Karlsruher Institut für Technologie

26. Juli 2023
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
Henning Heister

Analysis für das Lehramt
Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 12

Dies ist ein Blatt mit Aufgaben im Stile von Klausuraufgaben zur Wiederholung des Stoffes. Der Umfang entspricht etwa zwei Klausuren.

Aufgabe 1 (Funktionentheorie)**.**

(a) Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil folgender komplexer Zahlen.

(i) $z_1 = \dfrac{1-2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$,

(ii) $z_2 = \left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^{2021}$,

(iii) $z_3 = \mathrm{i}^{\mathrm{i}}$,

(iv) $z_4 = \dfrac{3+\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})^2}$ und

(v) $z_5 = (\mathrm{i}-1)^{\mathrm{i}\pi}$.

(b) Es sei der Weg $\gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ ($t \in [0, 2\pi]$) gegeben. Berechnen Sie die folgenden Wegintegrale.

(i) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\mathrm{e}^{\sin(z)}}{z^2}\,\mathrm{d}z$,

(ii) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z\cos(z)}{z-2\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z$,

(iii) $\displaystyle\int_\gamma \overline{z}\mathrm{e}^{-|z|^2}\,\mathrm{d}z$,

(iv) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\cos(z)}{(z-1)^4}\,\mathrm{d}z$ (hier sei $\gamma(t) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$) und

(v) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\mathrm{e}^{-z^2}}{z^2+9}\,\mathrm{d}z$.

(c) (i) Es sei die Funktion f gegeben durch

$$f(z) = \frac{(z+1)\mathrm{e}^{-z}}{z^3 - 2z^2 - z + 2}.$$

Der Definitionsbereich sei die Menge aller $z \in \mathbb{C}$, für welche $f(z)$ erklärt ist.

(1) Bestimmen Sie Art und Lage aller isolierten Singularitäten von f.

(2) Es sei $\gamma_2(t) = 2 + 2e^{it}$ ($t \in [0, 2\pi]$). Berechnen Sie das Wegintegral

$$\int_{\gamma_2} f(z)\,dz.$$

(ii) Es sei die Funktion $f\colon \mathbb{C} \setminus \{i, -i\} \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{1+z^2}.$$

(1) Bestimmen Sie $\operatorname{res}(f, i)$.

(2) Für $r > 1$ sei $\gamma_r = \gamma_{1,r} \oplus \gamma_{2,r}$, wobei

$$\begin{aligned} \gamma_{1,r}&\colon [-r, r] \to \mathbb{C}, \quad \gamma_{1,r}(t) = t, \\ \gamma_{2,r}&\colon [0, \pi] \to \mathbb{C}, \quad \gamma_{2,r}(t) = re^{it}. \end{aligned}$$

Berechnen Sie $\int_{\gamma_r} f(z)\,dz$.

(3) Bestimmen Sie mithilfe des vorherigen Aufgabenteils den Wert des uneigentlichen Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2}\,dx.$$

(d) (i) Es sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$. Zeigen Sie, dass $f \equiv 0$ ist.

Hinweis: Der Satz von Liouville kann nützlich sein.

(ii) Bestimmen Sie alle holomorphe Funktionen $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die $f(\frac{1}{n}) = \frac{n+1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllen.

Hinweis: Identitätssatz.

Lösungsvorschlag.

(a) (i) Es gilt

$$z_1 = \frac{1-2i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{1+i-2i+2}{1+1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i.$$

(ii) Es gilt $\left|\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right| = 1$ und $\arg\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$. Daher ist $\frac{1+i}{\sqrt{2}} = e^{\frac{i\pi}{4}}$ und damit

$$z_2 = \left(e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^{2021} = e^{\frac{2021\,i\pi}{4}} = e^{505i\pi} e^{\frac{i\pi}{4}} = -e^{\frac{i\pi}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i.$$

(iii) Wegen $\log(\mathrm{i}) = \log(|\mathrm{i}|) + \mathrm{i}\arg(\mathrm{i}) = 0 + \mathrm{i}\frac{\pi}{2}$ gilt

$$z_3 = \mathrm{i}^{\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\log(\mathrm{i})\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}^2} = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}.$$

(iv) Es gilt

$$\begin{aligned} z_4 &= \frac{3+\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})^2} \\ &= \frac{(3+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})^2}{|1-\mathrm{i}|^4} \\ &= \frac{(3+\mathrm{i})2\mathrm{i}}{4} \\ &= \frac{-2+6\mathrm{i}}{4} \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{i}, \end{aligned}$$

also $\operatorname{Re} z_4 = -1/2$ und $\operatorname{Im} z_4 = 3/2$.

