

Skript zur Vorlesung

# Differentialgleichungen und Hilberträume

Sommersemester 2011

Michael Plum

27. März 2012

# Inhaltsverzeichnis

|           |                                                                                            |           |
|-----------|--------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b>  | <b>Modellierung mit Differentialgleichungen</b>                                            | <b>1</b>  |
| 1.1       | Newtonsche Bewegungsgleichung . . . . .                                                    | 1         |
| 1.2       | Harmonischer Oszillator . . . . .                                                          | 1         |
| 1.3       | Mathematisches Pendel . . . . .                                                            | 2         |
| 1.4       | Lienard-Gleichungen für elektrische Schwingkreise . . . . .                                | 3         |
| 1.5       | Verfolger-Beute-Modell . . . . .                                                           | 4         |
| <b>2</b>  | <b>Die Phasenebene, erste Integrale</b>                                                    | <b>6</b>  |
| 2.1       | Beispiele . . . . .                                                                        | 8         |
| 2.1.1     | Newtonsche Bewegungsgleichung . . . . .                                                    | 8         |
| 2.1.2     | Allgemeinere Kraft . . . . .                                                               | 9         |
| 2.1.3     | Mathematisches Pendel . . . . .                                                            | 10        |
| 2.1.4     | Verfolger-Beute-Modell . . . . .                                                           | 12        |
| <b>3</b>  | <b>Stabilität bei linearen Systemen</b>                                                    | <b>14</b> |
| <b>4</b>  | <b>Stabilität bei nichtlinearen Systemen</b>                                               | <b>19</b> |
| <b>5</b>  | <b>Lineare Randwertprobleme mit gewöhnlichen Differentialgleichungen</b>                   | <b>25</b> |
| <b>6</b>  | <b>Die Greensche Funktion</b>                                                              | <b>30</b> |
| <b>7</b>  | <b>Die eindimensionale Wellengleichung</b>                                                 | <b>38</b> |
| <b>8</b>  | <b>Hilbert- und Banachräume</b>                                                            | <b>43</b> |
| <b>9</b>  | <b>Lineare Operatoren und Funktionale</b>                                                  | <b>55</b> |
| 9.1       | Beispiele . . . . .                                                                        | 57        |
| <b>10</b> | <b>Orthogonalprojektionen, Orthonormalsysteme und -basen</b>                               | <b>59</b> |
| <b>11</b> | <b>Darstellung linearer Funktionalen im Hilbertraum</b>                                    | <b>71</b> |
| <b>12</b> | <b>Die Sobolevräume <math>H^1(\Omega)</math> und <math>H_0^1(\Omega)</math></b>            | <b>73</b> |
| <b>13</b> | <b>Dirichlet-Randwertproblem für die Poisson-Gleichung</b>                                 | <b>77</b> |
| <b>14</b> | <b>Der Spektralsatz für kompakte symmetrische Operatoren</b>                               | <b>79</b> |
| <b>15</b> | <b>Symmetrische Eigenwertprobleme mit gewöhnlichen Differentialgleichungen</b>             | <b>85</b> |
| <b>16</b> | <b>Separation der Variablen bei einigen elementaren partiellen Differentialgleichungen</b> | <b>89</b> |

# 1 Modellierung mit Differentialgleichungen

Wir beschäftigen uns zunächst mit Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen der Form

$$\dot{x} = g(x, y), \quad \dot{y} = h(x, y) \quad (1)$$

mit gegebenen  $g, h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\cdot = \frac{d}{dt}$ . Gesucht sind Lösungen  $(x(t), y(t))$ . Dabei hängen  $g$  und  $h$  nicht explizit von  $t$  ab; das System (1) wird daher „autonom“ genannt.

Bevor wir qualitative und quantitative Eigenschaften von (1) untersuchen, wollen wir einige Beispiele betrachten, in denen naturwissenschaftliche Phänomene mit Systemen der Form (1) modelliert werden.

## 1.1 Newtonsche Bewegungsgleichung

Ein Massepunkt (mit Masse  $m$ ) befinde sich in einem (eindimensionalen) Kraftfeld  $F(x, v)$ , das von der Position  $x$  und der Geschwindigkeit  $v$  des Massepunktes abhängt. Nach Newton bewegt sich der Massepunkt auf einer Bahn  $x(t)$  (in  $\mathbb{R}$ ), die der Differentialgleichung

$$m\ddot{x} = F(x, \dot{x}) \quad (2)$$

genügt ( $\dot{x}(t) = v(t)$  Geschwindigkeit zur Zeit  $t$ ).

„Masse · Beschleunigung = Kraft“.

Führen wir die Geschwindigkeit  $y(t) = \dot{x}(t)$  als zusätzliche neue Variable ein, so ist (2) offenbar äquivalent zum System

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \frac{1}{m}F(x, y) \quad (3)$$

der Form (1).

## 1.2 Harmonischer Oszillator

Wir betrachten als Spezialfall das Kraftfeld, das durch eine aus der Ruhelage ausgelenkte Feder erzeugt wird. Nach dem Hookeschen Gesetz ist diese Kraft (idealisiert) gegeben durch

$$F(x, v) = -Dx. \quad (D > 0 : \text{Federkonstante}).$$

Das Minuszeichen kommt daher, daß die Kraft entgegen der Auslenkung  $x$  (aus der Ruhelage 0) wirkt. Die Differentialgleichung (2) lautet somit

$$m\ddot{x} = -Dx \quad (4)$$

und wird Differentialgleichung für den harmonischen Oszillator genannt. Mit den Methoden der Grundvorlesung Analysis erhalten wir: (4) hat genau die Lösungen

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

mit der Frequenz  $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$  und beliebigen  $A, B \in \mathbb{R}$ . Das äquivalente System (3) lautet (zunächst mit den Variablenbezeichnungen  $\tilde{x}, \tilde{y}$  statt  $x, y$ ):

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{y}, \quad \dot{\tilde{y}} = -\omega^2 \tilde{x}.$$

Setzen wir  $x(t) = \tilde{x}\left(\frac{t}{\omega}\right)$ ,  $y(t) = \frac{1}{\omega} \tilde{y}\left(\frac{t}{\omega}\right)$ , so erhalten wir das äquivalente System

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{1}{\omega} \dot{\tilde{x}}\left(\frac{t}{\omega}\right) = \frac{1}{\omega} \tilde{y}\left(\frac{t}{\omega}\right) = y(t), \\ \dot{y}(t) &= \frac{1}{\omega^2} \dot{\tilde{y}}\left(\frac{t}{\omega}\right) = \frac{1}{\omega^2} \left(-\omega^2 \tilde{x}\left(\frac{t}{\omega}\right)\right) = -x(t), \end{aligned}$$

also

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x. \quad (5)$$

Das *lineare* System können wir auch in Matrix-Vektor-Schreibweise notieren:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Mit den Methoden der Grundvorlesung erhalten wir, daß (5) bzw. (6) genau die Lösungen

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

(mit beliebigen  $A, B \in \mathbb{R}$ ) hat.

Auch das System (5), (6) wird Differentialgleichungssystem für den harmonischen Oszillator genannt.

### 1.3 Mathematisches Pendel

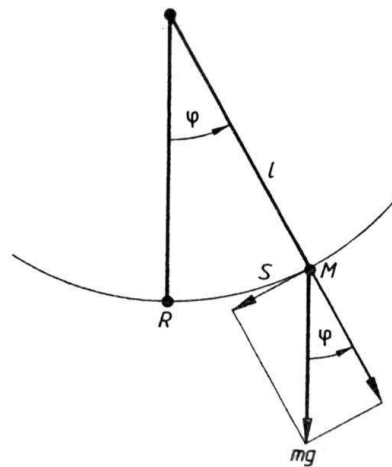


Abbildung 1: Mathematisches Pendel

Die Tangentialkomponente der (Schwer-)Kraft beträgt  $-mg \sin \varphi$ , die Tangentialbeschleunigung ist  $l\ddot{\varphi}$  (beachte:  $l\varphi$  ist die Bogenlänge). Also gilt nach dem Newtonschen Gesetz:

$$ml\ddot{\varphi} = -mg \sin \varphi,$$

also mit  $\omega := \sqrt{\frac{g}{l}}$ :

$$\ddot{\varphi} = -\omega^2 \sin \varphi. \quad (7)$$

Dies ist die Differentialgleichung des mathematischen Pendels. Sie ist nicht-linear und nicht mittels elementarer Funktionen geschlossen lösbar.

Mit  $\tilde{x}(t) = \varphi(t)$ ,  $\tilde{y}(t) = \dot{\varphi}(t)$  erhalten wir wieder ein System der Form (1):

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{y}, \quad \dot{\tilde{y}} = -\omega^2 \sin \tilde{x},$$

und mit  $x(t) = \tilde{x}\left(\frac{t}{\omega}\right)$ ,  $y(t) = \frac{1}{\omega}\tilde{y}\left(\frac{t}{\omega}\right)$  lässt sich wieder  $\omega$  wegtransformieren:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\sin x. \quad (8)$$

Setzt man für „kleine“ Auslenkungen  $x$  näherungsweise  $\sin x \approx x$ , so erhält man das System (5) des harmonischen Oszillators als Näherung für das des mathematischen Pendels. Für „kleine“ Auslenkungen schwingt ein Pendel also näherungsweise wie ein harmonischer Oszillator (und mit der Frequenz  $\omega$ , falls man diese nicht wegtransformiert).

