Karlsruher Institut für Technologie

05. Juli 2023
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
Henning Heister

Analysis für das Lehramt
Übungsblatt 10

Aufgabe 1 (Satz von Fubini). Berechnen Sie mithilfe des Satzes von Fubini die folgenden Integrale.

(a) $\displaystyle\int_A y^2 \cos(xy)\,\mathrm{d}(x,y), \quad$ für $A = [0,1] \times [0,\pi]$,

(b) $\displaystyle\int_B \frac{xy}{1+xy^2}\,\mathrm{d}(x,y), \quad$ für $B = [0,1] \times [0,1]$ und

(c) $\displaystyle\int_C \frac{x^2y - y^3}{\sqrt{z+1}}\,\mathrm{d}(x,y,z), \quad$ für $C = [0,2] \times [1,2] \times [0,3]$.

Aufgabe 2 (Volumenberechnung). Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen messbar sind und berechnen Sie jeweils deren Volumen. Nutzen Sie hierzu jeweils eine passende Eigenschaft von Integralen aus Satz 15.4.

(a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x, y \leq 0, x + y \geq -3\}$,

(b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 \leq 2 + y, y \leq x\}$,

(c) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x \geq 0, 0 \leq y \leq 4, z \geq 0, 2z + x \leq 2\}$,

Hinweis: Satz von Fubini.

(d) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, \max\{|x|, |y|, |z|\} > 2\}$.

Aufgabe 3 (Prinzip von Cavalieri). Berechnen Sie jeweils das Volumen der Mengen A, B und C.

(a) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 - z^3 \leq 0, 0 \leq z \leq 1\}$.

(b) $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ -1 + \frac{1}{2}z \leq x \leq 1 - \frac{1}{2}z, 0 \leq y \leq 2 - z, 0 \leq z \leq 2\}$.

(c) $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + z^2 \leq r^2\}$, $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ y^2 + z^2 \leq r^2\}$ und $C = S_1 \cap S_2$.

Aufgabe 4 (Rotationskörper). Es seien $a < b$ und $f \in C([a,b])$ mit $f \geq 0$ $(x \in [a,b])$. Durch Rotation des Graphen von f um die x-Achse entsteht der folgende Rotationskörper:

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x \in [a,b], y^2 + z^2 \leq f(x)^2\}.$$

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen f und $n \in \mathbb{N}$ jeweils das Volumen $V(B)$:

(a) $f(x) = x^n(1-x) \quad (x \in [0,1])$,

(b) $f(x) = |\sin(nx)| \quad (x \in [-\pi,\pi])$.