(v) Es gilt

$$\begin{aligned} z_5 &= (\mathrm{i}-1)^{\mathrm{i}\pi} \\ &= \exp(\log(\mathrm{i}-1)\mathrm{i}\pi) \\ &= \exp((\ln|\mathrm{i}-1| + \mathrm{i}\arg(\mathrm{i}-1))\mathrm{i}\pi) \\ &= \exp\Big(\Big(\ln\sqrt{2} + \mathrm{i}3\pi/4\Big)\mathrm{i}\pi\Big) \\ &= \exp\Big(-3\pi^2/4 + \mathrm{i}\ln\sqrt{2}\pi\Big) \\ &= \exp(-3\pi^2/4)\Big(\cos\Big(\ln\Big(\sqrt{2}\pi\Big)\Big) + \mathrm{i}\sin\Big(\ln\Big(\sqrt{2}\pi\Big)\Big)\Big), \end{aligned}$$

also $\operatorname{Re} z_5 = \exp(-3\pi^2/4)\cos(\ln(\sqrt{2})\pi)$ und $\operatorname{Im} z_5 = \exp(-3\pi^2/4)\sin(\ln(\sqrt{2})\pi)$.

(b) (i) Definiere $f(z) = \mathrm{e}^{\sin(z)}$ ($z \in \mathbb{C}$). Dann gilt: $f \in H(\mathbb{C})$ und $f'(z) = \cos(z)\mathrm{e}^{\sin(z)}$ ($z \in \mathbb{C}$), insbesondere ist $f'(0) = 1$. Da 0 im Inneren von γ liegt und der Weg γ geschlossen und mathematisch positiv orientiert ist, gilt $\operatorname{ind}_\gamma(0) = 1$. Mit der Cauchyschen Integralformel für Ableitungen folgt daher:

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{e}^{\sin(z)}}{z^2}\,\mathrm{d}z = \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-0)^2}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}f'(0)\,\operatorname{ind}_\gamma(0) = 2\pi\mathrm{i}.$$

Alternativ lässt sich das Integral auch mit dem Residuensatz berechnen.

(ii) Definiere $f(z) = \frac{z\cos(z)}{z-2\mathrm{i}}$ ($z \in \Omega = K(0, \frac{3}{2})$). Dann ist Ω konvex und da $2\mathrm{i} \notin \Omega$, ist $f \in H(\Omega)$. Nun folgt aus dem Cauchyschen Integralsatz

$$\int_\gamma \frac{z\cos(z)}{z-2\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Alternativ lässt sich das Integral auch mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel berechnen: Definieren wir $g(z) = z\cos(z)$ ($z \in \mathbb{C}$), so gilt $g \in H(\mathbb{C})$. Da $2\mathrm{i}$ nicht im Inneren von γ liegt, gilt $\mathrm{ind}_\gamma(2\mathrm{i}) = 0$. Aus der Cauchyschen Integralformel folgt daher

$$\int_\gamma \frac{z\cos(z)}{z-2\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z = \int_\gamma \frac{g(z)}{z-2\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\, g(2\mathrm{i})\ \mathrm{ind}_\gamma(2\mathrm{i}) = 0.$$

(iii) Da der Integrand nicht holomorph ist, ist weder der Cauchysche Integralsatz noch die Cauchysche Integralformel anwendbar. Daher berechnen wir das Wegintegral auf direktem Wege. Es gilt $\gamma'(t) = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ ($t \in [0, 2\pi]$) und damit

$$\int_\gamma \overline{z}\mathrm{e}^{-|z|^2}\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\mathrm{e}^{-1}\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,dt = \int_0^{2\pi} \mathrm{i}\mathrm{e}^{-1}\,dt = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-1}$$

(iv) Mit der Cauchyschen Integralformel für Ableitungen folgt

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{\cos z}{(z-1)^4}\,\mathrm{d}z &= \frac{2\pi\mathrm{i}}{3!}\left(\frac{3!}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{\cos z}{(z-1)^4}\,\mathrm{d}z\right)\\ &= \frac{\pi\mathrm{i}}{3}\cos^{(3)} 1\\ &= \frac{\pi\mathrm{i}}{3}\sin 1.\end{aligned}$$

(v) Die Funktion $f\colon B(0,3) \to \mathbb{C},\ z \mapsto \exp(-z^2)/(z^2+9)$ ist holomorph. Mit dem Cauchyschen Integralsatz folgt $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

(c) (i) (1) Die Funktion f ist in den Nullstellen des Nenners nicht definiert. Durch Polynomdivision erhält man für $z \in \mathbb{C}$

$$z^3 - 2z^2 - z + 2 = (z+1)(z-1)(z-2).$$

$z = -1$ Es gilt

$$\lim_{z\to -1} f(z) = \lim_{z\to -1} \frac{(z+1)\mathrm{e}^{-z}}{(z+1)(z-1)(z-2)} = \lim_{z\to -1} \frac{\mathrm{e}^{-z}}{(z-1)(z-2)} = \frac{e}{6}.$$

Insbesondere ist f in einer punktierten Umgebung um -1 beschränkt. Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz ist -1 eine hebbare Singularität.