## 1.4 Lienard-Gleichungen für elektrische Schwingkreise

Wir betrachten einen elektrischen Schwingkreis bestehend aus einem Widerstand  $R$ , einer Spule mit Induktivität  $L$  und einem Kondensator mit Kapazität  $C$ .

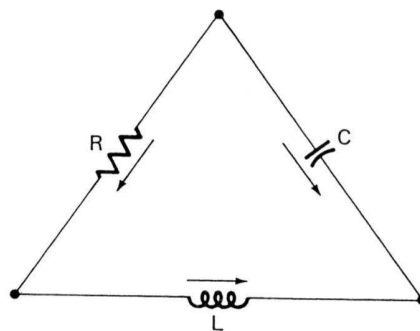


Abbildung 2: Elektrischer Schwingkreis

Durch die drei Elemente fließen die Ströme  $I_R$ ,  $I_L$  und  $I_C$  wie im Bild angegeben. (Beachte: Wechselströme können auch durch Kondensatoren fließen!)

An den drei Elementen fallen entsprechend die Spannungen  $U_R, U_L$  und  $U_C$  ab. Nach den Kirchhoffschen Gesetzen gilt:

$$I_R = I_L = -I_C, \quad U_R + U_L - U_C = 0. \quad (9)$$

Ferner benutzen wir das verallgemeinerte Ohmsche Gesetz

$$U_R = f(I_R) \quad (10)$$

mit einer gegebenen Funktion  $f$ , der „Kennlinie“ des Widerstandes, ferner das Faradaysche Gesetz für Spulen

$$L\dot{I}_L = U_L, \quad (11)$$

sowie das Kondensatorgesetz

$$C\dot{U}_C = I_C. \quad (12)$$

Wir erhalten ein System für  $I_L$  und  $U_C$ :

$$\begin{aligned} L\dot{I}_L &\stackrel{(11)}{=} U_L \stackrel{(9)}{=} U_C - U_R \stackrel{(10)}{=} U_C - f(I_R) \stackrel{(9)}{=} U_C - f(I_L), \\ C\dot{U}_C &\stackrel{(12)}{=} I_C \stackrel{(9)}{=} -I_L. \end{aligned}$$

Setzen wir  $x(t) = I_L(\sqrt{LC}t)$ ,  $y(t) = \sqrt{\frac{C}{L}}U_C(\sqrt{LC}t)$ , so ergibt sich das System

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sqrt{LC}\dot{I}_L(\sqrt{LC}t) = \sqrt{LC} \frac{U_C(\sqrt{LC}t) - f(I_L(\sqrt{LC}t))}{L} = \\ &= y(t) - \sqrt{\frac{C}{L}}f(x(t)), \\ \dot{y}(t) &= C\dot{U}_C(\sqrt{LC}t) = -I_L(\sqrt{LC}t) = -x(t), \end{aligned}$$

also

$$\dot{x} = -\sqrt{\frac{C}{L}}f(x) + y, \quad \dot{y} = -x. \quad (13)$$

Dies ist wieder ein System der Form (1) und heißt Lienardsches System.

Für (idealisierte) Ohmsche Widerstände gilt (10) mit  $f(I_R) = RI_R$ , und (13) ist ein *lineares* System. Für andere Widerstandselemente, z.B. Dioden, ist die Kennlinie  $f$  aber nichtlinear.

## 1.5 Verfolger-Beute-Modell

Wir betrachten zwei biologische Spezies, ein Beutetier und einen Verfolger, der das Beutetier frisst.  $x(t)$  sei die Anzahl der Beutetiere zur Zeit  $t$ ,  $y(t)$  die der Verfolger.

Zur Vereinfachung nehmen wir an, daß für das Beutetier unendliche Futterressourcen zur Verfügung stehen, und daß daher die Differenz

$$a_1 = \text{Geburtenrate} - \text{Todesrate}$$

ohne Anwesenheit des Verfolgers positiv ist. Ohne Verfolger ergäbe sich also die Differentialgleichung  $\dot{x} = a_1x$ .

Mit Verfolger trägt die Anzahl der Begegnungen zwischen Verfolgern und Beutetieren, also das Produkt  $xy$ , negativ zur Entwicklung der Beutetiere bei. Wir erhalten daher die Differentialgleichung

$$\dot{x} = a_1x - a_2xy \quad (14)$$

mit  $a_1, a_2 > 0$ .

Beim Verfolger ist die Differenz

$$-a_3 = \text{Geburtenrate} - \text{Todesrate}$$

ohne Anwesenheit des Beutetieres *negativ*, da für den Verfolger kein Futter da ist. Ohne Beutetiere ergäbe sich also die Differentialgleichung  $\dot{y} = -a_3y$ . Mit Beutetier trägt die Anzahl  $xy$  der Begegnungen positiv zur Entwicklung der Verfolger bei. Wir erhalten daher die Differentialgleichung

$$\dot{y} = -a_3y + a_4xy \quad (15)$$

Das System wird Verfolger-Beute-Modell oder (nach seinen Entwicklern) Lotka-Volterra-Modell genannt.

Setzen wir  $X(t) = \frac{a_4}{a_3}x\left(\frac{t}{a_3}\right)$ ,  $Y(t) = \frac{a_2}{a_3}y\left(\frac{t}{a_3}\right)$  und  $\alpha := \frac{a_1}{a_3}$ , so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= \frac{a_4}{a_3^2} \dot{x}\left(\frac{t}{a_3}\right) = \frac{a_1a_4}{a_3^2}x\left(\frac{t}{a_3}\right) - \frac{a_2a_4}{a_3^2}x\left(\frac{t}{a_3}\right)y\left(\frac{t}{a_3}\right) \\ &= \alpha X(t) - X(t)Y(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{Y}(t) &= \frac{a_2}{a_3^2} \dot{y}\left(\frac{t}{a_3}\right) = -\frac{a_2}{a_3}y\left(\frac{t}{a_3}\right) + \frac{a_2a_4}{a_3^2}x\left(\frac{t}{a_3}\right)y\left(\frac{t}{a_3}\right) \\ &= -Y(t) + X(t)Y(t), \end{aligned}$$

also das nur noch von einem Parameter abhängige Modell

$$\dot{X} = \alpha X - XY, \quad \dot{Y} = -Y + XY. \quad (16)$$

## 2 Die Phasenebene, erste Integrale

Eine Lösung  $(x(t), y(t))$  des Problems (1):

$$\dot{x} = g(x, y), \quad \dot{y} = h(x, y)$$

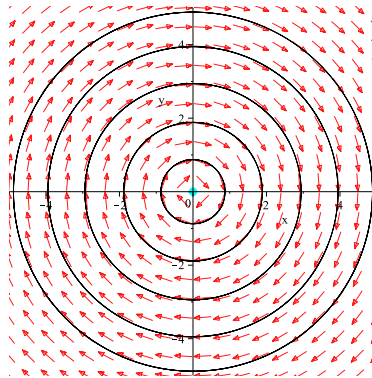
auf einem Intervall  $I$  kann auch als Parametrisierung der Menge („Kurve“)

$$\Gamma = \{(x(t), y(t)) : t \in I\} \subset \mathbb{R}^2$$

aufgefasst werden. Jede solche Lösungskurve  $\Gamma$  wird dann *Trajektorie* oder *Orbit* des Differentialgleichungssystems (1) genannt, und der  $\mathbb{R}^2$  (die  $(x, y)$ -Ebene) heißt in diesem Zusammenhang auch *Phasenebene*. Eine graphische Darstellung der Lösungen von (1) kann nun, anstelle  $x$  und  $y$  separat als Funktionen über  $I$  aufzutragen, auch durch Einzeichnen der Trajektorien in die Phasenebene erfolgen. Eine solche Darstellung heißt dann auch Phasendiagramm oder Phasenportrait des Differentialgleichungssystems (1). Da die Trajektorien die  $t$ -Abhängigkeit der Lösungen nicht widerspiegeln, trägt man oft zusätzlich kleine Pfeile in die Trajektorien ein, um zumindest die Richtung zu kennzeichnen, in der  $t$  wächst. Um zusätzlich die Geschwindigkeit  $\|(\dot{x}(t), \dot{y}(t))\|$  anzudeuten, mit der die jeweilige Trajektorie durchlaufen wird, kann man kleine Punkte auf den Trajektorien eintragen, die bei niedriger Geschwindigkeit eng zusammen und bei höherer Geschwindigkeit weiter auseinander liegen. Ein solches Phasendiagramm gibt einen sehr guten Überblick über das qualitative Verhalten der Lösungen des Systems (1).

**Beispiel:** Harmonischer Oszillator

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x$$



Dieses Phasendiagramm zeigt qualitativ viel mehr Information über die Lösungen als die explizite Darstellung

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

(aus der man natürlich das obige Phasendiagramm gewinnen kann:  
 $x(t)^2 + y(t)^2 = (A \cos t + B \sin t)^2 + (-A \sin t + B \cos t)^2 = A^2 + B^2$ ).

Ein erheblicher Vorteil der Phasenebenen-Darstellung ist, daß man sie oft ermitteln kann, *ohne* die Lösungen von (1) zu kennen! (Lediglich die genauen Abstände der „Geschwindigkeitspunkte“ können ohne Kenntnis der Lösungen nicht eingetragen werden, was aber eher unwichtig ist.)

