19. Juli 2023
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
Henning Heister

Analysis für das Lehramt
Übungsblatt 12

Dies ist ein Blatt mit Aufgaben im Stile von Klausuraufgaben zur Wiederholung des Stoffes. Der Umfang entspricht etwa zwei Klausuren.

Aufgabe 1 (Funktionentheorie)**.**

(a) Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil folgender komplexer Zahlen.

(i) $z_1 = \dfrac{1-2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$,

(ii) $z_2 = \left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^{2021}$,

(iii) $z_3 = \mathrm{i}^{\mathrm{i}}$,

(iv) $z_4 = \dfrac{3+\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})^2}$ und

(v) $z_5 = (\mathrm{i}-1)^{\mathrm{i}\pi}$.

(b) Es sei der Weg $\gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ ($t \in [0, 2\pi]$) gegeben. Berechnen Sie die folgenden Wegintegrale.

(i) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\mathrm{e}^{\sin(z)}}{z^2}\,\mathrm{d}z$,

(ii) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z\cos(z)}{z-2\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z$,

(iii) $\displaystyle\int_\gamma \overline{z}\mathrm{e}^{-|z|^2}\,\mathrm{d}z$,

(iv) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\cos(z)}{(z-1)^4}\,\mathrm{d}z$ (hier sei $\gamma(t) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$) und

(v) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\mathrm{e}^{-z^2}}{z^2+9}\,\mathrm{d}z$.

(c) (i) Es sei die Funktion f gegeben durch

$$f(z) = \frac{(z+1)\mathrm{e}^{-z}}{z^3 - 2z^2 - z + 2}.$$

Der Definitionsbereich sei die Menge aller $z \in \mathbb{C}$, für welche $f(z)$ erklärt ist.

(1) Bestimmen Sie Art und Lage aller isolierten Singularitäten von f.

(2) Es sei $\gamma_2(t) = 2 + 2e^{it}$ ($t \in [0, 2\pi]$). Berechnen Sie das Wegintegral

$$\int_{\gamma_2} f(z)\,dz.$$

(ii) Es sei die Funktion $f\colon \mathbb{C} \setminus \{i, -i\} \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{1 + z^2}.$$

(1) Bestimmen Sie $\operatorname{res}(f, i)$.

(2) Für $r > 1$ sei $\gamma_r = \gamma_{1,r} \oplus \gamma_{2,r}$, wobei

$$\begin{aligned} \gamma_{1,r}&\colon [-r, r] \to \mathbb{C}, \quad \gamma_{1,r}(t) = t,\\ \gamma_{2,r}&\colon [0, \pi] \;\; \to \mathbb{C}, \quad \gamma_{2,r}(t) = re^{it}. \end{aligned}$$

Berechnen Sie $\int_{\gamma_r} f(z)\,dz$.

(3) Bestimmen Sie mithilfe des vorherigen Aufgabenteils den Wert des uneigentlichen Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1 + x^2}\,dx.$$

(d) (i) Es sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$. Zeigen Sie, dass $f \equiv 0$ ist.

Hinweis: Der Satz von Liouville kann nützlich sein.

(ii) Bestimmen Sie alle holomorphe Funktionen $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die $f(\frac{1}{n}) = \frac{n+1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllen.

Hinweis: Identitätssatz.

Aufgabe 2 (Differentialgleichungen).

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Anfangswertprobleme eindeutig lösbar sind und bestimmen Sie die nicht fortsetzbaren Lösungen $u\colon (\omega_-, \omega_+) \to \mathbb{R}$.

(i) $u'(t) = \dfrac{e^{u(t)} - 1}{te^{u(t)}}, \quad t > 0, \quad u(1) = \ln(2).$

(ii) $u'(t) = \dfrac{te^{u(t)^2}}{u(t)}, \quad u(0) = \sqrt{\ln(4)}.$

Bestimmen Sie hier zudem ω_- und ω_+ sowie die Grenzwerte $\lim_{t\to\omega_-} u(t)$ und $\lim_{t\to\omega_+} u(t)$.

(b) (i) Was ist ein erstes Integral einer autonomen Differentialgleichung? Geben Sie die Definition an.

(ii) Bestimmen Sie für die folgenden beiden Differentialgleichungen jeweils ein (nicht konstantes) erstes Integral.

(1) $(u, v)'(t) = (1, 1 + u(t) + 2v(t))$.

Hinweis: Wählen Sie λ nur abhängig von x.

(2) $(u, v)'(t) = \big(\cos(v(t))u(t)^2 + 4v(t)^3, -4u(t) - 2u(t)\sin(v(t))\big)$.
Folgern Sie, dass jede Lösung beschränkt sein muss.

(c) Es seien $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 > 0$. Berechnen Sie die stationären Stellen der folgenden Differentialgleichungen und untersuchen Sie diese auf asymptotische Stabilität bzw. Instabilität.

(i) $(u, v)'(t) = \big(u(t) - u(t)v(t)^2, -4v(t) + u(t)^2\big)$ und

(ii) $(u, v)'(t) = (-\alpha_1 u(t) + \alpha_2 u(t)v(t), -\beta_1 v(t) + \beta_2 u(t)v(t))$.

Aufgabe 3 (Integral- und Volumenberechnung)**.**

(a) Es sei $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 0, x \leq y \leq 2 - x\}$. Berechnen Sie

$$\int_A (x^2 + 2y)\, \mathrm{d}(x, y).$$

(b) Es sei $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [0, \pi^{\frac{1}{7}}], |y| \leq x^2\}$. Berechnen Sie

$$\int_B x^7 y^2 \cos(xy^3)\, \mathrm{d}(x, y).$$

(c) Es sei $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 0, y \leq 0, x^2 + y^2 \leq 4\}$. Berechnen Sie

$$\int_C xy^2\, \mathrm{d}(x, y).$$

(d) Es sei $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x \geq 0, 0 \leq z \leq 4, 0 \leq y \leq z(1 - x)^3\}$. Berechnen Sie $V(D)$.

(e) Es sei $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z \geq 0, x \geq 0, \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. Bestimmen Sie $V(E)$.

(f) Es sei $0 < r < R$. Berechnen Sie das Volumen des Torus

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z \in [-r, r], R - \sqrt{r^2 - z^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R + \sqrt{r^2 - z^2}\}.$$