$z = 1, z = 2$ Es gelten

$$\lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = \lim_{z\to 1}\frac{(z-1)(z+1)\mathrm{e}^{-z}}{(z+1)(z-1)(z-2)} = \lim_{z\to 1}\frac{\mathrm{e}^{-z}}{z-2} = -\mathrm{e}^{-1} \neq 0,$$
$$\lim_{z\to 2}(z-2)f(z) = \lim_{z\to 2}\frac{(z-2)(z+1)\mathrm{e}^{-z}}{(z+1)(z-1)(z-2)} = \lim_{z\to 2}\frac{\mathrm{e}^{-z}}{z-1} = \mathrm{e}^{-2} \neq 0.$$

Also hat f in 1 und 2 jeweils einen Pol erster Ordnung.

(2) Nach (a) ist $F\colon \mathbb{C}\backslash\{1,2\} \to \mathbb{C}, F(z) = \frac{\mathrm{e}^{-z}}{(z-1)(z+2)}$ eine meromorphe Fortsetzung von f. Nach (a) gelten für die Residuen $\operatorname{Res}(F,1) = \operatorname{Res}(f,1) = -\mathrm{e}^{-1}$ und $\operatorname{Res}(F,2) = \operatorname{Res}(f,2) = \mathrm{e}^{-2}$. Da γ_2 ein stückweise stetig differenzierbarer Weg in $\mathbb{C}\backslash\{1,2\}$ und positiv orientiert ist mit $\operatorname{ind}_{\gamma_2}(1) = \operatorname{ind}_{\gamma_2}(2) = 1$, folgt aus dem Residuensatz

$$\int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} F(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\,(\operatorname{Res}(F,1) + \operatorname{Res}(F,2)) = 2\pi\mathrm{i}(\mathrm{e}^{-2} - \mathrm{e}^{-1}).$$

(ii) (1) Es gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{res}(f,\mathrm{i}) &= \lim_{z\to\mathrm{i}}(z-\mathrm{i})f(z)\\ &= \lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z+\mathrm{i}}\\ &= \frac{\mathrm{e}^{-1}}{2\mathrm{i}}.\end{aligned}$$

(2) Mit dem Residuensatz ergibt sich

$$\int_{\gamma_r} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}(n(\gamma_r,\mathrm{i})\operatorname{res}(f,\mathrm{i}) + n(\gamma_r,-\mathrm{i})\operatorname{res}(f,-\mathrm{i})) = 2\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{-1}}{2\mathrm{i}} = \pi\mathrm{e}^{-1}.$$

(3) Es gilt nach der vorherigen Rechnung

$$\begin{aligned}\pi\mathrm{e}^{-1} &= \int_{\gamma_r} f(z)\,\mathrm{d}z\\ &= \int_{\gamma_{1,r}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_{2,r}} f(z)\,\mathrm{d}z\\ &= I_1 + I_2.\end{aligned}$$

Da zudem

$$|f(z)| \leq \frac{1}{|1+z^2|} \leq \frac{1}{|z|^2-1} = \frac{1}{r^2-1}$$

für $r > 1$ und $z \in \operatorname{Spur}(\gamma_{2,r})$, folgt

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_{2,r}} f(z)\,\mathrm{d}z\right| &\leq \sup_{z\in\operatorname{Spur}(\gamma_{2,r})} |f(z)| L(\gamma_{2,r}) \\ &\leq \frac{1}{r^2-1}\pi r \\ &\to 0\end{aligned}$$

für $r \to \infty$. Zudem gilt

$$\int_{\gamma_{1,r}} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-r}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-r}^{r} \frac{\cos x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int_{-r}^{r} \frac{\sin x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x,$$

wobei das letzte Integral 0 ist, da der Integrand ungerade ist. Aus den vorherigen Überlegungen folgt für $r \to \infty$

$$\pi \mathrm{e}^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

(d) (i) Da $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = 0$ gilt, existiert ein $R > 0$ mit $|f(z)| \leq 1$ für alle $|z| \geq R$. Als stetige Funktion nimmt $|f|$ auf dem Kompaktum $K = \overline{K(0,R)}$ ein Maximum an, d.h., es existiert $M = \max_{z\in K} |f(z)|$. Setzen wir $C = \max\{1, M\}$, so folgt

$$|f(z)| \leq C \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Also ist f beschränkt, und damit nach dem Satz von Liouville konstant, d.h., es gilt $f \equiv c$ für ein $c \in \mathbb{C}$. Dann gilt aber auch

$$c = \lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0,$$

also $f \equiv 0$.