Für die Erstellung eines Phasendiagramms brauchen wir im Wesentlichen ein sogenanntes *erstes Integral* des Systems (1):

**Definition:** Eine stetig differenzierbare Funktion  $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  heißt erstes Integral für das System (1), wenn für jede Lösung  $(x(t), y(t))$  (auf einem Intervall  $I$ ) eine Konstante  $\alpha \in \mathbb{R}$  existiert mit

$$H(x(t), y(t)) = \alpha \quad \forall t \in I,$$

also wenn  $H$  längs jeder Lösung (d.h. auf jeder Trajektorie) konstant ist.

Ist ein erstes Integral  $H$  bekannt, so sind die Trajektorien des Systems (1) *implizit* durch die Gleichung

$$H(x, y) = \alpha \tag{17}$$

gegeben, wobei  $\alpha$  im Bild  $H(\mathbb{R}^2) \subseteq \mathbb{R}$  zu liegen hat.

Wir stellen weiter fest: Falls - bei gegebenem  $\alpha$  - für alle  $(x, y)$  mit  $H(x, y) = \alpha$  gilt:

$$(\text{grad} H)(x, y) \neq (0, 0), \tag{18}$$

so ist nach dem Satz über implizit definierte Funktionen die Gleichung (17) überall lokal nach  $x$  oder nach  $y$  auflösbar (mit einer stetig differenzierbaren auflösenden Funktion), d.h. die durch (17) implizit gegebene Trajektorie ist eine  $C^1$ -glatte Kurve in der Phasenebene.

Jede Trajektorie verläuft also innerhalb einer *Niveaulinie* des ersten Integrals  $H$ , und ist unter der Zusatzvoraussetzung (18) eine  $C^1$ -glatte Kurve.

Zur Erstellung eines Phasendiagramms für das System (1) betrachten wir also die Niveaulinien von  $H$ , und stellen im Einzelfall Zusatzüberlegungen über die Durchlaufrichtung an (was einfach ist), sowie über die Frage, ob die jeweilige Niveaulinie von den Lösungen komplett oder evtl. nur zum Teil durchlaufen wird.

**Beispiel:** Harmonischer Oszillator

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x.$$

Hier ist  $H(x, y) := x^2 + y^2$  ein erstes Integral, denn ist  $(x(t), y(t))$  eine Lösung, so gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H(x(t), y(t)) &= \frac{d}{dt} (x(t)^2 + y(t)^2) \\ &= 2x(t)\dot{x}(t) + 2y(t)\dot{y}(t) = 2x(t)y(t) - 2y(t)x(t) = 0. \end{aligned}$$

Da die Niveaulinien von  $H$  hier *Kreise* sind (dabei wird  $(0, 0)^T$  als entarteter Kreis aufgefaßt), liegen alle Trajektorien auf Kreislinien, und der Tangentialvektor  $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$  zeigt überall auf diesen Kreislinien in mathematisch negative Drehrichtung, was die Durchlaufrichtung festlegt (siehe frühere Zeichnung). Weitere, kompliziertere Beispiele werden folgen.

Wie kann man nun ein erstes Integral  $H$  des Systems (1) berechnen?

Ist  $H \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  und  $(x(t), y(t))$  eine Lösung von (1), so gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H(x(t), y(t)) &= H_x(x(t), y(t)) \cdot \dot{x}(t) + H_y(x(t), y(t)) \cdot \dot{y}(t) \\ &= H_x(x(t), y(t)) \cdot g(x(t), y(t)) + H_y(x(t), y(t)) \cdot h(x(t), y(t)) \\ &= \langle (\text{grad}H)(x(t), y(t)), \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}(x(t), y(t)) \rangle. \end{aligned}$$

Damit  $H$  ein erstes Integral wird, muß daher  $(\text{grad}H)(x, y)$  orthogonal zu  $(g, h)^T(x, y)$ , also ein skalares Vielfaches von  $(-h, g)^T(x, y)$  sein:

$$(\text{grad}H)(x, y) \stackrel{!}{=} \lambda(x, y) \begin{pmatrix} -h(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix} \quad (19)$$

mit einer skalaren Funktion  $\lambda$ , die wegen (18) nullstellenfrei sein sollte.  $H$  muß also eine Stammfunktion (oder ein Potential) der rechten Seite von (19) sein. Diese muß also das Integrabilitätskriterium (siehe Analysis II)

$$-(\lambda h)_y = (\lambda g)_x \quad (20)$$

erfüllen. Dies ist eine Bedingung an  $\lambda$ . Da (20) eine *partielle* Differentialgleichung (für die gesuchte Funktion  $\lambda$ ) ist, ist die Bestimmung von  $\lambda$  im Allgemeinen nicht einfach. Oft kann man aber ein geeignetes  $\lambda$  „erraten“ oder man kommt mit einem Ansatz  $\lambda = \lambda(x)$  oder  $\lambda = \lambda(y)$  zum Ziel.

Hat man  $\lambda$  gefunden, so kann man aus (19) dann ein erstes Integral  $H$  für das System (1) berechnen.

## 2.1 Beispiele

### 2.1.1 Newtonsche Bewegungsgleichung

Wir betrachten den Spezialfall, daß die Kraft  $F(x, v)$  nicht von der Geschwindigkeit  $v$  abhängt, sondern nur von der Position  $x$  des Massenpunktes. Also lautet die Newtonsche Bewegungsgleichung (2) :

$$m\ddot{x} = F(x),$$

und das äquivalente System (3):

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \frac{1}{m}F(x).$$

Für die Integrabilitätsbedingung (20) ergibt sich daher:

$$-\frac{1}{m}(\lambda F(x))_y = (\lambda y)_x,$$

was offensichtlich für  $\lambda \equiv m$  ( $\lambda \equiv 1$  geht auch) erfüllt ist. Damit lautet (19):

$$(\text{grad}H)(x, y) = \begin{pmatrix} -F(x) \\ my \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist die Regularitätsbedingung (18) außerhalb der stationären Punkte  $(x, 0)$  mit  $F(x) = 0$  erfüllt. Wir erhalten also das erste Integral:

$$H(x, y) = \frac{1}{2}my^2 + V(x) \quad (21)$$

(die Integrationskonstante kann o. B. d. A. wegfallen), wobei

$$V(x) := - \int_0^x F(s) ds \quad (22)$$

das *Potential* der Kraft  $F$  ist. Da die Variable  $y$  durch  $y = \dot{x}$  (Geschwindigkeit) eingeführt wurde, ist  $\frac{1}{2}my^2$  die *kinetische Energie* des Massepunktes.  $V(x)$  ist seine *potentielle Energie* und  $H$  seine *Gesamtenergie*. Die Aussage

$$H(x(t), y(t)) \equiv \text{const.} \quad \text{für jede Lösung } (x(t), y(t))$$

besagt hier also gerade, daß die Gesamtenergie für jede Lösung (zeitlich) konstant ist. Dies ist der bekannte *Energieerhaltungssatz*. Schlagwortartig: Die Gesamtenergie ist ein erstes Integral der Newtonschen Bewegung.

### 2.1.2 Allgemeinere Kraft

Nun sei die Kraft  $F(x, v)$  von der allgemeineren Form:

$$F(x, v) = F_1(x)F_2(v), \quad (23)$$

mit der Voraussetzung

$$F_2(s) \neq 0 \quad \text{für} \quad s \neq 0, \quad \frac{s}{F_2(s)} \quad \text{integrierbar bei 0.} \quad (24)$$

Das zur Newtonschen Bewegungsgleichung (2) äquivalente System (3) lautet also

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \frac{1}{m}F_1(x)F_2(y),$$

und als Integrabilitätsbedingung (20) erhalten wir

$$-\frac{1}{m}(\lambda F_1(x)F_2(y))_y = (\lambda y)_x,$$

was für  $\lambda(x, y) = \frac{m}{F_2(y)}$  erfüllt ist. Also lautet (19):

$$(\text{grad}H)(x, y) = \begin{pmatrix} -F_1(x) \\ m \frac{y}{F_2(y)} \end{pmatrix},$$

und wir erhalten das erste Integral

$$H(x, y) = mW(y) + V(x) \quad (25)$$

mit

$$V(x) := - \int_0^x F_1(s) ds, \quad W(y) := \int_0^y \frac{s}{F_2(s)} ds.$$

### 2.1.3 Mathematisches Pendel

Das zur Pendelgleichung (7)

$$\ddot{\varphi} = -\omega^2 \sin \varphi$$

gehörige System (1) lautet nach Wegtransformation von  $\omega$  (siehe (8)):

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\sin x,$$

und das Integrabilitätskriterium (20)

$$(\lambda \sin x)_y = (\lambda y)_x$$

ist offensichtlich für  $\lambda \equiv 1$  erfüllt. Aus (19)

$$(\text{grad}H)(x, y) = \begin{pmatrix} \sin x \\ y \end{pmatrix}$$

erhalten wir somit das erste Integral

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + 1 - \cos x. \quad (26)$$

Wieder ist  $\frac{1}{2}y^2$  als kinetische Energie interpretierbar und  $1 - \cos x$  als potentielle Energie. So ist z.B.  $1 - \cos x = 0$  für  $x = 2k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), also in der unteren „hängenden“ Extremposition des Pendels, und  $1 - \cos x = 2$  für  $x = (2k + 1)\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), also in der oberen Extremposition.

