Karlsruher Institut für Technologie

12. Juli 2023
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
Henning Heister

Analysis für das Lehramt
Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 10

Aufgabe 1 (Satz von Fubini)**.** Berechnen Sie mithilfe des Satzes von Fubini die folgenden Integrale.

(a) $\int_A y^2 \cos(xy)\,\mathrm{d}(x,y)$, für $A = [0,1] \times [0,\pi]$,

(b) $\int_B \frac{xy}{1+xy^2}\,\mathrm{d}(x,y)$, für $B = [0,1] \times [0,1]$ und

(c) $\int_C \frac{x^2y - y^3}{\sqrt{z+1}}\,\mathrm{d}(x,y,z)$, für $C = [0,2] \times [1,2] \times [0,3]$.

Lösungsvorschlag.

(a) A ist ein kompaktes Intervall in $\mathbb{R}^2$, der Integrand, den wir mit f bezeichnen, stetig auf A und somit integrierbar über A nach Satz 15.2 (4). Mit dem Satz von Fubini folgt

$$\begin{aligned}\int_A f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) &= \int_0^\pi \int_0^1 y^2 \cos(xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^\pi y \sin y\,\mathrm{d}y \\ &= \pi.\end{aligned}$$

(b) B ist ein kompaktes Intervall in $\mathbb{R}^2$. Wegen $1 + xy^2 \geq 1$ für $(x,y) \in B$ ist der Integrand, den wir mit g bezeichnen, stetig auf B und somit integrierbar über B. Mit dem Satz von Fubini folgt

$$\begin{aligned}\int_B g(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{xy}{1+xy^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2}\log(1+x) - \frac{1}{2}\log 1\,\mathrm{d}x \\ &= \log 2 - \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(c) C ist ein kompaktes Intervall in $\mathbb{R}^3$. Da $\sqrt{z+1} \geq 1$ für $z \in [0,3]$, ist der Integrand, den wir mit h bezeichnen, stetig auf C und somit integrierbar über C. Mit dem Satz von Fubini folgt

$$\int_C h(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_0^2 \int_1^2 \int_0^3 \frac{x^2y - y^3}{\sqrt{z+1}}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^2 \int_1^2 2\big(x^2 y - y^3\big)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 3x^2 - \frac{15}{2}\,\mathrm{d}x \\
&= -7.
\end{aligned}
$$

□

Aufgabe 2 (Volumenberechnung)**.** Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen messbar sind und berechnen Sie jeweils deren Volumen. Nutzen Sie hierzu jeweils eine passende Eigenschaft von Integralen aus Satz 15.4.

(a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x, y \leq 0, x + y \geq -3\}$,

(b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 \leq 2 + y, y \leq x\}$,

(c) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x \geq 0, 0 \leq y \leq 4, z \geq 0, 2z + x \leq 2\}$,
Hinweis: Satz von Fubini.

(d) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, \max\{|x|, |y|, |z|\} > 2\}$.

Lösungsvorschlag.

(a) Für $(x, y) \in A$ gilt $0 \geq x \geq -y - 3 \geq -3$, also $x \in [-3, 0]$, und $0 \geq y \geq -3 - x$. Setze $B = [-3, 0]$, dann ist B als kompaktes Intervall messbar. Die Funktionen $f(x) = 0$ und $g(x) = -3 - x$ für $x \in B$ sind stetig und beschränkt auf B und somit integrierbar auf B. Insbesondere gilt $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in B, \ g(x) \leq y \leq f(x)\}$. Somit ist A messbar und es gilt

$$V(A) = \int_B f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-3}^0 3 + x\,\mathrm{d}x = \frac{9}{2}.$$

(b) Aus $x^2 2 + y$ und $y \leq x$ folgt

$$x^2 \leq 2 + x \iff x \leq 2 \wedge x \geq -1.$$

Da das kompakte Intervall $[-1, 2]$ messbar ist und die Funktionen $x \mapsto x^2 - 2$ und $x \mapsto x$ darauf stetig und beschränkt und somit integrierbar sind, folgt die Messbarkeit von B aus Satz 15.4 (9), denn $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [-1, 2], \ x^2 - 2 \leq y \leq x\}$. Weiter gilt

$$V(B) = \int_{-1}^2 x - x^2 + 2\,\mathrm{d}x = \frac{9}{2}.$$

(c) Es gilt $x \leq 2 - 2z \leq 2$, also $x \in [0,2]$, also $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in [0,2] \times [0,4],\ 0 \leq z \leq -1/2x + 1\}$. Da das kompakte Intervall $I = [0,2] \times [0,4]$ integrierbar ist, ist die Menge C nach Satz 15.4 (9) messbar. Weiter gilt mit dem Satz von Fubini

$$V(C) = \int_I -\frac{1}{2}x + 1 \,\mathrm{d}(x,y) = \int_0^2 \int_0^4 -\frac{1}{2}x + 1 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_0^2 -2x + 4 \,\mathrm{d}x = 4.$$