(ii) Definiere $z_n = 1 + 1/n$ und $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto 1 + z$. Dann $f, g \in H(\mathbb{C})$ und $f(z_n) = g(z_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiter $z_n \to 1 \in \operatorname{Bild} f \cap \operatorname{Bild} g = \mathbb{C}$ für $n \to \infty$. Mit dem Identitätssatz folgt $f = g$. Also ist g die einzige Funktion mit dieser Eigenschaft.

Aufgabe 2 (Differentialgleichungen)**.**

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Anfangswertprobleme eindeutig lösbar sind und bestimmen Sie die nicht fortsetzbaren Lösungen $u\colon (\omega_-, \omega_+) \to \mathbb{R}$.

(i) $u'(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{u(t)} - 1}{t\mathrm{e}^{u(t)}}, \quad t > 0, \quad u(1) = \ln(2).$

(ii) $u'(t) = \dfrac{te^{u(t)^2}}{u(t)}, \quad u(0) = \sqrt{\ln(4)}.$
Bestimmen Sie hier zudem ω_- und ω_+ sowie die Grenzwerte $\lim_{t\to\omega_-} u(t)$ und $\lim_{t\to\omega_+} u(t)$.

(b) (i) Was ist ein erstes Integral einer autonomen Differentialgleichung? Geben Sie die Definition an.

(ii) Bestimmen Sie für die folgenden beiden Differentialgleichungen jeweils ein (nicht konstantes) erstes Integral.

(1) $(u,v)'(t) = (1, 1 + u(t) + 2v(t))$.

Hinweis: Wählen Sie λ nur abhängig von x.

(2) $(u,v)'(t) = \big(\cos(v(t))u(t)^2 + 4v(t)^3, -4u(t) - 2u(t)\sin(v(t))\big)$.
Folgern Sie, dass jede Lösung beschränkt sein muss.

(c) Es seien $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 > 0$. Berechnen Sie die stationären Stellen der folgenden Differentialgleichungen und untersuchen Sie diese auf asymptotische Stabilität bzw. Instabilität.

(i) $(u,v)'(t) = \big(u(t) - u(t)v(t)^2, -4v(t) + u(t)^2\big)$ und

(ii) $(u,v)'(t) = (-\alpha_1 u(t) + \alpha_2 u(t)v(t), -\beta_1 v(t) + \beta_2 u(t)v(t))$.

Lösungsvorschlag.

(a) (i) Definiere $f\colon (0,\infty)\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(t,x) \mapsto (e^x - 1)/(te^x)$ und $(t_0, x_0) = (1, \ln 2)$. Dann ist f lokal Lipschitz stetig bezüglich x, da f bezüglich x stetig differenzierbar ist und stetig. Somit gibt es eine eindeutige Lösung des Anfangswertproblems nach Picard–Lindelöf. Wir erhalten die Lösung durch Trennung der Variablen.

$$\int_1^t \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s = \ln t \text{ und}$$
$$\int_{\ln 2}^u \frac{e^v}{e^v - 1}\,\mathrm{d}v = \ln(e^u - 1),$$

also

$$u(t) = \ln(1 + t).$$

Damit gilt auch (da $t > 0$ gefordert ist) $(\omega_-, \omega_+) = (0, \infty)$.

(ii) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}\times(0,\infty) \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(t,x) = \frac{te^{x^2}}{x}$ $((t,x) \in \mathbb{R}^2)$. Es gilt: f ist stetig auf $\mathbb{R}\times(0,\infty)$ und stetig partiell differenzierbar bezüglich x. Somit ist f lokal Lipschitz stetig auf $\mathbb{R}\times(0,\infty)$ bezüglich x. Mit dem Satz

von Picard–Lindelöf folgt, dass das Anfangswertproblem mit der Anfangsbedingung eindeutig lösbar ist und eine nicht fortsetzbare Lösung $u\colon (\omega_-, \omega_+) \to \mathbb{R}$ besitzt. Weiter gilt $f(t,x) = g(t)h(x)$ $((t,x) \in \mathbb{R}^2)$ mit $g(t) = t$ $(t \in \mathbb{R})$ und $h(x) = \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x}$ $(x \in (0,\infty))$. Es gilt $h(\sqrt{\ln(4)}) = 4(\ln(4))^{-\frac{1}{2}} \neq 0$ und g ist nicht die Nullfunktion. Somit kann durch Auflösen der folgenden Gleichung die Lösung u gefunden werden. Mit $t_0 = 0$, $u_0 = \sqrt{\ln(4)}$ gilt dann für $t \in (\omega_-, \omega_+)$

