Karlsruher Institut für Technologie

19. Juli 2023
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
Henning Heister

Analysis für das Lehramt
Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 11

Aufgabe 1 (Normalbereiche)**.**

(a) Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^2$ das abgeschlossene Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(\pi,0)$ und $(0,\pi)$. Berechnen Sie
$$\int_A xy^2 - 2\sin(x+y)\,\mathrm{d}(x,y).$$

(b) Es sei $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x,y \geq 0, x^3 + y^2 \leq 1\}$. Berechnen Sie
$$\int_B x^2 + 2y\,\mathrm{d}(x,y).$$

(c) Es sei $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [1,2], 0 \leq xy \leq \pi/2\}$. Berechnen Sie
$$\int_C \frac{\cos(xy)}{x}\,\mathrm{d}(x,y).$$

(d) Es sei $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \geq 0, y - x \geq -1, y^2 - x - 1 \leq 0\}$. Berechnen Sie
$$\int_D \cosh\left(\frac{x}{y+1}\right)\mathrm{d}(x,y).$$

Lösungsvorschlag.

(a) Es gilt
$$A = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [0,\pi],\ 0 \leq y \leq \pi - x\big\}.$$
Die Funktion $x \mapsto \pi - x$ ist stetig, also ist A ein Normalbereich bezüglich der x-Achse. Weiter ist die Funktion $(x,y) \mapsto xy^2 - 2\sin(x+y)$ stetig auf A und somit folgt mit partieller Integration im äußeren Integral
$$\begin{aligned}
\int_A xy^2 - 2\sin(x+y)\,\mathrm{d}(x,y) &= \int_0^\pi \int_0^{\pi-x} xy^2 - 2\sin(x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\pi \frac{1}{3}x(\pi-x)^3 + 2\cos x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}\Big[-\frac{1}{4}x(\pi-x)^4\Big]_{x=0}^{\pi} - \frac{1}{3}\int_0^\pi -\frac{1}{4}(\pi-x)^4\,\mathrm{d}x \\
&\quad - 2\pi - 2[\sin x]_{x=0}^{\pi} \\
&= \frac{1}{60}\pi^5 - 2\pi
\end{aligned}$$

(b) Wir schreiben B als $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1],\ 0 \le y \le \sqrt{1-x^3}\}$. Die Funktion $x \mapsto \sqrt{1-x^3}$ ist stetig auf $[0,1]$, also ist B ein Normalbereich bezüglich der x-Achse. Die Funktion $(x,y) \mapsto x^2 + 2y$ ist ebenfalls stetig auf B und somit gilt

$$\begin{aligned}\int_B x^2 + 2y \,\mathrm{d}(x,y) &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^3}} x^2 + 2y \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^3} + 1 - x^3 \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{35}{36}.\end{aligned}$$

(c) Wir schreiben C als $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [1,2],\ 0 \le y \le \pi/(2x)\}$. Dies ist ein Normalbereich bezüglich der x-Achse, $(x,y) \mapsto \cos(xy)/x$ ist auf C stetig und es gilt

$$\begin{aligned}\int_C \frac{\cos(xy)}{x} \,\mathrm{d}(x,y) &= \int_1^2 \int_0^{\pi/(2x)} \frac{\cos(xy)}{x} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \\ &= \int_1^2 \frac{\sin(\pi/2)}{x^2} - 0 \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(d) Für $(x,y) \in D$ gilt $x \le y+1$ und $x \ge y^2 - 1$. Wir berechnen die Schnittpunkte der beiden Kurven $x = y+1$ und $x = y^2 - 1$, also die Lösungen von $y^2 - y - 2 = 0$. Dies lässt sich äquivalent umformen zu

$$\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \iff \left|y - \frac{1}{2}\right| = \frac{3}{2} \iff y = -1 \vee y = 2.$$

