Karlsruher Institut für Technologie

21. Juni 2023
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
Henning Heister

Analysis für das Lehramt
Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 07

Aufgabe 1 (Der gedämpfte harmonische Oszillator)**.** In dieser Aufgabe möchten wir die gedämpfte Schwingung eines Federpendels genauer betrachten. Berücksichtigt man neben dem Einfluss der Rückstellkraft ($-Du$, mit der Federkonstanten D) auch die Reibung ($-\mu u'$, für $\mu > 0$), so ergibt sich für die zugehörige Bewegungsgleichung mit Anfangsauslenkung $x_0 \in \mathbb{R}$ und Anfangsgeschwindigkeit 0 das folgende Anfangswertproblem

$$\begin{cases} mu''(t) = -\mu u'(t) - Du(t), \\ \quad u(0) = x_0, \quad u'(0) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

wobei m die Masse des Massepunktes bezeichnet. Bestimmen Sie die Lösung von (1) und bestimmen Sie μ so, dass das Pendel nicht über die Ruhelage hinausschwingt. Den Fall für das kleinste μ, für welches dies erfüllt ist, bezeichnet man als aperiodischen Grenzfall, bei allen weiteren solchen μ spricht man vom Kriechfall.

Lösungsvorschlag. Umgeschreiben in ein System erster Ordnung ergibt

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} v(t) \\ -\mu/m v(t) - D/m u(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -D/m & -\mu/m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{2}$$

Es handelt sich um ein homogenes lineares System mit konstanten Koeffizienten. Mithilfe des charakteristischen Polynoms $\lambda^2 + \mu/m\lambda + D/m$ erhalten wir die Eigenwerte $\lambda = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2}$ für $\delta = \mu/(2m)$ und $\omega = \sqrt{D/m}$.

Fall 1: $\delta = \omega$**.** Dann gilt

$$\ker(A - \lambda I) = \operatorname{lin}\begin{pmatrix} 1 \\ -\delta \end{pmatrix} \subseteq \operatorname{lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\delta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \ker(A - \lambda I)^2.$$

Damit folgt, dass

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}(t) = \mathrm{e}^{-\delta t} \begin{pmatrix} 1 \\ -\delta \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}(t) = \mathrm{e}^{-\delta t}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t(A - \lambda I)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{e}^{-\delta t} \begin{pmatrix} t \\ 1 - \delta t \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung in Gleichung (2). Aus den Anfangsbedingungen folgt, dass die Lösung

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x) = x_0 \mathrm{e}^{-\delta t} \begin{pmatrix} 1+\delta t \\ -\delta^2 t \end{pmatrix}$$

lautet. Es gilt $(u, v)(t) \to (0, 0)$ für $t \to \infty$ und u wechselt nicht das Vorzeichen, das heißt, das Pendel schwingt nicht über die Ruhelage hinaus, es »kriecht« in die Ruhelage. Diesen Fall bezeichnet man als aperiodischen Grenzfall.

Fall 2: $\delta > \omega$. A hat die Eigenwerte $\lambda = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2}$. Somit gilt

$$\ker(A - \lambda_1 I) = \operatorname{lin} \begin{pmatrix} \delta - \sqrt{\delta^2 - \omega^2} \\ -\omega^2 \end{pmatrix},$$

$$\ker \operatorname{lin} \begin{pmatrix} \delta + \sqrt{\delta^2 - \omega^2} \\ -\omega^2 \end{pmatrix}.$$

Aus den Anfangsbedingungen folgt, dass die Lösung

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(t) = \frac{x_0}{2\sqrt{\delta^2 - \omega^2}} \mathrm{e}^{-\delta t} \left(-\mathrm{e}^{-\sqrt{\delta^2-\omega^2}t} \begin{pmatrix} \delta - \sqrt{\delta^2 - \omega^2} \\ -\omega^2 \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{\sqrt{\delta^2-\omega^2}t} \begin{pmatrix} \delta + \sqrt{\delta^2 - \omega^2} \\ -\omega^2 \end{pmatrix} \right)$$

ist. Also setzt sich u aus zwei Funktionen zusammen, die beide monoton gegen 0 gehen (die eine ist positiv, die andere negativ), das heißt, u schwingt nicht über die Ruhelage hinaus (Kriechfall).

