Karlsruher Institut für Technologie

14. Juni 2023
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
Henning Heister

Analysis für das Lehramt
Übungsblatt 07

Aufgabe 1 (Der gedämpfte harmonische Oszillator)**.** In dieser Aufgabe möchten wir die gedämpfte Schwingung eines Federpendels genauer betrachten. Berücksichtigt man neben dem Einfluss der Rückstellkraft ($-Du$, mit der Federkonstanten D) auch die Reibung ($-\mu u'$, für $\mu > 0$), so ergibt sich für die zugehörige Bewegungsgleichung mit Anfangsauslenkung $x_0 \in \mathbb{R}$ und Anfangsgeschwindigkeit 0 das folgende Anfangswertproblem

$$\begin{cases} mu''(t) = -\mu u'(t) - Du(t), \\ \quad u(0) = x_0, \quad u'(0) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

wobei m die Masse des Massepunktes bezeichnet. Bestimmen Sie die Lösung von (1) und bestimmen Sie μ so, dass das Pendel nicht über die Ruhelage hinausschwingt. Den Fall für das kleinste μ, für welches dies erfüllt ist, bezeichnet man als aperiodischen Grenzfall, bei allen weiteren solchen μ spricht man vom Kriechfall.

Aufgabe 2 (Erstes Integral)**.**

(a) Bestimmen Sie für die folgenden Differentialgleichungen jeweils ein (nicht-konstantes) erstes Integral:

  (i) $(u, v)'(t) = (3(v(t))^2 \sinh(u(t)), -(v(t))^3 \cosh(u(t)))$,

  (ii) $(u, v)'(t) = (v(t)u(t)^2 e^{-v(t)} + 4v(t)\sin(v(t)), 2u(t)v(t)e^{-v(t)})$.

  Hinweis: Wählen Sie λ nur abhängig von der zweiten Variablen.

(b) Bestimmen Sie für die folgende Differentialgleichung ein (nicht-konstantes) erstes Integral und folgern Sie, dass jede Lösung beschränkt sein muss und damit auf ganz $\mathbb{R}$ existieren muss: $(u, v)'(t) = (2(u(t)^2 + 1)v(t), -4u(t)^3 - 2u(t)v(t)^2)$.

Aufgabe 3 (Phasendiagramm)**.** Bestimmen Sie für die folgenden Differentialgleichungen jeweils ein (nicht-konstantes) erstes Integral und skizzieren Sie das Phasendiagramm, indem Sie einige Niveaumengen einzeichnen. Schreiben Sie dazu Punkt (b) in ein System erster Ordnung um.

(a) $(u, v)'(t) = (2v(t), u(t)^2 - 1)$,

(b) $u''(t) = u(t) + u(t)^3$.

Aufgabe 4 (Konstantes erstes Integral)**.** Es seien $x_0 \in \mathbb{R}^p$ ($p \in \mathbb{N}$) und das Anfangswertproblem

$$u'(t) = f(u(t)), \quad u(0) = x_0 \tag{2}$$

mit $f \in C^1(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$ gegeben. Weiter habe (2) für jeden Anfangswert $x_0 \in \mathbb{R}^p$ eine nach rechts nicht fortsetzbare Lösung u, welche auf $[0, \infty)$ existiert und $\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$ erfüllt. Zeigen Sie, dass dann kein nicht-konstantes erstes Integral existieren kann.