$$\int_{t_0}^{t} g(s)\,\mathrm{d}s = \int_{u_0}^{u(t)} \frac{1}{h(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Nun ist

$$\int_{t_0}^{t} g(s)\,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} s\,\mathrm{d}s = \left[\frac{1}{2}s^2\right]_{s=0}^{s=t} = \frac{1}{2}t^2 \quad \text{und}$$

$$\int_{u_0}^{u(t)} h(x)\,\mathrm{d}x = \int_{u_0}^{u(t)} x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}\right]_{x=u_0}^{x=u(t)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \mathrm{e}^{-u(t)^2}\right).$$

Damit erhalten wir

$$t^2 = \frac{1}{4} - \mathrm{e}^{-u(t)^2} \quad \overset{u_0>0}{\Longrightarrow} \quad u(t) = \sqrt{-\ln\left(\frac{1}{4} - t^2\right)} \quad (t \in (\omega_-, \omega_+)).$$

Damit $u(t)$ in obiger Gleichung definiert ist, muss $-\ln(\frac{1}{4} - t^2) \geq 0$, also $\frac{1}{4} - t^2 \in (0,1]$ gelten. Dies ist genau dann der Fall, wenn $t \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Hieraus lesen wir $\omega_- = -\frac{1}{2}$ und $\omega_+ = \frac{1}{2}$ ab. Es ist also

$$u\colon \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \to \mathbb{R},\ u(t) = \sqrt{-\ln\left(\frac{1}{4} - t^2\right)}$$

die eindeutige nicht fortsetzbare Lösung des Anfangswertproblems und aus der Beziehung $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ erhalten wir die Grenzwerte

$$\lim_{t\to -\frac{1}{2}^+} u(t) = \lim_{t\to \frac{1}{2}^-} u(t) = \infty.$$

(b) (i) Es seien $u'(t) = f(u(t))$ und $f\colon D \to \mathbb{R}^d$ stetig, wobei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. Dann heißt $H \in C^1(D, \mathbb{R})$ ein erstes Integral der obigen Differentialgleichung, falls für alle $x \in D$ gilt, dass $(H'(x) \mid f(x)) = 0$.

(ii) (1) Die Integrabilitätsbedingung für

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} g(x,y) \\ h(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + x + 2y \end{pmatrix}$$

ist gegeben durch $-(\lambda h)_y = (\lambda g)_x$. Mit dem Ansatz $\lambda = \lambda(x)$ folgt

$$\begin{aligned} & (-hy)\lambda = g_x\lambda + g\lambda'(x) \\ \implies & -2\lambda(x) = \lambda'(x) \\ \implies & \lambda(x) = \mathrm{e}^{-2x} \\ \implies & H'(x,y) = \lambda(x)\begin{pmatrix} -h(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix} \\ \implies & H(x,y) = \mathrm{e}^{-2x}\Big(\frac{1}{2}x + y + \frac{3}{4}\Big), \end{aligned}$$

wobei wir die anfallende Konstante auf 0 gesetzt haben.

(2) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei definiert durch

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} g(x,y) \\ h(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(y)x^2 + 4y^3 \\ -4x - 2x\sin(y) \end{pmatrix} \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

Dann lässt sich die Differentialgleichung aus der Aufgabenstellung schreiben als

$$(u,v)'(t) = f(u(t),v(t)). \tag{1}$$

Es gilt $f \in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$. Als Ansatz für ein erstes Integral wählt man wie in der Vorlesung

$$H'(x,y) = \lambda(x,y)\begin{pmatrix} -h(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$$

mit einer noch zu bestimmenden Funktion $\lambda\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die die Integrabilitätsbedingung $\frac{d}{dy}(-\lambda h) \overset{!}{=} \frac{d}{dx}(\lambda g)$ erfüllt. Nun ist

$$-\frac{d}{dy}h(x,y) = 2x\cos(y) = \frac{d}{dx}g(x,y) \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2),$$

sodass $\lambda(x,y) \equiv 1$ $((x,y) \in \mathbb{R})$ die Integrabilitätsbedingung erfüllt. Somit erhält man den Ansatz

$$H'(x,y) = \begin{pmatrix} 4x + 2x\sin(y) \\ \cos(y)x^2 + 4y^3 \end{pmatrix} \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