Fall 3: $\delta < \omega$. Die Eigenwerte $\lambda = -\delta \pm \mathrm{i}\sqrt{\omega^2 - \delta^2}$ ergeben (da sie komplex konjugiert zueinander sind)

$$\ker(A - \lambda_1 I) = \operatorname{lin} \begin{pmatrix} \delta - \mathrm{i}\sqrt{\omega^2 - \delta^2} \\ -\omega^2 \end{pmatrix},$$

also mit den Anfangsbedingungen

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = -\frac{x_0}{\sqrt{\omega^2 - \delta^2}} \mathrm{e}^{-\delta t} \begin{pmatrix} -\sqrt{\omega^2 - \delta^2} \cos(\sqrt{\omega^2 - \delta^2}t) - \delta \sin(\sqrt{\omega^2 - \delta^2}t) \\ \omega^2 \sin(\sqrt{\omega^2 - \delta^2}t) \end{pmatrix}.$$

Der Term $\mathrm{e}^{-\delta t}$ sorgt also dafür, dass u gegen 0 geht für $t \to \infty$, also das Pendel gegen die Ruhelage strebt, aber es schwingt unendlich oft über die Ruhelage hinaus (Schwingfall). □

Aufgabe 2 (Erstes Integral)**.**

(a) Bestimmen Sie für die folgenden Differentialgleichungen jeweils ein (nicht-konstantes) erstes Integral:

(i) $(u,v)'(t) = (3(v(t))^2 \sinh(u(t)), -(v(t))^3 \cosh(u(t)))$,

(ii) $(u,v)'(t) = (v(t)u(t)^2 e^{-v(t)} + 4v(t)\sin(v(t)), 2u(t)v(t)e^{-v(t)})$.

Hinweis: Wählen Sie λ nur abhängig von der zweiten Variablen.

(b) Bestimmen Sie für die folgende Differentialgleichung ein (nicht-konstantes) erstes Integral und folgern Sie, dass jede Lösung beschränkt sein muss und damit auf ganz $\mathbb{R}$ existieren muss: $(u,v)'(t) = (2(u(t)^2+1)v(t), -4u(t)^3 - 2u(t)v(t)^2)$.

Lösungsvorschlag.

(a) (i) Setze

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} g(x,y) \\ h(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y^2 \sinh x \\ -y^3 \cosh x \end{pmatrix}.$$

Wir bestimmen H. Es muss die Integrabilitätsbedingung

$$\partial_x(\lambda g)(x,y) = -\partial_y(\lambda h)(x,y) \tag{3}$$

für $x, y \in \mathbb{R}$ gelten mit einer zu bestimmenden Funktion $\lambda\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Es gilt

$$\begin{aligned} \partial_x g(x,y) &= 3y^2 \cosh x \\ -\partial_y h(x,y) &= -\big(-3y^2 \cosh x\big) = 3y^2 \cosh x, \end{aligned}$$

also

$$\partial_x g(x,y) = -\partial_y h(x,y)$$

für $x, y \in \mathbb{R}^2$. Mit $\lambda = 1$ ist Gleichung (3) erfüllt. Somit gilt

$$H'(x,y) = \begin{pmatrix} y^3 \cosh x \\ 3y^2 \sinh x \end{pmatrix}$$

für $x, y \in \mathbb{R}^2$. Integration der ersten Komponente bezüglich x liefert für jedes feste $y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} H(x,y) &= \int H_x(x,y)\,\mathrm{d}x + c_1(y) \\ &= \int y^3 \cosh x\,\mathrm{d}x + c_1(y) \\ &= y^3 \sinh x + c_1(y) \end{aligned}$$

und analog durch Integration der zweiten Komponente bezüglich y für jedes feste $x \in \mathbb{R}$

$$H(x,y) = y^3 \sinh x + c_2(x).$$

Es muss also

$$\begin{aligned} y^3 \sinh x + c_1(y) &= y^3 \sinh x + c_1(x) \\ \iff c_1(y) &= c_2(x) \\ \iff c_1 &= c_2 = c \end{aligned}$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Wir erhalten also $H(x,y) = y^2 \sinh x + c$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ und alle $x, y \in \mathbb{R}$. Wir wählen $c = 0$. (Dies können wir, da erste Integrale bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt sind.) Also erhalten wir das erste Integral

$$H(x,y) = y^3 \sinh x$$

für $x, y \in \mathbb{R}$.

(ii) Wir gehen analog vor wie zuvor. Die Integrabilitätsbedingung ergibt mit $\lambda(x,y) = \lambda(y)$

$$\begin{aligned} &\lambda(y) 2xy\mathrm{e}^{-y} = \lambda'(y)(-2xy\mathrm{e}^{-y}) + \lambda(y)(-2x\mathrm{e}^{-y} + 2xy\mathrm{e}^{-y}) \\ \iff &\lambda'(y)xy = -\lambda(y)x. \end{aligned}$$

Ist $x = 0$, ist die obige Gleichung trivialerweise erfüllt, andernfalls können wir durch x teilen und erhalten für $y \neq 0$ die Gleichung $\lambda'(y) = -\lambda(y)/y$. Durch Trennung der Variablen erhalten wir $\lambda(y) = 1/y$. Wie zuvor erhalten wir $H(x,y) = -x^2\mathrm{e}^{-y} + c_1(y) = -x^2\mathrm{e}^{-y} - 4\cos y + c_2(x)$. Wie oben folgern wir $H(x,y) = -x^2\mathrm{e}^{-y} - 4\cos y$ für $x, y \in \mathbb{R}$. Eine Probe bestätigt, dass H tatsächlich ein erstes Integral ist.

