a/b = (R-1)/R = 1 = 1 - 1/R$ die stationären Stellen von f. Da $u_0 > 0$ nach Voraussetzung, folgt aus den Seiten 39 – 40, dass

$$u(t) = \begin{cases} \dfrac{au_0}{bu_0 + (a - bu_0)\mathrm{e}^{-at}} & t \in J, \text{falls } u_0 \neq 1 - 1/R, \\ 1 - \dfrac{1}{R} & t \in J, \text{falls } u_0 = 1 - 1/R. \end{cases}$$

Fall 2: $R = 1$. Dann gilt

$$u'(t) = -bu^2(t), \quad t \in J, u(0) = u_0 > 0.$$

Dann ist $u(t) \neq 0$ für alle $t \in J$ (ansonsten wäre $u(t) = 0$ für alle $t \in J$ im Widerspruch zu $u(0) = u_0 > 0$). Durch Trennung der Variablen erhalten wir nun

$$\int_0^t \frac{u'(s)}{u^2(s)}\,\mathrm{d}s = \int_0^t b\,\mathrm{d}s = bt$$

für $t \in J$. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{u'(s)}{-u^2(s)}\,\mathrm{d}s &= \int_{u_0}^{u(t)} -\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{x}\right]_{u_0}^{u(t)} \\ &= \frac{1}{u(t)} - \frac{1}{u_0} \\ \implies \frac{1}{u(t)} - \frac{1}{u_0} &= bt \\ \implies u(t) &= \frac{1}{1/u_0 + bt} \end{aligned}$$

für $t \in J$.

Fall 3: $R \in (0,1)$. Ähnlich wie in Fall 2 erhält man durch Trennung der Variablen

$$u(t) = -\frac{a}{b}\frac{C\mathrm{e}^{at}}{1 - C\mathrm{e}^{at}}$$
$$C = \frac{u_0}{u_0 - a/b}$$

für $t \in J$. Man beachte, dass $-a = 1 - R > 0$ wegen $R \in (0,1)$.

Es folgt $J \supseteq [0, \infty)$ und

$$u(t) \to \begin{cases} 1 - \frac{1}{R} & \text{für } R > 1, \\ 0 & \text{für } R \leq 1, \end{cases}$$
$$v(t) \to \begin{cases} \frac{1}{R} & \text{für } R > 1, \\ 1 & \text{für } R \leq 1 \end{cases}$$

für $t \to \infty$. □