Aus (26) können wir nun ein Phasendiagramm für das mathematische Pendel ermitteln: Wir müssen die Gleichung

$$H(x, y) = \alpha \quad (27)$$

bei gegebenen  $\alpha \in [0, \infty)$  ( $= H(\mathbb{R}^2)$ ) untersuchen.

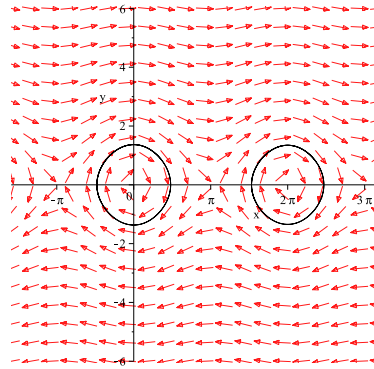
- Für  $\alpha = 0$  ergeben sich die Punkte  $(2k\pi, 0)$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) als Lösungen. Alle diese Punkte entsprechen ein- und derselben physikalischen Situation: Das Pendel hängt nach unten und ruht. (Beachte:  $x \equiv \varphi$  Auslenkwinkel)
- Für  $0 < \alpha < 2$  erhält man aus (26) und (27):  $\cos x \geq 1 - \alpha (> -1)$ , also  $-x_0 + 2k\pi \leq x \leq x_0 + 2k\pi$  mit  $x_0 = \arccos(1 - \alpha) \in (0, \pi)$  und  $k \in \mathbb{Z}$ , d.h. das Pendel schwingt bis zu einem maximalen Auslenkwinkel  $\pm x_0$ . (26), (27) lässt sich auflösen:

$$y = \pm \sqrt{2(\alpha - 1 + \cos x)} \quad \text{für} \quad x \in [-x_0 + 2k\pi, x_0 + 2k\pi]$$

oder

$$x = \pm \arccos\left(\frac{1}{2}y^2 + 1 - \alpha\right) + 2k\pi \quad \text{für} \quad y \in [-\sqrt{2\alpha}, \sqrt{2\alpha}]$$

und wir erhalten *geschlossene* Kurven um die Ruhepunkte  $(2k\pi, 0)$ .

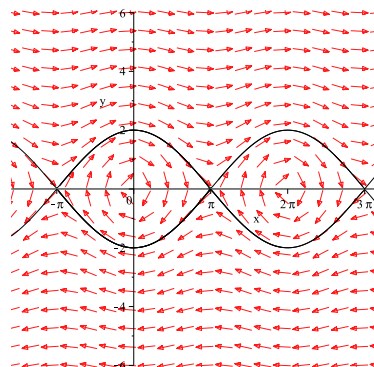


Die Translationen um  $2k\pi$  sind physikalisch natürlich bedeutungslos, d.h. sie entsprechen alle derselben Pendelbewegung.

Für „kleine“  $\alpha > 0$  sind diese geschlossene Kurven „ungefähr“ Kreislinien, was der Approximation des Pendels durch den harmonischen Oszillator für „kleine“ Auslenkungen  $x_0$  entspricht.

- Für  $\alpha = 2$  ergibt sich aus (26), (27):

$$y = \pm \sqrt{2(1 + \cos x)} = \pm 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \quad (28)$$



Die Durchlaufrichtung ergibt sich wieder direkt aus  $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -\sin x \end{pmatrix}$ .

Für das *Zeitverhalten* muß man Zusatzüberlegungen anstellen: Wegen  $y = \dot{x}$  lautet (28):

$$\frac{dx}{dt} = \pm 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right).$$

$x = x(t)$  ist also streng monoton, solange  $-\pi < x < \pi$  gilt. Betrachtet man die Umkehrfunktion  $t = t(x)$ , so erhält man die Differentialgleichung

$$\frac{dt}{dx} = \pm \frac{1}{2 \cos(\frac{x}{2})}$$

und daher

$$t(x) - t(0) = \pm \int_0^x \frac{1}{2 \cos(\frac{s}{2})} ds \rightarrow \pm \infty \quad \text{für } x \rightarrow \pm \pi.$$

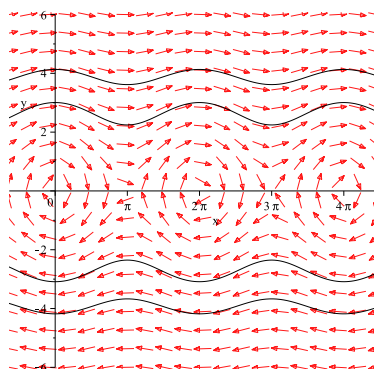
Das Pendel läuft also (für  $\alpha = 2$ ) in unendlich langer Zeit in die Punkte  $((2k+1)\pi, 0)$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), d.h. in die obere Extremposition des Pendels, hinein bzw. aus diesen heraus ( $t \rightarrow +\infty$  bzw.  $t \rightarrow -\infty$ ).

Die Punkte  $((2k+1)\pi, 0)$  selbst sind zusätzliche Ruhepunkte. Wieder sind die Translationen um  $2k\pi$  physikalisch irrelevant.

- Für  $\alpha > 2$  liefern (26), (27):

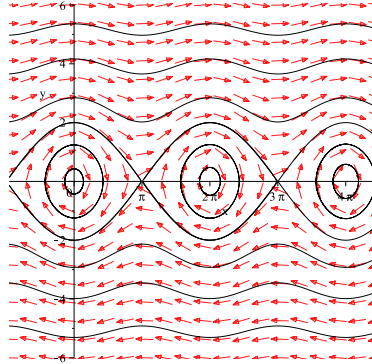
$$y = \pm \sqrt{2(\alpha - 1 + \cos x)} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

und der Radikand ist  $\geq 2(\alpha - 2) > 0$ . Dies sind also *glatte* Kurven  $y(x)$ .



Sie entsprechen fortlaufenden Vollrotationen des Pendels. *Physikalisch* sind dies (wegen der  $2k\pi$ -Translationsinvarianz) *periodische* Bewegungen.

Insgesamt erhalten wir also folgendes Phasendiagramm für das mathematische Pendel. Es gibt volle Auskunft über die Dynamik des Pendels, ohne daß „geschlossene“ Lösungen bekannt sind.



Wegen  $(\text{grad}H)(x, y) = (\sin x, y)^T$  ist die Regularitätsbedingung (18) außerhalb der stationären Punkte  $(k\pi, 0)$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) erfüllt.

#### 2.1.4 Verfolger-Beute-Modell

Wir hatten bereits das System (14), (15):

$$\dot{x} = a_1x - a_2xy, \quad \dot{y} = -a_3y + a_4xy$$

für ein Beutetier mit  $x(t)$  Individuen und einen Verfolger mit  $y(t)$  Individuen zur Zeit  $t$  entwickelt, das wir für den Moment ohne Reduktion auf nur einen Parameter  $\alpha$  betrachten wollen. Wir interessieren uns nur für *positive* Lösungen, also  $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ .

Die Integrabilitätsbedingung (20) lautet nun

$$[-\lambda(-a_3y + a_4xy)]_y = [\lambda(a_1x - a_2xy)]_x$$

und ist offenbar für  $\lambda(x, y) := -\frac{1}{xy}$  erfüllt. Bedingung (19) wird damit zu

$$(\text{grad}H)(x, y) = \begin{pmatrix} a_4 - \frac{a_3}{x} \\ a_2 - \frac{a_1}{y} \end{pmatrix}$$

und ist für

$$H(x, y) = a_4x - a_3 \log x + a_2y - a_1 \log y \quad (29)$$

erfüllt. Außerhalb des stationären Punktes  $(\frac{a_3}{a_4}, \frac{a_1}{a_2})$  ist  $\text{grad}H \neq (0, 0)$ ; daher ist dort die Regularitätsbedingung (18) erfüllt.

Da  $g(x) := \alpha x - \beta \log x$  (mit  $\alpha, \beta > 0$ ) konvex mit  $\lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$  und Minimum bei  $\beta/\alpha$  ist, kann man folgern:

**Satz 2.1:**

- (a) Die Niveaumengen  $\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : H(x, y) = \alpha\}$  sind für  $\alpha > H(\frac{a_3}{a_4}, \frac{a_1}{a_2})$  geschlossene Kurven, die den stationären Punkt  $(\frac{a_3}{a_4}, \frac{a_1}{a_2})$  umrunden. Die Subniveaumengen  $\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : H(x, y) \leq \alpha\}$  sind konvex.
- (b) Alle (positiven) Lösungen  $(x(t), y(t))$  des Verfolger-Beute-Systems (14), (15) sind periodisch.  $x(t)$  nimmt sein Minimum und Maximum in den Punkten  $t$  mit  $y(t) = \frac{a_1}{a_2} an$ ;  $y(t)$  nimmt sein Minimum und Maximum in den Punkten  $t$  mit  $x(t) = \frac{a_3}{a_4} an$ .

