Karlsruher Institut für Technologie

05. Juli 2023
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
Henning Heister

Analysis für das Lehramt
Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 09

Aufgabe 1 (Lyapunov-Funktionen)**.** Es sei die folgende Differentialgleichung gegeben:

$$(u,v)'(t) = (-v(t) - u(t)^3, u(t) - v(t)^3).$$

Zeigen Sie, dass 0 die einzige stationäre Stelle der Differentialgleichung ist und untersuchen Sie diese auf Stabilität.
Hinweis: Weisen Sie mit einer geeigneten Lyapunov-Funktion nach, dass die stationäre Stelle o asymptotisch stabil ist.

Lösungsvorschlag. Setze

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} -y - x^3 \\ x - y^3 \end{pmatrix}.$$

Dann geht die Differentialgleichung in $(u,v)'(t) = f(u(t), v(t))$ über. Der Punkt $(0,0)$ ist die einzige Nullstelle von f. Da

$$A = f'(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

ist $\sigma(A) = \{\mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$ und somit sind die Sätze 13.1 und 13.3 nicht anwendbar.

Stattdessen definieren wir die Lyapunov-Funktion $V\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto x^2 + y^2$. Dann gilt $V \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ sowie $V(0,0) = 0$ und $V(x,y) > 0$ für alle $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ferner gilt

$$\begin{aligned}(V'(x,y) \mid f(x,y)) &= \left(\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -y - x^3 \\ x - y^3 \end{pmatrix} \right) \\ &= -2xy - 2x^4 + 2yx - 2y^4 \\ &= -2\left(x^4 + y^4\right) \\ &= \begin{cases} \leq 0 & x, y \in \mathbb{R}, \\ < 0 & x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{cases}\end{aligned}$$

Somit ist V eine (strikte) Lyapunov-Funktion zur Differentialgleichung in $(0,0)$, also ist $(0,0)$ nach Satz 14.1 asymptotisch stabil. □

Aufgabe 2 (Stationäre Lösungen und Stabilität)**.** Betrachten Sie das gedämpfte mathematische Pendel. Dazu seien $\omega > 0$ und $a \geq 0$. Die entsprechende Bewegungsgleichung als System erster Ordnung ist gegeben durch

$$(u,v)'(t) = (v(t), -av(t) - \omega^2 \sin(u(t))). \tag{1}$$

(a) Bestimmen Sie alle stationären Stellen dieser Differentialgleichung.

(b) Die Funktion $V(u,v) = \frac{1}{2}v^2 + \omega^2(1-\cos(u))$ ist ein erstes Integral für das ungedämpfte Pendel. Zeigen Sie, dass V eine Lyapunov-Funktion zu (1) in den stationären Stellen $(2k\pi, 0)$ ($k \in \mathbb{Z}$) ist und dass diese somit stabil sind. Warum ist V in den anderen stationären Stellen keine Lyapunov-Funktion zu (1)?

Lösungsvorschlag. Durch eine Transformation in ein System erster Ordnung erhalten wir

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' (t) = \begin{pmatrix} v(t) \\ -av(t) + \omega^2 \sin u(t) \end{pmatrix}.$$

(a) Wir setzen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} y \\ -ay - \omega^2 \sin x \end{pmatrix}$$

und erhalten als stationäre Stellen aus $f(x,y) = 0$ die Stellen $(k\pi, 0)$ für $k \in \mathbb{Z}$.

(b) Es gilt $V \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Zudem gilt für $k \in \mathbb{Z}$

$$V(2k\pi, 0) = 0 + \omega^2(1 - \cos(2k\pi)) = 0,$$

und

$$V((2k+1)\pi, 0) = 2\omega^2 > 0,$$

also kann V für die stationären Stellen $((2k+1)\pi, 0)$ keine Lyapunov-Funktion sein. Im Folgenden betrachten wir nur die stationären Stellen $(2k\pi, 0)$. Es gilt

$$V(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + \omega^2(1 - \cos x) > 0$$

für $(x,y) \in B((2k\pi, 0), r) \setminus \{(2k\pi, 0)\}$, wobei die Umgebung jeweils so gewählt sei, dass die weiteren stationären Stellen nicht darin liegen.