Wegen $y \ge 0$ bleibt nur $y = 2$ als Lösung. D hat also die Darstellung $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,2],\ y^2 - 1 \le x \le y+1\}$, also ist D ein Normalbereich bezüglich der y-Achse, die Funktion $(x,y) \mapsto \cosh(x/(y+1))$ ist auf D stetig und es gilt mit partieller Integration im äußeren Integral

$$\begin{aligned}\int_D \cosh\left(\frac{x}{y+1}\right) \mathrm{d}(x,y) &= \int_0^2 \int_{y^2-1}^{y+1} \cosh\left(\frac{x}{y+1}\right) \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^2 (y+1)\sinh 1 - (y+1)\sinh(y-1) \,\mathrm{d}y \\ &= \sinh 1 \left[\frac{1}{2}y^2 + y\right]_{y=0}^2 - \left[(y+1)\cosh(y-1)\right]_{y=0}^2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \int_0^2 \cosh(y-1)\,\mathrm{d}y \\
&= 2\mathrm{e} - \frac{4}{\mathrm{e}},
\end{aligned}
$$

wobei wir am Ende die Identitäten $\sinh z = 1/2(\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z})$ und $\cosh z = 1/2(\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z})$ verwenden. □

Aufgabe 2 (Polarkoordinaten)**.**

(a) Es seien $0 < \varrho < R$.

(i) Es sei $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \varrho^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0\}$. Berechnen Sie

$$\int_A (x^2 + y^2)\, d(x,y).$$

(ii) Es sei $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, |y| \leq x, \sqrt{x^2+y^2} \in [\varrho, R]\}$. Berechnen Sie

$$\int_B \frac{y}{x}\, d(x,y).$$

(b) Es sei $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \mathrm{e} - 1\}$. Berechnen Sie

$$\int_C \frac{1}{1 + x^2 + y^2}\, d(x,y).$$

Lösungsvorschlag. Wir setzen auf $\mathbb{R}^2$

$$g(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

und es gilt $\det g'(r,\varphi) = r$.

(a) (i) Wir setzen $\tilde{A} = [\varrho, R] \times [0, \pi/2] \subseteq \mathbb{R}^2$. $\tilde{A}$ ist ein kompaktes Intervall und daher messbar, g ist injektiv auf $\tilde{A}$, also insbesondere auch auf dem Inneren von $\tilde{A}$ und dort ist auch $\det g'(r,\varphi) = r \neq 0$. Weiter gilt $g(\tilde{A}) = A$ und die Funktion $(x,y) \mapsto x^2 + y^2$ ist stetig auf A. Mit der Substitutionsregel aus Satz 15.6 folgt nun mit dem Satz von Fubini

$$
\begin{aligned}
\int_A x^2 + y^2 \,\mathrm{d}(x,y) &= \int_{\tilde{A}} r^2 r \,\mathrm{d}(r,\varphi) \\
&= \int_\varrho^R \int_0^{\pi/2} r^3 \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r
\end{aligned}
$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_{\varrho}^{R} r^3 \, \mathrm{d}r$$
$$= \frac{\pi}{8}\left(R^4 - \varrho^4\right).$$

(ii) Für Polarkoordinaten gilt $r \in [\varrho, R]$, da $\sqrt{x^2+y^2} \in [\varrho, R]$. Aus $x \geq 0$ folgt $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$ und $|y| \leq x$, also $|\sin\varphi| \leq \cos\varphi$ impliziert $\varphi \in [-\pi/4, \pi/4]$. Mit $\tilde{B} = [\varrho, R] \times [-\pi/4, \pi/4]$ gilt $g(\tilde{B}) = B$ und die Voraussetzungen von Satz 15.6 erfüllt. Damit folgt mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}\int_B \frac{y}{x} \, \mathrm{d}(x,y) &= \int_{\tilde{B}} \frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi} r \, \mathrm{d}(r,\varphi) \\ &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_{\varrho}^{R} r\tan\varphi \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{1}{2}\left(R^2 - \varrho^2\right) \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan\varphi \, \mathrm{d}\varphi \\ &= 0.\end{aligned}$$

(iii) Wir setzen $\tilde{C} = [0, \sqrt{\mathrm{e}-1}] \times [0, 2\pi]$. Dann gilt $g(\tilde{C}) = C$, g ist injektiv auf dem Inneren von $\tilde{C}$ und dort ist auch $\det g'(r,\varphi) = r \neq 0$. Die Funktion $(x,y) \mapsto 1/(1+x^2+y^2)$ ist stetig auf C. Mit der Substitutionsregel und dem Satz von Fubini folgt

$$\begin{aligned}\int_C \frac{1}{1+x^2+y^2} \, \mathrm{d}(x,y) &= \int_{\tilde{C}} \frac{1}{1+r^2} r \, \mathrm{d}(r,\varphi) \\ &= \int_0^{\sqrt{\mathrm{e}-1}} \int_0^{2\pi} \frac{r}{1+r^2} \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{\mathrm{e}-1}} \frac{r}{1+r^2} \, \mathrm{d}r \\ &= \pi.\end{aligned}$$