(b) Wie in der vorigen Teilaufgabe erhalten wir $H(x,y) = x^4 + (1+x^2)y^2$. Ist $(u,v) : I \to \mathbb{R}^2$ eine nicht fortsetzbare Lösung der Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}'(t) = \begin{pmatrix} 2(u(t)^2 + 1)v(t) \\ -4u(t)^3 - 2u(t)v(t)^2 \end{pmatrix},$$

so muss also $H \circ (u,v)$ konstant sein, das heißt, es muss eine Konstante $c \geq 0$ geben mit

$$H\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = u(t)^4 + \big(1 + u^2(t)\big)v(t)^2 = c$$

für alle $t \in I$ und damit

$$\begin{aligned} v(t)^2 \leq \big(1 + u^2(t)\big)v(t)^2 \leq H\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = c, \\ u(t)^4 \leq u(t)^4 + \big(1 + u^2(t)\big)v(t)^2 = c, \end{aligned}$$

also

$$\left\|\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(t)\right\|^2 = u^2(t) + v^2(t) \leq \sqrt{c} + c$$

für alle $t \in I$, also

$$\left\|\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(t)\right\| \leq \sqrt{\sqrt{c} + c}$$

für alle $t \in I$. Also ist (u, v) beschränkt und es folgt aus Bemerkung 3 auf Seite 36, dass $I = \mathbb{R}$, denn für das maximale Existenzintervall $I = (\omega_-, \omega_+)$ gilt stets

$$\begin{aligned} \omega_+ < \infty &\implies \lim_{t \uparrow \omega_+} \|u(t)\| = \infty \\ \omega_- > -\infty &\implies \lim_{t \downarrow \omega_-} \|u(t)\| = \infty. \end{aligned}$$

□

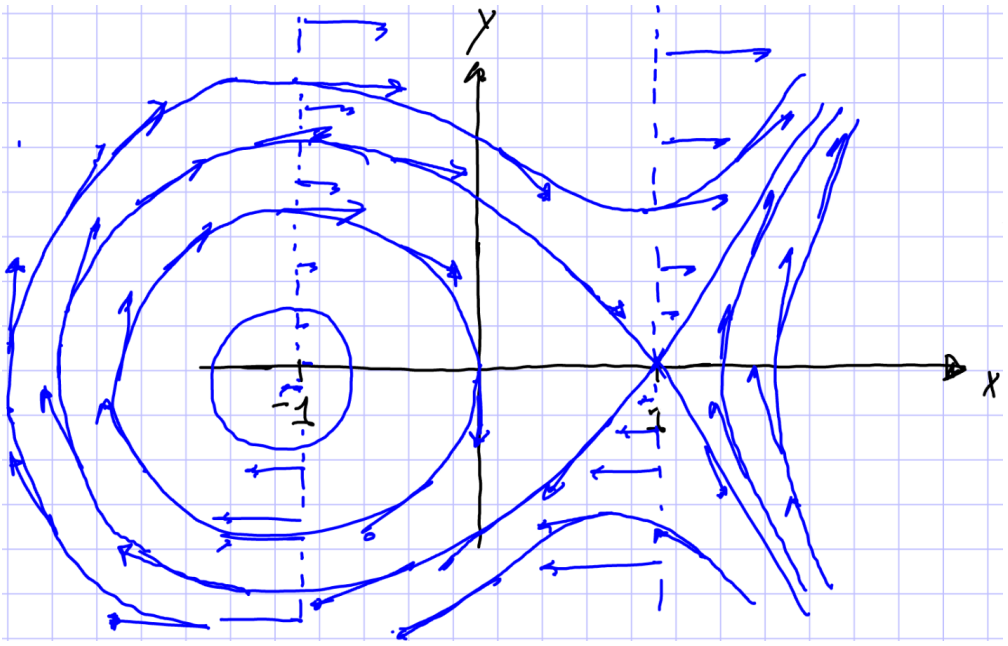
Aufgabe 3 (Phasendiagramm)**.** Bestimmen Sie für die folgenden Differentialgleichungen jeweils ein (nicht-konstantes) erstes Integral und skizzieren Sie das Phasendiagramm, indem Sie einige Niveaumengen einzeichnen. Schreiben Sie dazu Punkt (b) in ein System erster Ordnung um.

