Karlsruher Institut für Technologie

28. Juni 2023
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
Henning Heister

Analysis für das Lehramt
Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 08

Aufgabe 1 (Stabilität bei linearen Systemen)**.** Es seien $x_0 \in \mathbb{R}^2$ und die zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$u'(t) = Au(t), \quad u(0) = x_0,$$

indem Sie e^{tA} ($t \in \mathbb{R}$) berechnen und folgern Sie, dass die stationäre Stelle 0 der Differentialgleichung stabil ist.

(b) Zeigen Sie, dass die stationäre Stelle 0 der Differentialgleichung

$$u'(t) = Bu(t)$$

instabil ist.

Lösungsvorschlag.

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -I, \\ A^3 &= A^2A = (-I)A = -A, \\ A^4 &= I. \end{aligned}$$

Man zeigt per Induktion, dass $A^{2k} = (-1)^k I$ und $A^{2k+1} = (-1)^k A$ für $k \in \mathbb{N}_0$. Für $t \in \mathbb{R}$ gilt nun

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{tA} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}(-1)^k I}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}(-1)^k A}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2k} t^{2k}}{(2k)!} I + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} A \end{aligned}$$

$$= \cos t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin t \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Die Funktion $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \mathrm{e}^{tA}x_0$ ist die eindeutige nicht fortsetzbare Lösung des Anfangswertproblems.

Wir zeigen nun zunächst, dass für jedes $t \in \mathbb{R}$ die Matrix e^{tA} orthogonal ist, also $\|\mathrm{e}^{tA}x\| = \|x\|$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$. Seien $t \in \mathbb{R}$ und $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{tA}x &= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= x_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \\ &= x_1\omega_1 + x_2\omega_2. \end{aligned}$$

Da $\omega_1 \perp \omega_2$ und $\|\omega_1\| = \|\omega_2\| = 1$, folgt aus dem Satz des Pythagoras

$$\begin{aligned} \left\|\mathrm{e}^{tA}x\right\|^2 &= \|x_1\omega_1 + x_2\omega_2\| \\ &= x_1^2\|\omega_1\|^2 + x_2^2\|\omega_2\|^2 \\ &= x_1^2 + x_2^2 \\ &= \|x\|^2. \end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass die stationäre Stelle 0 stabil ist. Es sei dazu $x_1 = 0$ die stationäre Stelle des Anfangswertproblems und sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen $\delta = \varepsilon > 0$. Ist nun v die nach rechts nicht fortsetzbare Lösung des Anfangswertproblems mit $x_0 \in B(0, \delta)$, so gilt $\omega_+ = \infty$ und $u(t) = \mathrm{e}^{tA}x_0$ für $t \geq 0$ und

$$\begin{aligned} \|u(t) - x_1\| &= \|u(t)\| \\ &= \left\|\mathrm{e}^{tA}x_0\right\| \\ &= \|x_0\| \\ &< \delta = \varepsilon \end{aligned}$$

für $t \geq 0$, also ist x_1 stabil.

(b) Es sei

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

und für $x_1 \in \mathbb{R}^2$ betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u'(t) &= Bu(t) \\ u(0) &= x_1. \end{aligned}$$

Wir berechnen nun e^{tB} für $t \in \mathbb{R}$. Es ist B nilpotent, denn es gilt $B^k = 0$ für alle $k \geq 2$. Also folgt für $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} e^{tB} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tB)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{1} \frac{(tB)^k}{k!} \\ &= 1 + tB \\ &= \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit ist $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto e^{tB}x_1$ die nicht fortsetzbare Lösung des Anfangswertproblems. Für jedes $\delta > 0$ gilt für $x_1 = (0, \delta/2) \in B(0, \delta)$ und für die nicht fortsetzbare Lösung u des Anfangswertproblems gilt dann

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{tB}x_1 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \delta/2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\delta}{2} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für $t \in \mathbb{R}$, also

$$\begin{aligned} \|ut\| &= \frac{\delta}{2} \left\| \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \\ &= \frac{\delta}{2} \sqrt{1 + t^2} \\ &\geq \frac{\delta}{0} |t| \\ &\to \infty \end{aligned}$$

für $t \to \infty$, also ist 0 instabil. □

Bemerkung: In beiden Teilaufgaben haben die Eigenwerte der Matrizen jeweils den Realteil 0.

Aufgabe 2 (Stationäre Lösungen)**.** Berechnen Sie die stationären Stellen der folgenden Differentialgleichungssysteme und untersuchen Sie diese auf asymptotische Stabilität beziehungsweise Instabilität.