Ferner gilt

$$V'(x,y) = \begin{pmatrix} \omega^2 \sin x \\ y \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{aligned} (V'(x,y) \mid f(x,y)) &= \left(\begin{pmatrix} \omega^2 \sin x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y \\ -ay - \omega^2 \sin x \end{pmatrix} \right) \\ &= -ay^2 \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

für $x, y \in \mathbb{R}$. Somit ist V eine Lyapunov-Funktion des Systems in den Punkten $(2k\pi, 0)$ für $k \in \mathbb{Z}$. Nach Satz 14.1 sind diese stationären Stellen stabil. □

Aufgabe 3 (Lyapunov-Funktionen und Stabilität)**.** Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\begin{cases} u'(t) = 4v(t)(w(t)-1), \\ v'(t) = -u(t)(w(t)-1), \\ w'(t) = -w^3(t)\big(u(t)^2 + v(t)^2 + 1\big). \end{cases} \tag{2}$$

Ferner sei $x_0 = (0,0,0) \in \mathbb{R}^3$.

(a) Finden Sie eine so eine stetig differenzierbare Funktion $f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, dass (2) sich in der Form $(u,v,w)'(t) = f(u(t), v(t), w(t))$ schreiben lässt und bestimmen Sie $\sigma(f'(x_0))$. Ist Satz 13.1 anwendbar?

(b) Zeigen Sie mithilfe einer geeigneten Lyapunov-Funktion V, dass x_0 stabil ist.

Hinweis: Setzen Sie $V(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2$ mit geeigneten Parametern $a, b, c > 0$ an.

(c) Zeigen Sie, dass x_0 nicht asymptotisch stabil ist.

Hinweis: Finden Sie Lösungen (u,v,w) von (2) mit $w \equiv 0$.

Lösungsvorschlag.

(a) Wir definieren

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} 4y(z-1) \\ -x(z-1) \\ -z^3(x^2+y^2+1) \end{pmatrix}.$$

Dann ist $f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ und die Differentialgleichung lässt sich als $(u,v,w)'(t) = f(u(t), v(t), w(t))$ schreiben. Dann ist auch $f(x_0) = 0$, also ist x_0 eine stationäre Stelle der Differentialgleichung.

Zudem gilt

$$A = f'(x_0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also $\sigma(A) = \{0, 2\mathrm{i}, -2\mathrm{i}\}$. Da also $\operatorname{Re}\lambda = 0$ für alle $\lambda \in \sigma(A)$, ist Satz 13.1 nicht anwendbar.

(b) Setzen wir V wie im Hinweis, so erhalten wir direkt $V \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ sowie $V(x_0) = 0$ und $V(x,y,z) > 0$ für $x,y,z \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Zudem erhalten wir

$$\begin{aligned} (V'(x,y,z) \mid f(x,y,z)) &= \left(\begin{pmatrix} 2ax \\ 2by \\ 2cz \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 4y(z-1) \\ -x(z-1) \\ -z^3(x^2+y^2+1) \end{pmatrix} \right) \\ &= 8axyz - 8axy - 2bxyz + 2bxy - 2cz^4\big(x^2+y^2+1\big), \end{aligned}$$

also mit $a = 1$, $b = 4$ und $c = 1$

$$\begin{aligned} &= -z^4\big(x^2 + y^2 + 1\big) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^3$. Somit ist V eine Lyapunov-Funktion für die Differentialgleichung im Punkt x_0, also ist nach Satz 14.1 x_0 stabil.

(c) Wie im Hinweis empfohlen, setzen wir $w = 0$. Dann ergibt sich

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}'(t) = \begin{pmatrix} -4v(t) \\ u(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte der auftretenden Matrix sind $1\mathrm{i}$ und $-2\mathrm{i}$ mit den Eigenvektoren $(2\mathrm{i}, 1)$ beziehungsweise $-2\mathrm{i}, 1$. Also ist für jedes $\delta > 0$ die Funktion

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \delta \operatorname{Re}\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t} \begin{pmatrix} 2\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \delta \begin{pmatrix} -2\sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix}$$

eine Lösung der Differentialgleichung mit $w = 0$. Somit ist für jedes δ die Funktion

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}(t) = \delta \begin{pmatrix} -2\sin(2t) \\ \cos(2t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine Lösung der Differentialgleichung und es gilt

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}(t) \right\|^2 &= \delta^2\big(4\sin^2(2t) + \cos^2(2t)\big) \\ &= \delta^2\big(1 + 3\sin^2(2t)\big) \\ &\geq \delta^2. \end{aligned}$$

Also gilt mit $x_1 = (u, v, w)(0) = \delta(0, 1, 0)$, dass $\|x_1 - x_0\| = \delta$, aber $\|(u, v, w)(t)\| \geq \delta$, also insbesondere $\lim_{t\to\infty}(u, v, w)(t) \neq x_0$, also ist x_0 nicht asymptotisch stabil. □