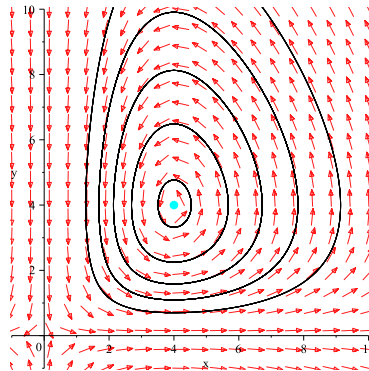


Abbildung 3: Phasendiagramm für das Verfolger-Beute-Modell

**Beweis:** Übungen.

### 3 Stabilität bei linearen Systemen

Wir betrachten lineare Differentialgleichungssysteme der Form

$$\dot{y} = A(t)y \quad (30)$$

mit einer stetigen matrixwertigen Funktion  $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n,n}$ .

Da die rechte Seite von (30) auf jedem kompakten Intervall  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  einer globalen Lipschitz-Bedingung bzgl.  $y$  genügt, existiert jede Lösung von (30) auf ganz  $[a, b]$  und daher wegen der Beliebigkeit von  $[a, b]$  auf ganz  $\mathbb{R}$ . Wir interessieren uns nun für das Verhalten der Lösungen für  $t \rightarrow \infty$  (oder auch für  $t \rightarrow -\infty$ ).

**Definition:** Die triviale Lösung ( $\equiv 0$ ) des linearen Systems (30) heißt

- (a) *stabil* (für  $t \rightarrow \infty$ ), wenn jede Lösung von (30) auf  $[0, \infty)$  beschränkt ist,
- (b) *asymptotisch stabil* (für  $t \rightarrow \infty$ ), wenn jede Lösung von (30) für  $t \rightarrow \infty$  gegen 0 konvergiert,
- (c) *instabil* (für  $t \rightarrow \infty$ ), wenn sie nicht stabil ist, wenn also eine auf  $[0, \infty)$  unbeschränkte Lösung existiert.

Wünschenswert sind nun natürlich Kriterien in Form von Bedingungen an die Matrixfunktion  $A(t)$ , mittels derer man über Stabilität und asymptotische Stabilität entscheiden kann. Im Allgemeinen ist dies schwierig und soll hier nicht weiter untersucht werden. Wir spezialisieren uns stattdessen auf den Fall

$$A \text{ konstant } (t\text{-unabhängig}). \quad (31)$$

In diesem Fall ist ein Fundamentalsystem von (30) aus den Eigenwerten und den Eigen- und Hauptvektoren von  $A$  berechenbar (siehe Grundvorlesung). Jede der zu diesem Fundamentalsystem gehörenden Basislösungen ist von der Form

$$e^{\lambda t} p(t) \quad (32)$$

mit einem Eigenwert  $\lambda$  von  $A$  und einer *polynomialen* vektorwertigen Funktion  $p$ . Falls die algebraische Vielfachheit von  $\lambda$  gleich der geometrischen ist (falls also zu  $\lambda$  kein echter Jordan-Block gehört), so ist  $p$  *konstant* ( $\equiv$  Eigenvektor zu  $\lambda$ ); andernfalls ist  $p$  nicht-konstant für wenigstens eine Basislösung der Form (32). Da alle Lösungen von (30), (31) Linearkombinationen von Lösungen der Form (32) sind, erhalten wir sofort

**Satz 3.1:** *Es gelte (31).*

- a) *Es sei  $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$  für jeden Eigenwert  $\lambda$  von  $A$ . Dann ist die triviale Lösung des Systems (30) asymptotisch stabil.*
- b) *Es sei  $\operatorname{Re}(\lambda) \leq 0$  für jeden Eigenwert  $\lambda$  von  $A$ . Für jeden Eigenwert  $\lambda$  mit  $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$  seien algebraische und geometrische Vielfachheit gleich. Dann ist die triviale Lösung des Systems (30) stabil.*
- c) *Es sei  $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$  für einen Eigenwert  $\lambda$  von  $A$ , oder es sei  $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$  für einen Eigenwert, bei dem algebraische und geometrische Vielfachheit verschieden sind. Dann ist die triviale Lösung des Systems (30) instabil.*

**Beweis:** Für jede Basislösung der Form (32) gilt

$$\|e^{\lambda t} p(t)\| = |e^{\lambda t}| \|p(t)\| = e^{(\operatorname{Re}(\lambda))t} \|p(t)\|.$$

Falls  $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ , so gilt  $\lim_{t \rightarrow \infty} [e^{(\operatorname{Re}(\lambda))t} \|p(t)\|] = 0$ , da  $p(t)$  polynomial ist. Daraus folgt a), und natürlich auch die Beschränktheit von  $\|e^{\lambda t} p(t)\|$  auf  $[0, \infty)$  für Eigenwerte  $\lambda$  mit  $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ . Ist  $\lambda$  ein Eigenwert mit  $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$ , so ist nach der in b) gemachten Voraussetzung die Vektorfunktion  $p$  konstant, und wieder folgt die Beschränktheit von  $\|e^{\lambda t} p(t)\|$  auf  $[0, \infty)$ , und damit b). Ähnliche Überlegungen beweisen c).  $\square$

Für den Fall  $n = 2$  wollen wir nun durch ein Phasendiagramm mehr Details über das Lösungsverhalten für  $t \rightarrow \infty$  erfahren. Wir wollen drei Fälle unterscheiden (vgl. Grundvorlesung Lineare Algebra):

- (i)  $A$  ist reell diagonalisierbar mit zwei (nicht notwendig verschiedenen) Eigenwerten  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Es gilt also

$$A = T \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} T^{-1}$$

mit einer invertierbaren Matrix  $T \in \mathbb{R}^{2,2}$ .

- (ii)  $A$  hat nur einen reellen Eigenwert  $\lambda$  mit geometrischer Vielfachheit 1 und algebraischer Vielfachheit 2. Es gilt also

$$A = T \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} T^{-1}$$

mit einer invertierbaren Matrix  $T \in \mathbb{R}^{2,2}$ .

- (iii)  $A$  hat zwei konjugiert komplexe Eigenwerte  $\mu \pm i\nu$  mit  $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ . Nehmen wir Real- und Imaginärteil des Eigenvektors zum Eigenwert  $\mu + i\nu$  als Spalten einer Matrix  $T \in \mathbb{R}^{2,2}$ , so erhalten wir

$$A = T \begin{pmatrix} \mu & \nu \\ -\nu & \mu \end{pmatrix} T^{-1}.$$

Multiplizieren wir die Gleichung (30) (unter der Zusatzvoraussetzung (31)) von links mit der jeweiligen Transformationsmatrix  $T^{-1}$ , so erhalten wir für  $z = T^{-1}y$  das System

$$\text{i) } z' = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} z \quad \text{bzw.} \quad \text{ii) } z' = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} z \quad \text{bzw.} \quad \text{iii) } z' = \begin{pmatrix} \mu & \nu \\ -\nu & \mu \end{pmatrix} z.$$

Haben wir ein Phasendiagramm für  $z$  erstellt, so ergibt sich das Diagramm für  $y = Tz$  mittels „Verzerrung“ durch die Matrix  $T$ ; die Einheitsvektoren sind in die Spaltenvektoren von  $T$  zu verdrehen. Das Phasendiagramm bleibt also qualitativ gleich.

**Fall (i):**  $z' = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} z$ .

Die allgemeine Lösung lautet  $z_1(t) = ae^{\lambda t}$ ,  $z_2(t) = be^{\mu t}$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$ . Für die zugehörige Trajektorie erhält man also im Fall  $a \neq 0, b \neq 0$ :

$$(z_1/a)^\mu = (z_2/b)^\lambda$$

und daher (falls  $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ )

$$|z_2| = C |z_1|^{\frac{\mu}{\lambda}} \quad \text{bzw.} \quad |z_1| = \tilde{C} |z_2|^{\frac{\lambda}{\mu}} \quad (33)$$

mit  $C, \tilde{C} \geq 0$ . (Die Fälle  $a = 0$  oder  $b = 0$  sind nun in (33) enthalten.)

