Karlsruher Institut für Technologie

21. Juni 2023
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
Henning Heister

Analysis für das Lehramt
Übungsblatt 08

Aufgabe 1 (Stabilität bei linearen Systemen)**.** Es seien $x_0 \in \mathbb{R}^2$ und die zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$u'(t) = Au(t), \quad u(0) = x_0,$$

indem Sie e^{tA} ($t \in \mathbb{R}$) berechnen und folgern Sie, dass die stationäre Stelle 0 der Differentialgleichung stabil ist.

(b) Zeigen Sie, dass die stationäre Stelle 0 der Differentialgleichung

$$u'(t) = Bu(t)$$

instabil ist.

Aufgabe 2 (Stationäre Lösungen)**.** Berechnen Sie die stationären Stellen der folgenden Differentialgleichungssysteme und untersuchen Sie diese auf asymptotische Stabilität beziehungsweise Instabilität.

(a) $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}'(t) = \begin{pmatrix} -u(t) - v(t) - (u(t)^2 + v(t)^2) \\ u(t) - v(t) + (u(t)^2 + v(t)^2) \end{pmatrix}$,

(b) $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}'(t) = \begin{pmatrix} u(t) + v(t) + 2 \\ -u(t)^2 + v(t) + 4 \end{pmatrix}$ und

(c) $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}'(t) = \begin{pmatrix} 2u(t)(v(t) - u(t)) \\ v(t)(3v(t) - 4u(t)) \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3 (Stabilität)**.**

(a) Es seien $r > 0$ und $f \in C^1(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$ ($p \in \mathbb{N}$) mit $(f(x), x) \leq 0$ ($x \in B(0, r)$). Zeigen Sie, dass 0 eine stationäre Stelle der Differentialgleichung

$$u'(t) = f(u(t))$$

ist und zeigen Sie, dass diese stabil ist.

(b) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x, y) = (3xy^3 - x^3, -3x^2y^2 - 5y)$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass die stationäre Stelle 0 der Differentialgleichung

$$u'(t) = f(u(t))$$

stabil ist.