(a) $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' (t) = \begin{pmatrix} -u(t) - v(t) - (u(t)^2 + v(t)^2) \\ u(t) - v(t) + (u(t)^2 + v(t)^2) \end{pmatrix}$,

(b) $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' (t) = \begin{pmatrix} u(t) + v(t) + 2 \\ -u(t)^2 + v(t) + 4 \end{pmatrix}$ und

(c) $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' (t) = \begin{pmatrix} 2u(t)(v(t) - u(t)) \\ v(t)(3v(t) - 4u(t)) \end{pmatrix}$.

Lösungsvorschlag.

(a) Wir definieren $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} -x - y - (x^2 + y^2) \\ x - y + (x^2 + y^2) \end{pmatrix}.$$

Dann wird obige Differentialgleichung zu

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' (t) f(u(t), v(t)).$$

Die stationären Stellen der Differentialgleichung sind die Nullstellen von f. Ist $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ eine Nullstelle von f, so gilt

$$\begin{aligned} & f(x, y) = 0 \\ \iff & -x - y - \left(x^2 + y^2\right) = 0 \wedge x - y + \left(x^2 + y^2\right) = 0 \\ \implies & -2y = 0 \\ \iff & y = 0. \end{aligned}$$

Hieraus wiederum folgt

$$\begin{aligned} & x + x^2 = x(x + 1) = 0 \\ \iff & x = 0 \vee x = -1, \end{aligned}$$

also $(x, y) \in \{(-1, 0), (0, 0)\}$. Umgekehrt folgt, dass $f(-1, 0) = f(0, 0) = 0$. Somit sind $(0, 0)$ und $(-1, 0)$ die stationären Stellen von f.

Es gilt $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ mit

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} -1 - 2x & -1 - 2y \\ 1 + 2x & -1 + 2y \end{pmatrix}.$$

Setze

$$A = f'(0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

und

$$B = f'(-1,0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $\sigma(A) = \{-1+\mathrm{i}, -1-\mathrm{i}\}$, also haben alle Eigenwerte von A negativen Realteil, also ist $(0,0)$ nach Satz 13.1 asymptotisch stabil. Da $\sigma(B) = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$, ist $(-1,0)$ nach Satz 13.3 instabil.

(b) Analog wie zuvor erhalten wir die stationären Stellen $(-2,0), (1,-3)$, wobei beide instabil sind.

(c) Hier ist $(0,0)$ die einzige stationäre Stelle. Da 0 der einzige Eigenwert der Ableitung der rechten Seite ist und daher die Sätze der Vorlesung nicht anwendbar sind, gehen wir anders vor. Stattdessen rechnen wir ein paar Lösungen mit $u = 0$ auszurechnen. Aus $u = 0$ wird die Differentialgleichung zu

$$v'(t) = 3v^2(t), v(0) = x_0,$$

für einen Anfangswert $x_0 \in \mathbb{R}$. Mit Trennung der Variablen findet man für $x_0 \neq 0$ die nicht fortsetzbare Lösung

$$v(t) = \frac{x_0}{1 - 3tx_0}$$

für $t \in (\omega_-, \omega_+)$. Für $x_0 > 0$ gilt $1 - 3tx_0 > 0$, also $t < 1/(3x_0)$, also $\omega_+ = 1/(3x_0)$. In jeder Umgebung der 0 existieren also Lösungen des Anfangswertproblems

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}'(t) = f(u(t), v(t)), \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

für $x_1 = 0$ und $y_1 = \delta/2$ mit $\delta > 0$, welche nicht für alle $t \geq 0$ definiert sind. Somit ist $(0,0)$ instabil. □

Aufgabe 3 (Stabilität)**.**

(a) Es seien $r > 0$ und $f \in C^1(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$ $(p \in \mathbb{N})$ mit $(f(x), x) \leq 0$ $(x \in B(0,r))$. Zeigen Sie, dass 0 eine stationäre Stelle der Differentialgleichung

$$u'(t) = f(u(t))$$

ist und zeigen Sie, dass diese stabil ist.

(b) Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x,y) = (3xy^3 - x^3, -3x^2y^2 - 5y)$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass die stationäre Stelle 0 der Differentialgleichung

$$u'(t) = f(u(t))$$

stabil ist.

Lösungsvorschlag.