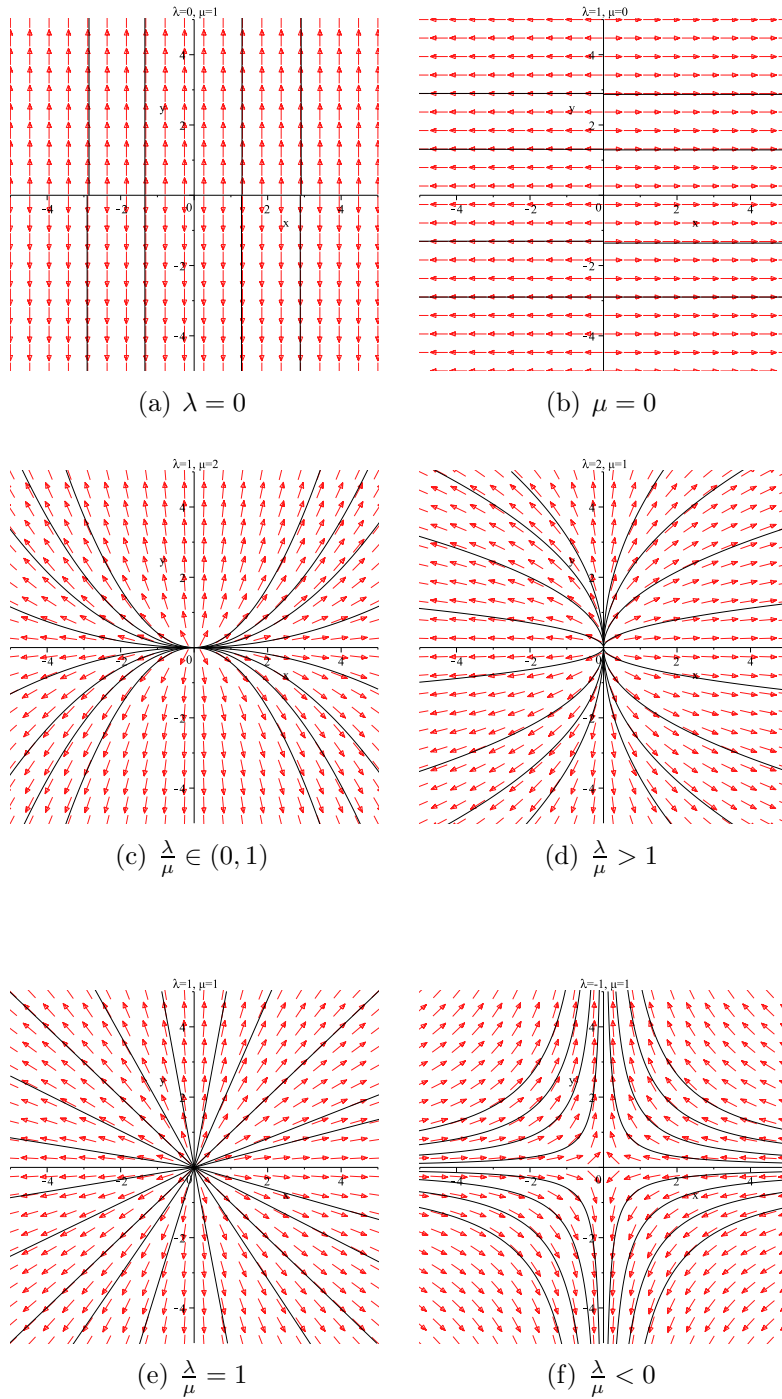


Abbildung 4: Phasendiagramm für Fall (i)

Die Durchlaufrichtung der Trajektorien hängt nun von den Vorzeichen von  $\lambda$  und  $\mu$  ab (und nicht nur vom Vorzeichen von  $\frac{\lambda}{\mu}$ ). Z.B. im Fall  $\frac{\lambda}{\mu} \in (0, 1)$ :

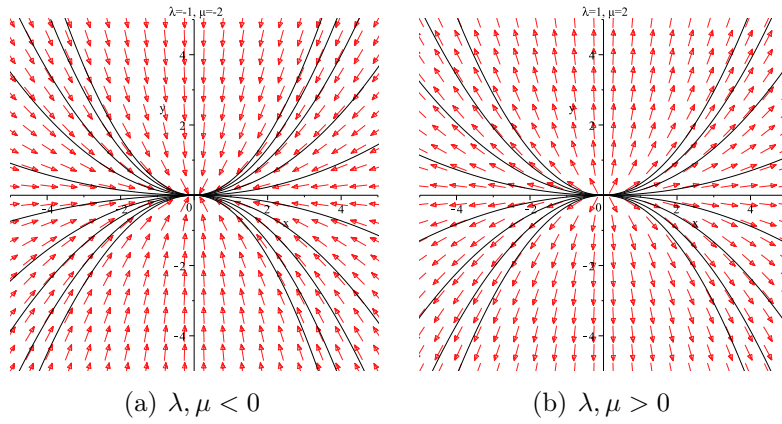


Abbildung 5: Die Durchlaufrichtung der Trajektorien

Im ersten Fall heißt  $(0, 0)$  *stabiler Knoten*, im zweiten *instabiler Knoten*. Die Fälle  $\frac{\lambda}{\mu} > 1$  und  $\frac{\lambda}{\mu} = 1$  sind völlig analog zu sehen, einschließlich der Namensgebung.

Im Fall  $\frac{\lambda}{\mu} < 0$  kann niemals Stabilität vorliegen:

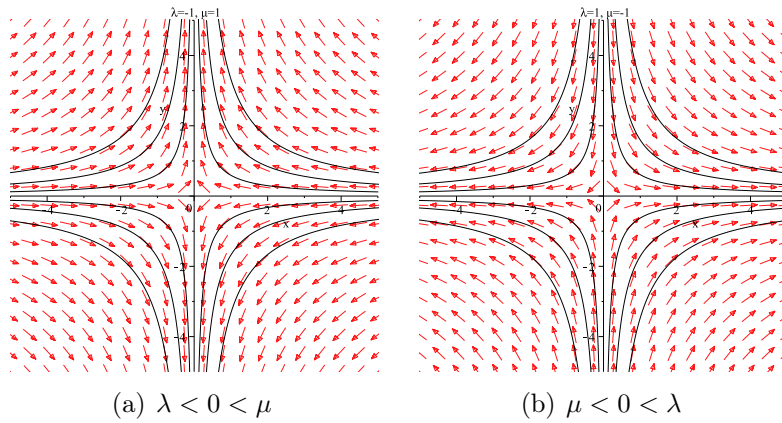


Abbildung 6: Instabiler Sattelpunkt

**Fall (ii):**  $z' = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} z.$

Hier lautet die allgemeine Lösung  $z_1(t) = ae^{\lambda t} + bte^{\lambda t}$ ,  $z_2(t) = be^{\lambda t}$ .

Für  $\lambda = 0$  :  $z_1 = a + z_2 t$ ,  $z_2$  konstant,  $(a, 0)$  ist stationärer Punkt für jedes  $a \in \mathbb{R}$ .

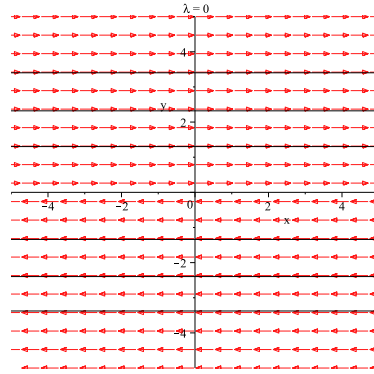


Abbildung 7: Instabilität für  $\lambda = 0$  im Fall (ii)

Nun sei  $\lambda \neq 0$ . Dann gilt im Fall  $b \neq 0$ :

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{\lambda} \log \frac{z_2}{b}, \quad \text{also} \\ z_1 &= \frac{a}{b} z_2 + t z_2 = \frac{a}{b} z_2 + \frac{z_2}{\lambda} \log \frac{z_2}{b} \end{aligned}$$

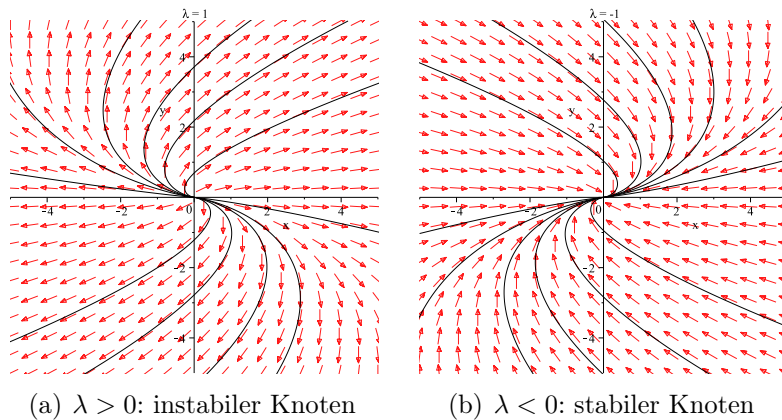


Abbildung 8: Phasendiagramm für Fall (ii)

**Fall (iii):**  $z' = \begin{pmatrix} \mu & \nu \\ -\nu & \mu \end{pmatrix} z.$

Die allgemeine Lösung ist

$$z_1 = e^{\mu t}(a \cos(\nu t) + b \sin(\nu t)), \quad z_2 = e^{\mu t}(-a \sin(\nu t) + b \cos(\nu t)),$$

oder anders geschrieben

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = e^{\mu t} \begin{pmatrix} \cos(\nu t) & \sin(\nu t) \\ -\sin(\nu t) & \cos(\nu t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

mit  $a, b \in \mathbb{R}$ .