□

Aufgabe 3 (Zylinderkoordinaten)**.**

(a) Berechnen Sie für den Kreiskegel $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \leq 1-z, 0 \leq z \leq 1\}$ das Integral

$$\int_K \left(x^2+y^2\right)^2 \mathrm{e}^{(1-z)^7} \, \mathrm{d}(x,y,z).$$

(b) Berechnen Sie für $a > 0$ das Volumen der folgenden Menge:

$$B_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, x^2 + y^2 \leq ax\}.$$

Lösungsvorschlag. Wir setzen auf $\mathbb{R}^3$

$$g(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

und es gilt $\det g'(r, \varphi, z) = r$.

(a) Setze $f(x, y, z) = (x^2 + y^2)^2 \mathrm{e}^{(1-z)^7}$. Wir definieren $\tilde{K} = \{(r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 : (\varphi, z) \in [0, 2\pi] \times [0, 1],\ 0 \leq r \leq 1 - z\}$. $\tilde{K}$ ist kompakt und messbar, g ist auf dem Inneren von $\tilde{K}$ injektiv und $\det g'(r, \varphi, z) = r \neq 0$ im Inneren von $\tilde{K}$. Zudem gilt $g(\tilde{K}) = K$ und f ist stetig auf K. Somit folgt mit der Substitutionsregel

$$\int_K f(x, y, z)\,\mathrm{d}(x, y, z) = \int_{\tilde{K}} r^4 \mathrm{e}^{(1-z)^7} r\,\mathrm{d}(r, \varphi, z).$$

Weiter gilt, da $\tilde{K}$ ein Normalbereich im $\mathbb{R}^3$ ist, dass

$$\begin{aligned}
\int_K f(x, y, z)\,\mathrm{d}(x, y, z) &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{1-z} r^5 \mathrm{e}^{(1-z)^7}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{6}(1 - z)^6 \mathrm{e}^{(1-z)^7}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi \\
&= -\frac{1}{42} \int_0^{2\pi} 1 - \mathrm{e}\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{\pi}{21}(\mathrm{e} - 1).
\end{aligned}$$

(b) Für $(x, y, z) \in B_a$ gilt in Zylinderkoordinaten $r^2 \leq ar\cos\varphi \iff r \leq a\cos\varphi$. Da $a > 0$, folgt $\cos\varphi \geq 0$, also $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$. Weiter gilt $z^2 \leq a^2 - r^2 \iff -\sqrt{a^2 - r^2} \leq z \leq \sqrt{a^2 - r^2}$. Wir definieren

$$\tilde{B}_a = \left\{(r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 : \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\ 0 \leq r \leq a\cos\varphi,\ -\sqrt{a^2 - r^2} \leq z \leq \sqrt{a^2 - r^2}\right\}.$$

Es gilt $g(\tilde{B}_a) = B_a$ und die Voraussetzungen des Satzes 15.6 sind erfüllt. Damit folgt

$$V(B_a) = \int_{B_a} 1\,\mathrm{d}(x, y, z)$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\tilde{B}_a} r \,\mathrm{d}(r,\varphi,z) \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{a\cos\varphi} \int_{-\sqrt{a^2-r^2}}^{\sqrt{a^2-r^2}} r \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{a\cos\varphi} 2\sqrt{a^2-r^2} r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} -\frac{2}{3}\left(a^2 - a^2\cos^2\varphi\right)^{3/2} + \frac{3}{2}a^3 \,\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{4}{3}a^3 \int_0^{\pi/2} 1 - \sin^3\varphi \,\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{4}{3}a^3 \int_0^{\pi/2} 1 - \sin\varphi + \sin\varphi\cos^2\varphi \,\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{9}{2}a^3(3\pi - 4).
\end{aligned}
$$

□

Aufgabe 4 (Kugelkoordinaten)**.**

(a) Für $0 < \varrho < R$ sei $B_\varrho = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \varrho^2 \le x^2+y^2+z^2 \le R^2\}$. Bestimmen Sie

$$\lim_{\varrho\to 0} \int_{B_\varrho} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \,\mathrm{d}(x,y,z).$$