(a) $(u, v)'(t) = (2v(t), u(t)^2 - 1)$,

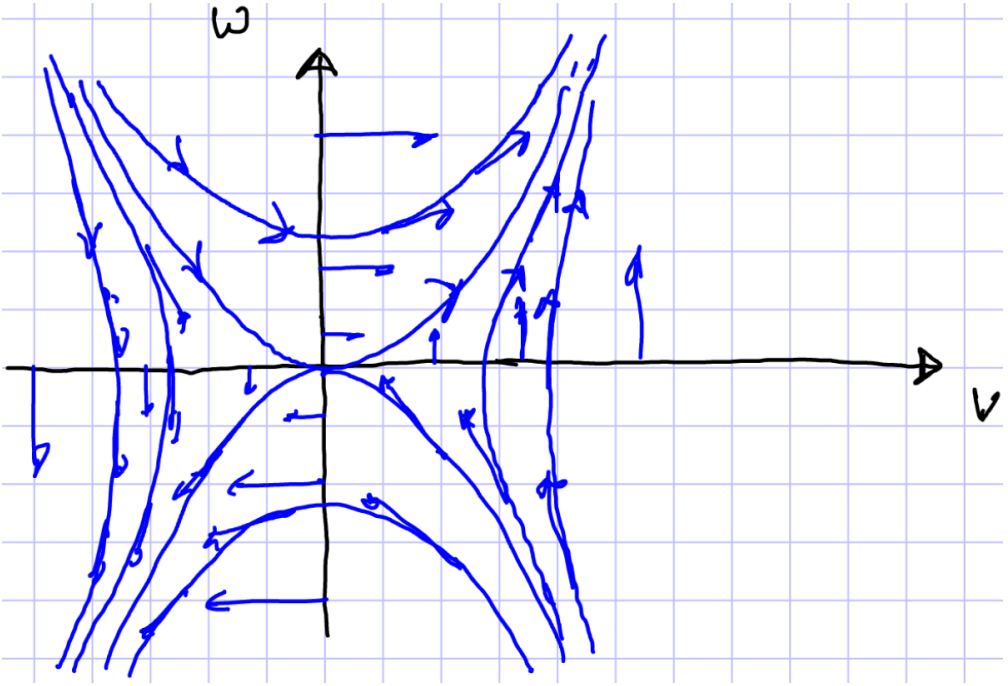
(b) $u''(t) = u(t) + u(t)^3$.

Lösungsvorschlag.

(a) Wie in der vorherigen Aufgabe erhalten wir das erste Integral $H(x, y) = -1/3x^3 + x + y^2$ für $x, y \in \mathbb{R}^2$. Für eine Lösung $(u, v) : I \to \mathbb{R}^2$ der Differentialgleichung gilt $H(u(t), v(t)) = c$ für $t \in I$. Diese Gleichung lässt sich lokal um $(x_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ nach x beziehungsweise y auflösen, falls $H'(x_0, y_0) \neq (0, 0)$. Dies ist für $(x_0, y_0) \neq (\pm 1, 0)$ der Fall. $H(x, y) = c$ ergibt $y = \pm\sqrt{c + 1/3x^3 - x}$.



(b) Wie in der vorherigen Aufgabe erhalten wir das erste Integral $H(x, y) = -1/2x^2 - 1/4x^4 + 1/2y^2$ für $x, y \in \mathbb{R}^2$. Da die Ableitung von H außerhalb von 0 nicht 0 ist, lässt sich H dort nach x beziehungsweise y auflösen.



□

Aufgabe 4 (Konstantes erstes Integral)**.** Es seien $x_0 \in \mathbb{R}^p$ ($p \in \mathbb{N}$) und das Anfangswertproblem

$$u'(t) = f(u(t)), \quad u(0) = x_0 \tag{4}$$

mit $f \in C^1(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$ gegeben. Weiter habe (4) für jeden Anfangswert $x_0 \in \mathbb{R}^p$ eine nach rechts nicht fortsetzbare Lösung u, welche auf $[0, \infty)$ existiert und $\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$ erfüllt. Zeigen Sie, dass dann kein nicht-konstantes erstes Integral existieren kann.

Lösungsvorschlag. Sei $H\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ ein erstes Integral der Differentialgleichung in Gleichung (4). Für $x_0 \in \mathbb{R}^p$ bezeichne $u\colon I = (\omega_-, \omega_+) \to \mathbb{R}^p$ die eindeutige, nicht fortsetzbare Lösung der Differentialgleichung. Dann muss $H \circ u$ konstant sein, das heißt, $H(x_0) = H(u(0)) = H(u(t))$ für alle $t \in I$. Da nach Voraussetzung $I \supseteq [0, \infty)$, sehen wir mit der anderen Voraussetzung sowie der Stetigkeit von H

$$H(x_0) = H(u(t)) \to H(0)$$

für $t \to \infty$, also $H(x_0) = H(0)$. Da $x_0 \in \mathbb{R}^p$ beliebig gewählt war, folgt $H(x_0) = H(0)$für alle $x_0 \in \mathbb{R}^p$, also ist H konstant. □