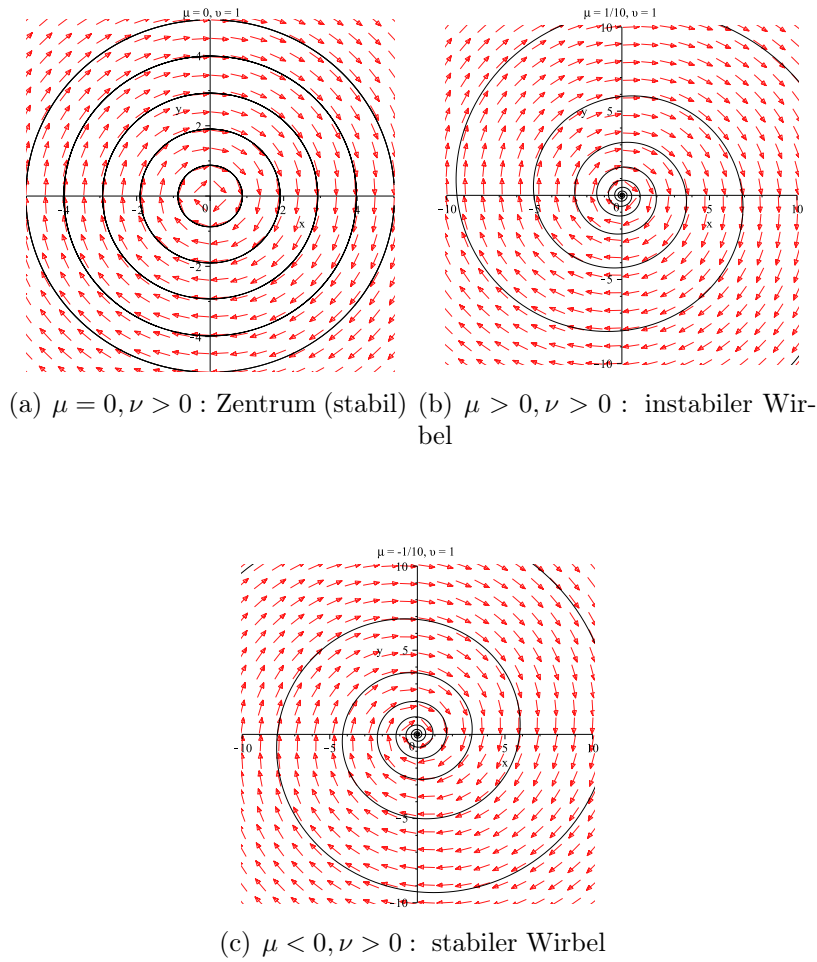


Abbildung 9: Phasendiagramme für Fall (iii)

## 4 Stabilität bei nichtlinearen Systemen

Nun betrachten wir das nichtlineare System

$$\dot{y} = f(t, y) \quad (34)$$

mit einer stetigen Funktion  $f : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Es sei  $\bar{y} \in C^1[0, \infty)$  eine Lösung von (34); deren Existenz wird also vorausgesetzt.

In der folgenden Definition übernimmt  $\bar{y}$  die Rolle der trivialen Lösung, deren Stabilität wir für lineare Systeme betrachtet hatten.

**Definition:** Die Lösung  $\bar{y}$  von (34) heißt

- a) *stabil* (im Sinne von Lyapunov), wenn für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert mit folgender Eigenschaft:  
*Jede* Lösung  $y$  von (34) mit

$$\|y(0) - \bar{y}(0)\| < \delta$$

ist auf  $[0, \infty)$  definiert und erfüllt

$$\|y(t) - \bar{y}(t)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } t \in [0, \infty);$$

- b) *asymptotisch stabil*, wenn sie stabil ist und ein  $\beta > 0$  existiert derart, daß für jede Lösung von (34) mit

$$\|y(0) - \bar{y}(0)\| < \beta$$

gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - \bar{y}(t)\| = 0;$$

- c) *instabil*, wenn sie nicht stabil ist.

**Bemerkung:** Im Spezialfall  $f(t, y) = A(t)y$  mit einer stetigen matrixwertigen Funktion  $A$  fallen die obigen Stabilitätsbegriffe mit der alten Definition zur Stabilität der trivialen Lösung des linearen Systems (30) zusammen.

**Beweis:** Übungen.

Wir betrachten nun spezieller Systeme der Form

$$\dot{y} = Ay + g(t, y) \tag{35}$$

mit einer *konstanten* Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und einer stetigen Funktion  $g : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit der Eigenschaft

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\|g(t, z)\|}{\|z\|} = 0 \quad \text{gleichmäßig in } t \in [0, \infty) \tag{36}$$

$$\left[ \text{d.h. } \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}^n, 0 < \|z\| < \delta \quad \forall t \in [0, \infty) : \quad \frac{\|g(t, z)\|}{\|z\|} < \varepsilon. \right]$$

Bedingung (36) besagt, daß  $g(t, y)$  relativ zum „Hauptteil“  $Ay$  in (35) „klein“ ist für „kleines“  $y$ .

Da (36) insbesondere  $g(t, 0) = 0$  ( $0 \leq t < \infty$ ) impliziert, ist  $\bar{y} \equiv 0$  eine Lösung von (35), deren Stabilitätseigenschaften wir nun untersuchen wollen. Da  $Ay$  in (35) den Hauptteil bildet, hoffen wir, daß die Eigenschaften von  $A$  (und nicht die detaillierten - über (36) hinausgehenden - Eigenschaften von  $g$ ) hierfür entscheidend sind. In der Tat haben wir

**Satz 4.1 (Stabilitätssatz):**

*Es gelte (36), und  $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$  für alle Eigenwerte  $\lambda$  von  $A$ . Dann ist die triviale Lösung von (35) asymptotisch stabil.*

Zum Beweis brauchen wir

**Lemma 4.2 (Lemma von Gronwall):**

Es seien  $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \geq 0$  und  $\phi \in C[0, a)$  mit einem  $a \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ . Es gelte

$$\phi(t) \leq \alpha + \beta \int_0^t \phi(s) ds \quad \text{für } 0 \leq t < a. \quad (37)$$

Dann gilt  $\phi(t) \leq \alpha e^{\beta t}$  für  $0 \leq t < a$ .

**Beweis:** Wir setzen

$$\psi(t) := \alpha + \beta \int_0^t \phi(s) ds. \quad (38)$$

Dann gilt  $\psi \in C^1[0, a)$  und

$$\psi'(t) = \beta \phi(t) \underset{(37), (38), \beta \geq 0}{\leq} \beta \psi(t),$$

also

$$(e^{-\beta t} \psi)' = e^{-\beta t} (\psi' - \beta \psi) \leq 0$$

und daher

$$e^{-\beta t} \psi(t) \leq e^{-\beta \cdot 0} \psi(0) \underset{(38)}{=} \alpha.$$

Es folgt  $\psi(t) \leq \alpha e^{\beta t}$  und daher die Behauptung wegen  $\phi(t) \leq \psi(t)$  (gemäß (37), (38)).  $\square$

**Beweis von Satz 4.1:**

Es sei  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  ein reelles Fundamentalsystem von  $\dot{y} = Ay$  und  $\phi := (\varphi_1 | \dots | \varphi_n) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  die zugehörige Fundamentalmatrix. O.B.d.A. gelte  $\phi(0) = I$ . Wir wählen ein  $\beta > 0$  mit

$$\operatorname{Re}(\lambda) < -\beta \quad \text{für alle Eigenwerte } \lambda \text{ von } A, \quad (39)$$

was nach Voraussetzung möglich ist. Jede der Fundamentallösungen  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  ist Linearkombination von Termen der Form  $e^{\lambda t} p(t)$  mit einem Eigenwert  $\lambda$  von  $A$  und einer polynomialen vektorwertigen Funktion  $p$ . Wegen

$$\|e^{\lambda t} p(t)\| = e^{(\operatorname{Re} \lambda)t} \|p(t)\| \leq e^{(\operatorname{Re} \lambda)t} c e^{-(\operatorname{Re} \lambda + \beta)t} = c e^{-\beta t}$$

für eine geeignete Konstante  $c$  (beachte:  $-(\operatorname{Re} \lambda + \beta) > 0$  nach (39)) gilt also

$$\|\phi(t)\| \leq C e^{-\beta t} \quad (0 \leq t < \infty) \quad (40)$$

für eine geeignete Konstante  $C \geq 1$ .

Wegen Bedingung (36) existiert ein  $\eta > 0$  mit

$$\|g(t, z)\| \leq \frac{\beta}{2C} \|z\| \quad \text{für } z \in \mathbb{R}^n, \|z\| \leq \eta, \quad \text{und } t \in [0, \infty). \quad (41)$$

Nun sei  $\varepsilon > 0$ . Wir wählen  $\delta > 0$  mit

$$\delta \leq \frac{\eta}{2C} \quad \text{und} \quad \delta \leq \frac{\varepsilon}{C}. \quad (42)$$

Es sei  $y \in C^1[0, a)$  eine nach rechts maximal fortgesetzte Lösung von (35) mit

$$\|y(0)\| \leq \delta \quad (43)$$

Wir werden zeigen:

$$\|y(t)\| \leq \varepsilon e^{-\frac{1}{2}\beta t} \quad \text{für} \quad 0 \leq t < a. \quad (44)$$

Wegen der maximalen Fortsetzung folgt dann  $a = \infty$ , ferner

$$\|y(t)\| \leq \varepsilon \quad \text{für} \quad 0 \leq t < \infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t)\| = 0$$

und damit die Behauptung.

Zum Nachweis von (44):  $y$  löst das System

$$\dot{y} = Ay + g(t, y) \quad (0 \leq t < a).$$

Hier fassen wir  $g(t, y(t))$  als Inhomogenität auf und erhalten aus der Lösungsformel für lineare inhomogene Systeme:

$$y(t) = \phi(t)y(0) + \phi(t) \int_0^t \phi(s)^{-1} g(s, y(s)) ds \quad (0 \leq t < a).$$

Wegen  $\phi(0) = I$  gilt weiter

$$\phi(t)\phi^{-1}(s) = \phi(t-s) \quad (0 \leq t, s < a)$$

(denn bei festem  $s$  ist auch  $\phi(t-s)$  eine Fundamentalmatrix und daher  $\phi(t-s) = \phi(t)B$  mit einer regulären Matrix  $B$ . Einsetzen von  $t = s$  ergibt  $B = \phi(s)^{-1}$ .)