(b) Es seien $R > 0$ und $K(0,R)$ die Kugel um den Punkt 0 mit Radius R im $\mathbb{R}^3$. Berechnen Sie

$$\lim_{R\to\infty} \int_{K(0,R)} \frac{1}{(1+x^2+y^2+z^2)^2} \,\mathrm{d}(x,y,z).$$

Lösungsvorschlag. Wir setzen auf $\mathbb{R}^3$

$$g(r,\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\vartheta \\ r\sin\varphi\cos\vartheta \\ r\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

und es gilt $|\det g'(r,\varphi,\vartheta)| = r^2\cos\vartheta$ für $\vartheta \in [-\pi/2, \pi/2]$.

(a) Für $0 < \varrho < R$ sei $B_\varrho = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \varrho^2 \le x^2+y^2+z^2 \le R^2\}$. Wir setzen $\tilde{B}_\varrho = [\varrho, R]\times[0,2\pi]\times[-\pi/2,\pi/2] \subseteq \mathbb{R}^3$. $\tilde{B}_\varrho$ ist also ein kompaktes Intervall und somit messbar. Insbesondere ist g auf dem Inneren von $\tilde{B}_\varrho$ injektiv und $|\det g'(r,\varphi,\vartheta)| = r^2\cos\varphi \neq 0$ für (r,φ,ϑ) im Inneren von $\tilde{B}_\varrho$. Da die Funktion $(x,y,z) \mapsto 1/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ stetig auf

B_ϱ ist und $g(\tilde{B}_\varrho) = B_\vartheta$ gilt, folgt mit der Substitutionsregel aus Satz 15.6 und dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}\int_{B_\varrho} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,\mathrm{d}(x,y,z) &= \int_{\tilde{B}_\varrho} \frac{1}{\sqrt{r^2}} r^2\cos\vartheta\,\mathrm{d}(r,\varphi,\vartheta)\\ &= \int_\varrho^R \int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r\cos\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r\\ &= 2\int_\varrho^R \int_0^{2\pi} r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r\\ &= 4\pi\int_\varrho^R r\,\mathrm{d}r\\ &= 2\pi\big(R^2-\varrho^2\big).\end{aligned}$$

Also können wir den Grenzwert $\varrho \mapsto 0$ des Integrals bilden und erhalten

$$\lim_{\varrho\to 0}\int_{B_\varrho} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,\mathrm{d}(x,y,z) = 2\pi R^2.$$

(b) Wir setzen $\tilde{K} = [0,R]\times[0,2\pi]\times[-\pi/2,\pi/2] \subseteq \mathbb{R}^3$. Wie im vorherigen Teil sehen wir, dass die Voraussetzungen des Satzes 15.6 erfüllt sind. Insbesondere gilt $g(\tilde{K}) = K(0,R)$ und die Funktion $(x,y,z) \mapsto 1/(1+x^2+y^2+z^2)^2$ ist stetig auf $K(0,R)$. Mit der Substitutionsregel und dem Satz von Fubini erhalten wir folglich

$$\begin{aligned}\int_{K(0,R)} \frac{1}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}\,\mathrm{d}(x,y,z) &= \int_{\tilde{K}} \frac{1}{(1+r^2)^2} r^2\cos\vartheta\,\mathrm{d}(r,\varphi,\vartheta)\\ &= \int_0^R\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{r^2}{(1+r^2)^2}\cos\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r\\ &= 2\int_0^R\int_0^{2\pi} \frac{r^2}{(1+r^2)^2}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r\\ &= 4\pi\int_0^R \frac{r^2}{(1+r^2)^2}\,\mathrm{d}r\\ &= 4\pi\left(\left[-\frac{1}{2}\frac{1}{1+r^2}r\right]_{r=0}^R - \int_0^R -\frac{1}{2}\frac{1}{1+r^2}\,\mathrm{d}r\right)\\ &= 2\pi\left(\arctan R - \frac{R}{1+R^2}\right).\end{aligned}$$

Es gilt $\arctan R \to \pi/2$ und

$$\frac{R}{1+R^2} = \frac{1}{1/R+R} \le \frac{1}{R} \to 0$$

für $R \to \infty$, also

$$\lim_{R\to\infty} \int_{K(0,R)} \frac{1}{(1+x^2+y^2+z^2)^2} \, \mathrm{d}(x,y,z) = \pi^2. \qquad \square$$