(a) Wir zeigen zunächst, dass 0 eine stationäre Stelle der obigen Differentialgleichung ist, das heißt, wir zeigen, dass $f(0) = 0$. Hierzu sei $e_1, \dots, e_p$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^p$. Wir fixieren $j \in \{1, \dots, p\}$ und definieren $x_n = e_j/n$ und $y_n = -x_n = -e_j/n$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\big(f(x_1) \,\big|\, e_j\big) = n(f(x_n) \,|\, x_n) \leq 0$$

und

$$\big(f(y_n) \,\big|\, e_j\big) = -n(f(y_n) \,|\, y_n) \geq 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $\|x_n\|, \|y_n\| < r$, also für alle $n > 1/r$. Da $x_n, y_n \to 0$ für $n \to \infty$ und f stetig in 0 ist, folgt

$$\big(f(0) \,\big|\, e_j\big) = \lim_{n\to\infty} \big(f(x_n) \,\big|\, e_j\big) \leq 0$$

und

$$\big(f(0) \,\big|\, e_j\big) = \lim_{n\to\infty} \big(f(y_n) \,\big|\, e_j\big) \geq 0,$$

also

$$\big(f(0) \,\big|\, e_j\big) = 0.$$

Da j beliebig gewählt war, gilt $(f(0) \mid e_j) = 0$ für alle j, also $f(0) = 0$. Somit ist 0 eine stationäre Stelle der Differentialgleichung.

Es sei $u\colon [0, \omega_+) \to \mathbb{R}^p$ die nach rechts nicht fortsetzbare Lösung des Anfangswertproblems

$$u'(t) = f(u(t))$$
$$u(0) = x_0$$

mit $x_0 \in B(0, r)$ und $t \in [0, \omega_+)$ sowie $\varphi\colon [0, \omega_+) \to \mathbb{R},\ t \mapsto \|u(t)\|^2$. Dann gilt $\|u(t)\| < r$ also $\varphi'(t) \leq 0$: Ist $\|u(t)\| < r$, so gilt

$$\varphi'(t) = 2(u'(t) \,|\, u(t)) = 2(f(u(t)) \,|\, u(t)) \leq 0.$$

Nun zeigen wir, dass 0 ein stabiler Punkt ist. Sei hierzu $\varepsilon \in (0, r)$. Setze $\delta = \varepsilon/2 > 0$. Sei $u\colon [0, \omega_+) \to \mathbb{R}^p$ die nach rechts nicht fortsetzbare Lösung des obigen Anfangswertproblems mit $x_0 \in B(0, \delta)$. Dann gilt $\|u(t)\| < \varepsilon$ für alle $t \in [0, \omega_+)$: Wir zeigen dies per Widerspruch. Angenommen, die Gleichung gälte nicht. Dann wäre $M = \{t \in [0, \omega_+)\colon \|u(t)\| \geq \varepsilon\} \neq \varnothing$. Da $\|u(0)\| = \|x_0\| < \delta = \varepsilon/2 < \varepsilon$, liegt $0 \notin M$, womit $t_* = \inf M > 0$ wohldefiniert ist. ($t_* > 0$ folgt aus der Stetigkeit von u in 0.) Da u

stetig in t_* ist, folgt $\|u(t_*)\| \geq \varepsilon$ und aus der Definition von t_* folgt, dass jeweils für alle $t \in [0, t_*)$

$$\begin{aligned}
&\|u(t)\| < \varepsilon < r \\
\implies &\varphi'(t) \leq 0 \\
\implies &\varphi \text{ fallend auf } [0, t_*) \\
\implies &\|u(t)\| \leq \|u(0)\| \leq \|x_0\| < \delta = \varepsilon/2 \\
\implies &\varepsilon \leq u(t_*) = \lim_{t \uparrow t_*} \|u(t)\| \leq \varepsilon/2 \\
\implies &\|u(t)\| \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt insbesondere, dass $\omega_+ = \infty$ und damit, dass

$$\|x_0\| < \delta \implies \omega_+ = \infty, \|u(t) - 0\| = \|u(t)\| < \varepsilon$$

für alle $t \geq 0$, also ist 0 stabil.

(b) Es ist $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ und für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
(f(x,y) \mid (x,y)) &= \left(\begin{pmatrix} 3xy^3 - x^3 \\ -3x^2y^2 - 5y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \\
&= \left(3x^2y^3 - x^4\right) + \left(-3x^2y^3 - 5y^2\right) \\
&= -x^4 - 5y^2 \\
&\leq 0,
\end{aligned}$$

also ist 0 nach Punkt (a) eine stabile stationäre Stelle. □