Karlsruher Institut für Technologie

28. Juni 2023
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
Henning Heister

Analysis für das Lehramt
Übungsblatt 09

Aufgabe 1 (Lyapunov-Funktionen)**.** Es sei die folgende Differentialgleichung gegeben:

$$(u,v)'(t) = (-v(t) - u(t)^3, u(t) - v(t)^3).$$

Zeigen Sie, dass 0 die einzige stationäre Stelle der Differentialgleichung ist und untersuchen Sie diese auf Stabilität.
Hinweis: Weisen Sie mit einer geeigneten Lyapunov-Funktion nach, dass die stationäre Stelle 0 asymptotisch stabil ist.

Aufgabe 2 (Stationäre Lösungen und Stabilität)**.** Betrachten Sie das gedämpfte mathematische Pendel. Dazu seien $\omega > 0$ und $a \geq 0$. Die entsprechende Bewegungsgleichung als System erster Ordnung ist gegeben durch

$$(u,v)'(t) = (v(t), -av(t) - \omega^2 \sin(u(t))). \tag{1}$$

(a) Bestimmen Sie alle stationären Stellen dieser Differentialgleichung.

(b) Die Funktion $V(u,v) = \frac{1}{2}v^2 + \omega^2(1-\cos(u))$ ist ein erstes Integral für das ungedämpfte Pendel. Zeigen Sie, dass V eine Lyapunov-Funktion zu (1) in den stationären Stellen $(2k\pi, 0)$ ($k \in \mathbb{Z}$) ist und dass diese somit stabil sind. Warum ist V in den anderen stationären Stellen keine Lyapunov-Funktion zu (1)?

Aufgabe 3 (Lyapunov-Funktionen und Stabilität)**.** Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\begin{cases} u'(t) = 4v(t)(w(t)-1), \\ v'(t) = -u(t)(w(t)-1), \\ w'(t) = -w^3(t)\big(u(t)^2 + v(t)^2 + 1\big). \end{cases} \tag{2}$$

Ferner sei $x_0 = (0,0,0) \in \mathbb{R}^3$.

(a) Finden Sie eine so eine stetig differenzierbare Funktion $f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, dass (2) sich in der Form $(u,v,w)'(t) = f(u(t), v(t), w(t))$ schreiben lässt und bestimmen Sie $\sigma(f'(x_0))$. Ist Satz 13.1 anwendbar?

(b) Zeigen Sie mithilfe einer geeigneten Lyapunov-Funktion V, dass x_0 stabil ist.

Hinweis: Setzen Sie $V(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2$ mit geeigneten Parametern $a,b,c > 0$ an.

(c) Zeigen Sie, dass x_0 nicht asymptotisch stabil ist.

Hinweis: Finden Sie Lösungen (u,v,w) von (2) mit $w \equiv 0$.