Integrieren der ersten Komponente bezüglich x ergibt (für ein $C_1 \in C^1(\mathbb{R})$):

$$H(x,y) = x^2(2+\sin(y)) + C_1(y),$$

und Integrieren der zweiten Komponente bezüglich y ergibt (für ein $C_2 \in C^1(\mathbb{R})$):

$$H(x,y) = \sin(y)x^2 + y^4 + C_2(x).$$

Gleichsetzen ergibt

$$\begin{aligned} &2x^2 + C_1(y) \overset{!}{=} y^4 + C_2(x) \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2) \\ \iff &C_1(y) - y^4 = C_2(x) - 2x^2 \equiv c \quad \text{für ein } c \in \mathbb{R} \text{ und alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Es muss also $C_1(y) = y^4 + c$ $(y \in \mathbb{R})$ sein. Wir wählen $c = 0$ und erhalten das erste Integral

$$H(x,y) = (2+\sin(y))x^2 + y^4 \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

Es sei nun $(u,v) : I \to \mathbb{R}^2$ eine Lösung von (1). Nach Satz 12.1 gilt

$$H(u(t),v(t)) = c \quad (t \in I)$$

für ein $c \in \mathbb{R}$. Da $2+\sin(y) \geq 1$ $(y \in \mathbb{R})$ gilt, haben wir

$$\begin{aligned} &u(t)^2 \leq (2+\sin(v(t)))u^2(t) \leq H(u(t),v(t)) = c \text{ und} \\ &v(t)^4 \leq H(u(t),v(t)) = c \quad (t \in I) \\ \Longrightarrow &|u(t)| \leq \sqrt{c} \quad \text{und} \quad |v(t)| \leq \sqrt[4]{c} \quad (t \in I). \end{aligned}$$

Dies zeigt die Beschränktheit von u und v.

(c) (i) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei definiert durch

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x - xy^2 \\ -4y + x^2 \end{pmatrix} \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2).$$

Damit ist die Differentialgleichung gegeben durch

$$(u,v)'(t) = f(u(t),v(t)).$$

Die stationären Stellen der Differentialgleichung sind die Nullstellen von f. Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$f(x,y) = (0,0) \iff x(1-y^2) = 0 \wedge x^2 = 4y.$$

Aus $x(1-y^2) = 0$ folgt $x = 0$ oder $y = \pm 1$. Wir unterscheiden diese beiden Fälle:

1. Fall: $x = 0$ Dann folgt wegen $0 = x^2 = 4y$, dass auch $y = 0$ ist. Wir erhalten also $(x, y) = (0, 0)$.

2. Fall: $y = \pm 1$ Wegen $4y = x^2 \geq 0$ folgern wir $y = 1$. Damit ist $x^2 = 4$, also $x = \pm 2$. Wir erhalten also $(x, y) = (\pm 2, 1)$.

Insgesamt sind also $(0, 0)$, $(2, 1)$ und $(-2, 1)$ die stationären Stellen der Differentialgleichung.
Für die Stabilitätsuntersuchung verwenden wir den Stabilitätssatz und den Instabilitätssatz aus der Vorlesung (Sätze 13.1 und 13.3). Dazu stellen wir zunächst fest, dass $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ gilt mit

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} 1 - y^2 & -2xy \\ 2x & -4 \end{pmatrix} \quad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

Wir setzen $A_1 = f'(0, 0)$, $A_2 = f'(2, 1)$ und $A_3 = f'(-2, 1)$ und bestimmen im Folgenden $s_k = \max_{\lambda \in \sigma(A_k)} \mathrm{Re}(\lambda)$ für $k \in \{1, 2, 3\}$, wobei $\sigma(A)$ die Menge der Eigenwerte einer Matrix A bezeichnet. Dann können wir anhand des Vorzeichens von s_k die asymptotische Stabilität bzw. Instabilität ablesen. Es ist

$$\begin{aligned} A_1 = f'(0, 0) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \\ \Longrightarrow \sigma(A_1) &= \{-4, 1\} \\ \Longrightarrow s_1 = 1 > 0 &\Longrightarrow (0, 0) \text{ ist instabil.} \end{aligned}$$

Weiter ist

$$A_{2/3} = f'(\pm 2, 1) = \begin{pmatrix} 0 & \mp 4 \\ \pm 4 & -4 \end{pmatrix},$$

womit das charakteristische Polynom gegeben ist durch

$$\mathrm{char}_{A_{2/3}}(\lambda) = \det(A_{2/3} - \lambda I) = \lambda(4 + \lambda) + 16 = \lambda^2 + 4\lambda + 16 \quad (\lambda \in \mathbb{C}).$$