(d) Wir definieren $D_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}$ und $D_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \max\{|x|,|y|,|z|\} \leq 2\} = [-2] \times [-2,2] \times [-2,,]$. Dann gilt $D = D_1 \setminus D_2$. Da D_1 und D_2 messbar sind, ist nach Satz 15.4 (5) auch D messbar. Weiter gilt mit Satz 15.4 (7), da $D_2 \subseteq D_1$

$$V(D_1) = V(D_1 \setminus D_2 \cup D_2) = V(D_1 \setminus D_2) + V(D_2) - V(D_1 \setminus D_2 \cap D_2),$$

also $V(D) = V(D_1) - V(D_2) = 36\pi - 64$. □

Aufgabe 3 (Prinzip von Cavalieri)**.** Berechnen Sie jeweils das Volumen der Mengen A, B und C.

(a) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^3 \leq 0, 0 \leq z \leq 1\}$.

(b) $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -1 + \frac{1}{2}z \leq x \leq 1 - \frac{1}{2}z, 0 \leq y \leq 2 - z, 0 \leq z \leq 2\}$.

(c) $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq r^2\}, S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \leq r^2\}$ und $C = S_1 \cap S_2$.

Lösungsvorschlag.

(a) $A \in \mathbb{R}^3$ ist messbar und für $z \in [0,1]$ setzen wir $\tilde{A}(z) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \in A\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq z^3\}$. $\tilde{A}(z)$ ist also messbar für alle $z \in [0,1]$. Mit dem Prinzip von Cavalieri (Satz 15.5) folgt, dass $z \mapsto V(\tilde{A}(z))$ integrierbar ist über $[0,1]$ und $V(A) = \int_0^1 V(\tilde{A}(z)) \,\mathrm{d}z$ gilt. Wegen $V(\tilde{A}(z)) = \pi z^3$ folgt

$$V(A) = \pi \int_0^1 z^3 \,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{4}.$$

(b) Die Menge B ist messbar und wir definieren für jedes $z \in [0,2]$ die messbare Menge $\tilde{B}(z) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \in B\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 + 1/2z \leq x \leq 1 - 1/2z,\ 0 \leq y \leq 2 - z\}$. Die Menge $\tilde{B}(z)$ ist ein Quadrat mit Seitenlänge $2 - z$, folglich gilt $V(\tilde{B}(z)) = (2-z)^2$. Mit dem Prinzip von Cavalieri folgt

$$V(B) = \int_0^2 (2-z)^2 \,\mathrm{d}z = \frac{8}{3}.$$

(c) S_1 und S_2 sind Zylinder und messbar, somit auch C. Für $z \in [-r, r]$ setzen wir

$$\begin{aligned}\tilde{C}(z) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x,y,z) \in C\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 \le r^2 - z^2, \ y^2 \le r^2 - z^2\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x, y \in [-\sqrt{r^2-z^2}, \sqrt{r^2-z^2}]\}.\end{aligned}$$

$\tilde{C}(z)$ ist somit ein Quadrat (abgeschlossen) mit Seitenlänge $2\sqrt{r^2-z^2}$, somit messbar, und es gilt $V(\tilde{C}(z)) = 4(r^2-z^2)$. Mit dem Prinzip von Cavalieri folgt

$$V(C) = 4\int_{-r}^{r} r^2 - z^2 \,\mathrm{d}z = \frac{16}{3}r^3. \qquad \square$$

Aufgabe 4 (Rotationskörper)**.** Es seien $a < b$ und $f \in C([a,b])$ mit $f \ge 0$ ($x \in [a,b]$). Durch Rotation des Graphen von f um die x-Achse entsteht der folgende Rotationskörper:

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x \in [a,b], y^2 + z^2 \le f(x)^2\}.$$

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen f und $n \in \mathbb{N}$ jeweils das Volumen $V(B)$:

(a) $f(x) = x^n(1-x) \quad (x \in [0,1])$,

(b) $f(x) = |\sin(nx)| \quad (x \in [-\pi, \pi])$.

Lösungsvorschlag.

(a) Aus der Vorlesung folgt

$$V(B) = \pi \int_0^1 (x^n(1+x))^2 \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{(2n+1)(n+1)(2n+3)}.$$

(b) Wir berechnen zunächst

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \,\mathrm{d}x &= -\cos x \sin x - \int -\cos^2 x \,\mathrm{d}x \\ &= -\sin x \cos x + \int 1 - \sin^2 x \,\mathrm{d}x \\ \iff \int \sin^2 x \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x).\end{aligned}$$

Wieder folgt aus der Vorlesung

$$V(B) = \pi \int_{-\pi}^{\pi} |\sin(nx)|^2 \,\mathrm{d}x = 2\pi \int_0^{(} \pi) \sin^2(nx) \,\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{n} \int_0^{n\pi} \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \pi^2. \qquad \square$$