12. Juli 2023
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
Henning Heister

Analysis für das Lehramt
Übungsblatt 11

Aufgabe 1 (Normalbereiche).

(a) Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^2$ das abgeschlossene Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(\pi,0)$ und $(0,\pi)$. Berechnen Sie
$$\int_A xy^2 - 2\sin(x+y)\,\mathrm{d}(x,y).$$

(b) Es sei $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x,y \geq 0, x^3 + y^2 \leq 1\}$. Berechnen Sie
$$\int_B x^2 + 2y\,\mathrm{d}(x,y).$$

(c) Es sei $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in [1,2], 0 \leq xy \leq \pi/2\}$. Berechnen Sie
$$\int_C \frac{\cos(xy)}{x}\,\mathrm{d}(x,y).$$

(d) Es sei $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y \geq 0, y - x \geq -1, y^2 - x - 1 \leq 0\}$. Berechnen Sie
$$\int_D \cosh\left(\frac{x}{y+1}\right)\mathrm{d}(x,y).$$

Aufgabe 2 (Polarkoordinaten).

(a) Es seien $0 < \varrho < R$.

(i) Es sei $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ \varrho^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0\}$. Berechnen Sie
$$\int_A (x^2 + y^2)\,d(x,y).$$

(ii) Es sei $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \geq 0, |y| \leq x, \sqrt{x^2+y^2} \in [\varrho, R]\}$. Berechnen Sie
$$\int_B \frac{y}{x}\,d(x,y).$$

(b) Es sei $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq \mathrm{e} - 1\}$. Berechnen Sie
$$\int_C \frac{1}{1 + x^2 + y^2}\,d(x,y).$$

Aufgabe 3 (Zylinderkoordinaten)**.**

(a) Berechnen Sie für den Kreiskegel $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 - z, 0 \leq z \leq 1\}$ das Integral

$$\int_K \left(x^2 + y^2\right)^2 \mathrm{e}^{(1-z)^7} \, \mathrm{d}(x, y, z).$$

(b) Berechnen Sie für $a > 0$ das Volumen der folgenden Menge:

$$B_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \, x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, x^2 + y^2 \leq ax\}.$$

Aufgabe 4 (Kugelkoordinaten)**.**

(a) Für $0 < \varrho < R$ sei $B_\varrho = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \, \varrho^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$. Bestimmen Sie

$$\lim_{\varrho \to 0} \int_{B_\varrho} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \, \mathrm{d}(x, y, z).$$

(b) Es seien $R > 0$ und $K(0, R)$ die Kugel um den Punkt 0 mit Radius R im $\mathbb{R}^3$. Berechnen Sie

$$\lim_{R \to \infty} \int_{K(0,R)} \frac{1}{(1 + x^2 + y^2 + z^2)^2} \, \mathrm{d}(x, y, z).$$