Hieraus folgt

$$\mathrm{char}_{A_{2/3}}(\lambda) = 0 \iff \lambda^2 + 4\lambda + 16 = 0 \iff \lambda = -2 \pm \sqrt{12}i$$

und damit

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \sigma(A_{2/3}) = \{-2 + \sqrt{12}i, -2 - \sqrt{12}i\} \Longrightarrow s_{2/3} = -2 < 0 \\ &\Longrightarrow (2, 1) \text{ und } (-2, 1) \text{ sind asymptotisch stabil.} \end{aligned}$$

(ii) Mit

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} -\alpha_1 x + \alpha_2 xy \\ -\beta_1 y + \beta_2 xy \end{pmatrix}$$

folgt

$$\begin{aligned} & f(x,y) = 0 \\ \iff & (-\alpha_1 + \alpha_2 y)x = 0 \\ & \wedge(-\beta_1 + \beta_2 x)y = 0 \\ \iff & (x,y) \in \left\{(0,0), \left(\frac{\beta_1}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Da

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} -\alpha_1 + \alpha_2 y & \alpha_2 x \\ \beta_2 y & -\beta_1 + \beta_2 x \end{pmatrix}$$

folgt

$$f'(0,0) = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & 0 \\ 0 & -\beta_1 \end{pmatrix},$$

also $\sigma(f'(0,0)) = \{-\alpha_1, -\beta_1\}$. Da der Realteil aller Eigenwerte kleiner als 0 ist, ist diese stationäre Stelle asymptotisch stabil. Ferner gilt

$$f'\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\beta_1\alpha_2}{\beta_2} \\ \frac{\beta_2\alpha_1}{\alpha_2} & 0 \end{pmatrix},$$

also sind die Eigenwerte $\pm\sqrt{\alpha_1\beta_1}$ also ist diese stationäre Stelle instabil. □

Aufgabe 3 (Integral- und Volumenberechnung)**.**

(a) Es sei $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, x \leq y \leq 2 - x\}$. Berechnen Sie

$$\int_A (x^2 + 2y)\,\mathrm{d}(x,y).$$

(b) Es sei $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, \pi^{\frac{1}{7}}], |y| \leq x^2\}$. Berechnen Sie

$$\int_B x^7 y^2 \cos(xy^3)\,\mathrm{d}(x,y).$$

(c) Es sei $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \leq 0, x^2 + y^2 \leq 4\}$. Berechnen Sie

$$\int_C xy^2\,\mathrm{d}(x,y).$$

(d) Es sei $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x \geq 0, 0 \leq z \leq 4, 0 \leq y \leq z(1-x)^3\}$. Berechnen Sie $V(D)$.

(e) Es sei $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z \geq 0, x \geq 0, \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. Bestimmen Sie $V(E)$.

(f) Es sei $0 < r < R$. Berechnen Sie das Volumen des Torus

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z \in [-r,r], R - \sqrt{r^2 - z^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R + \sqrt{r^2 - z^2}\}.$$

Lösungsvorschlag.

(a) Wir stellen zunächst fest, dass A ein Normalbereich bzgl. der x-Achse ist: Definieren wir die stetigen Funktionen

$$f, g : \ [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = x, \ g(x) = 2 - x,$$

so folgt

$$A = M_{f,g} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [0,1], f(x) \leq y \leq g(x)\},$$

denn die Inklusion $A \supseteq M_{f,g}$ folgt unmittelbar aus der Definition von A und für die Inklusion $A \subseteq M_{f,g}$ muss für $(x,y) \in A$ nur noch $x \leq 1$ gezeigt werden. Dies folgt allerdings unmittelbar aus der Ungleichung $x \leq 2 - x$ in der Definition von A.
Da die Funktion $h : \ A \to \mathbb{R}$, $h(x,y) = x^2 + 2y$ stetig und A ein Normalbereich bzgl. der x-Achse ist, erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&\int_A h(x,y) \mathrm{d}(x,y) = \int_0^1 \left(\int_x^{2-x} \left(x^2 + 2y\right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left[x^2 y + y^2\right]_{y=x}^{y=2-x} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x^2(2-2x) + (2-x)^2 - x^2 \, \mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}(2-x)^3 - \frac{1}{3}x^3 \right]_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{2}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{8}{3} = \frac{13}{6}.
\end{aligned}$$

(b) Da B ein Normalbereich ist, folgt wie vorhin

$$\begin{aligned}
\int_B x^7 y^2 \cos\left(xy^3\right) \mathrm{d}(x,y) &= \int_0^{\pi^{1/7}} \int_{-x^2}^{x^2} y^2 x^7 \cos\left(xy^3\right) \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi^{1/7}} \left[\frac{x^6}{3} \sin\left(xy^3\right) \right]_{y=-x^2}^{x^2} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi^{1/7}} \frac{2}{3} x^6 \sin\left(x^7\right) \mathrm{d}x \\
&= -\frac{2}{37} \left[\cos\left(x^7\right) \right]_{x=0}^{\pi^{1/7}} \\
&= \frac{4}{21}.
\end{aligned}$$

(c) Definiere die stetig differenzierbare Funktion

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad g(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

und setze $\tilde{C} = [0,2] \times [-\frac{\pi}{2}, 0] \subseteq \mathbb{R}^2$. Dann ist $\tilde{C}$ (als kompaktes Intervall) messbar und kompakt. Es gilt: g ist injektiv auf $\tilde{C}$, also insbesondere auch auf dem Inneren $\tilde{C}^\circ$ von $\tilde{C}$ und

$$\det(g'(r,\varphi)) = r \neq 0 \quad ((r,\varphi) \in \tilde{C}^\circ).$$

Da $f(x,y) = xy^2$ ($(x,y) \in \mathbb{R}^2$) auf C stetig ist und $C = g(\tilde{C})$ gilt, folgt mit der Substitutionsregel (Satz 15.6):

$$\int_C f(x,y)\, d(x,y) = \int_{\tilde{C}} f(g(r,\varphi))|\det(g'(r,\varphi))|\, \mathrm{d}(r,\varphi).$$

Mit dem Satz von Fubini (Satz 15.3) folgt:

$$\begin{aligned}\int_C f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) &= \int_{\tilde{C}} r\cos(\varphi) r^2 \sin^2(\varphi) r\,\mathrm{d}(r,\varphi) = \int_0^2 \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 r^4 \cos(\varphi)\sin^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}r \\ &= \int_0^2 r^4 \left[\frac{1}{3}(\sin(\varphi))^3 \right]_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\varphi=0} \mathrm{d}r = \int_0^2 \frac{1}{3} r^4\,\mathrm{d}r = \left[\frac{1}{15} r^5 \right]_{r=0}^{r=2} = \frac{32}{15}.\end{aligned}$$

(d) Die Menge $D \subseteq \mathbb{R}^3$ ist messbar und für $z \in [0,4]$ setzen wir

$$Q(z) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x,y,z) \in D\}.$$

Weiter gilt, dass $Q(z)$ ein Normalbereich bzgl. der x-Achse und damit insbesondere messbar ist: In der Tat, für $z \in [0,4]$ gilt

$$Q(z) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [0,1], 0 \leq y \leq z(1-x)^3\}$$

und daher

$$V(Q(z)) = \int_0^1 z(1-x)^3\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{z(1-x)^4}{4} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{z}{4}.$$

Mit dem Prinzip von Cavalieri (Satz 15.5) folgt nun

$$V(D) = \int_0^4 V(Q(z))\,\mathrm{d}z = \int_0^4 \frac{z}{4}\,\mathrm{d}z = \left[\frac{1}{8} z^2 \right]_{z=0}^{z=4} = 2.$$

(e) Mit einer ähnlichen Überlegung wie bei den Polarkoordinaten wenden wir hier Kugelkoordinaten an mit

$$g(r,\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\sin\vartheta \\ r\sin\varphi\sin\vartheta \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

und $|\det \varphi'| = r^2|\sin\vartheta|$, also mit $\tilde{E} = [1/2] \times [-\pi/2, \pi/2] \times [0, \pi/2]$

$$\begin{aligned} |E| &= \int_{\tilde{E}} 1r^2|\sin\vartheta| \,\mathrm{d}(r,\varphi,\vartheta) \\ &= \pi\left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=1/2}^{1} \int_0^{\pi/2} \sin\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta \\ &= \pi\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{24}\right)[-\cos\vartheta]_{\vartheta=0}^{\pi/2} \\ &= \frac{7}{24}\pi. \end{aligned}$$

(f) Für Rotationskörper gilt

$$\begin{aligned} |T| &= \pi \int_{-r}^{r} \left(R + \sqrt{r^2 - z^2}\right)^2 - \left(R - \sqrt{r^2 - z^2}\right)^2 \mathrm{d}z \\ &= \pi \int_{-r}^{r} 4R\sqrt{r^2 - z^2} \,\mathrm{d}z \\ &= 4\pi R r^2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - z^2} \,\mathrm{d}z \\ &= 2\pi R \pi r^2. \end{aligned}$$

□