Also gilt

$$y(t) = \phi(t)y(0) + \int_0^t \phi(t-s)g(s, y(s))ds \quad (0 \leq t < a),$$

und mit (40), (41), (43) folgt

$$\begin{aligned} \|y(t)\| &\leq Ce^{-\beta t} \|y(0)\| + \int_0^t Ce^{-\beta(t-s)} \|g(s, y(s))\| ds \\ &\leq C\delta e^{-\beta t} + Ce^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta s} \frac{\beta}{2C} \|y(s)\| ds, \end{aligned}$$

solange  $\|y(t)\| \leq \eta$  erfüllt ist (damit (41) benutzbar ist); beachte  $\|y(0)\| \stackrel{(43)}{\leq} \delta \stackrel{(42)}{\leq} \frac{\eta}{2C} \leq \frac{\eta}{2} < \eta$ .

Für  $\psi(t) := e^{\beta t} \|y(t)\|$  folgt also

$$\psi(t) \leq C\delta + \frac{\beta}{2} \int_0^t \psi(s) ds \quad (\text{solange } \|y(t)\| \leq \eta)$$

und daher nach dem Gronwall-Lemma:

$$\psi(t) \leq C\delta e^{\frac{1}{2}\beta t} \quad (\text{solange } \|y(t)\| \leq \eta),$$

also

$$\|y(t)\| \leq C\delta e^{-\frac{1}{2}\beta t} \quad (\text{solange } \|y(t)\| \leq \eta). \quad (45)$$

Wegen  $C\delta \leq \frac{\eta}{2}$  (nach (42)) folgt aus (45) aber

$$\|y(t)\| \leq C\delta e^{-\frac{1}{2}\beta t} \quad \text{für alle } t \in [0, a),$$

und daraus wegen  $C\delta \leq \varepsilon$  (nach (42)) die Behauptung (44).  $\square$

Als Gegenstück zu dem obigen Stabilitätssatz gilt auch der

**Satz 4.3 (Instabilitätssatz):**

*Es gelte (36), und  $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$  für mindestens einen Eigenwert  $\lambda$  von  $A$ . Dann ist die triviale Lösung von (35) instabil.*

Der Beweis ist etwas technisch und wird hier weggelassen; siehe [4].

Schließlich wollen wir die obigen Sätze benutzen, um stationäre Lösungen des *autonomen* Systems

$$\dot{y} = f(y) \quad (46)$$

auf Stabilität zu untersuchen. Hierbei sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine differenzierbare Funktion.

Es sei  $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$  eine Nullstelle von  $f$ . Die zeitlich konstante, also *stationäre* Lösung  $\bar{y}$  des Systems (46) wird nun auf Stabilität untersucht. Hierzu seien

$$A := f'(\bar{y}) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad g(z) := f(\bar{y} + z) - f'(\bar{y})z. \quad (47)$$

Wegen  $f(\bar{y}) = 0$  gilt

$$\frac{\|g(z)\|}{\|z\|} = \frac{\|f(\bar{y} + z) - f(\bar{y}) - f'(\bar{y})z\|}{\|z\|} \rightarrow 0 \quad \text{für } z \rightarrow 0, \quad (48)$$

denn dies drückt gerade die Differenzierbarkeit von  $f$  in  $\bar{y}$  aus.

Transformieren wir  $z = y - \bar{y}$ , so ergibt sich für  $z$  das System

$$\dot{z} = \dot{y} = f(y) = f(\bar{y} + z) = Az + g(z), \quad (49)$$

welches also von der Form (35) ist. Wegen der einfachen Transformation  $z = y - \bar{y}$  ist die Stabilität/asymptotische Stabilität/Instabilität der stationären Lösung  $\bar{y}$  des Systems (46) offenbar äquivalent zur Stabilität/asymptotischen Stabilität/Instabilität der trivialen Lösung des Systems (49). Wegen (48) erhalten wir aus den Sätzen 4.1 und 4.3 also sofort:

**Korollar 4.4:**

- a) Falls  $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$  für alle Eigenwerte  $\lambda$  von  $f'(\bar{y})$  gilt, so ist die stationäre Lösung  $\bar{y}$  von (46) asymptotisch stabil.
- b) Falls  $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$  für mindestens einen Eigenwert  $\lambda$  von  $f'(\bar{y})$  gilt, so ist die stationäre Lösung  $\bar{y}$  von (46) instabil.

**Bemerkung:** Die obigen Sätze geben keinerlei Auskunft im Fall

$$\operatorname{Re}(\lambda) \leq 0 \quad \text{für alle Eigenwerte } \lambda \text{ von } A (= f'(\bar{y}))$$

mit Gleichheit ( $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$ ) für mindestens einen Eigenwert. In der Tat können in diesem Fall die Stabilitätseigenschaften des nichtlinearen Systems verschieden sein von denen des linearisierten Systems  $\dot{y} = Ay$  (in dem also  $g$  weggelassen wird). Dies zeigt folgendes Beispiel.

**Beispiel:**  $n=1$ ; a)  $\dot{y} = y^3$ , b)  $\dot{y} = -y^3$ .

In beiden Fällen a), b) ist  $\bar{y} = 0$  die einzige Nullstelle von  $f(y) = \pm y^3$ , d.h. wir untersuchen die Stabilität der trivialen Lösung, und es ist  $f'(\bar{y}) = 0 \in \mathbb{R} = \mathbb{R}^{1 \times 1}$ ,  $g(z) = f(z)$ .

$\lambda = 0$  ist natürlich einziger Eigenwert von  $0 \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ , und Korollar 4.4 ist daher nicht anwendbar.

Das linearisierte Problem (in dem  $g$  weggelassen wird) lautet also

$$\dot{y} = 0$$

und hat nur konstante Lösungen. Insbesondere ist die triviale Lösung *stabil*, aber *nicht asymptotisch stabil*. Beim vollen nichtlinearen Problem finden wir hingegen:

- a) Die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{y} = y^3, \quad y(0) = y_0 \quad (\text{mit gegebenem } y_0 \in \mathbb{R})$$

lautet  $y \equiv 0$  im Fall  $y_0 = 0$ , und

$$y(t) = \frac{y_0}{\sqrt{1 - 2y_0^2 t}} \quad (0 \leq t < \frac{1}{2y_0^2})$$

im Fall  $y_0 \neq 0$  (Herleitung:  $\dot{y} = y^3$  hat getrennte Variable).

Jede Lösung  $y$  der Differentialgleichung außer der trivialen Lösung hat also eine Singularität bei  $\frac{1}{2y_0^2}$  und ist daher nicht auf  $[0, \infty)$  definiert. Also ist die triviale Lösung *instabil*.

b) Die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{y} = -y^3, \quad y(0) = y_0$$

lautet

$$y(t) = \frac{y_0}{\sqrt{1 + 2y_0^2 t}} \quad (0 \leq t < \infty).$$

Jede Lösung der Differentialgleichung ist also durch  $|y(0)|$  betraglich beschränkt und konvergiert für  $t \rightarrow \infty$  gegen 0. Also ist die triviale Lösung *asymptotisch stabil*.

## 5 Lineare Randwertprobleme mit gewöhnlichen Differentialgleichungen

Gegeben sei eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung

$$L[u](x) := \sum_{i=0}^n a_i(x) u^{(i)}(x) = r(x) \quad (a \leq x \leq b) \quad (50)$$

mit gegebenen stetigen Funktionen  $a_i, r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  (oder  $\mathbb{C}$ ) und einem kompakten Intervall  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ . Die Differentialgleichung sei *regulär*, d.h. es gelte

$$a_n(x) \neq 0 \quad (a \leq x \leq b). \quad (51)$$

(Die Koeffizientenfunktionen  $a_0, \dots, a_{n-1}$  dürfen hingegen natürlich Nullstellen haben.)

Zusätzlich betrachten wir *lineare Randbedingungen*

$$R_k[u] := \sum_{i=0}^{n-1} [\alpha_{ki} u^{(i)}(a) + \beta_{ki} u^{(i)}(b)] = \gamma_k \quad (k = 1, \dots, n) \quad (52)$$

mit gegebenen  $\alpha_{ki}, \beta_{ki}, \gamma_k \in \mathbb{R}$  (oder  $\mathbb{C}$ ).

Im Spezialfall  $\alpha_{ki} = \delta_{k-1,i}, \beta_{ki} = 0$  liefert (52) die bekannten *Anfangsbedingungen*

$$u(a) = \gamma_1, u'(a) = \gamma_2, \dots, u^{n-1}(a) = \gamma_n. \quad (53)$$

Das Gesamtproblem (50), (53) heißt bekanntlich *Anfangswertproblem* (oder *Anfangswertaufgabe*) und hat - bekanntlich - immer eine eindeutige Lösung  $u \in C^n[a, b]$ .

Das allgemeine Problem (50), (52) heißt *Randwertproblem* (oder *Randwertaufgabe*); seine Lösungstheorie ist komplizierter und wird später beleuchtet.

**Beispiel:** Die Auslenkung einer Hookeschen Feder führt - wie bereits in Kapitel 1 diskutiert - auf die Differentialgleichung  $u'' = -\omega^2 u$  (mit  $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$ ,

$D$  Federkonstante,  $m$  Masse). Falls zusätzlich noch eine (nur von der Zeit abhängige) äußere Kraft  $K(t)$  an der Masse angreift, erhalten wir die Differentialgleichung (mit  $r(t) := \frac{K(t)}{m}$ )

$$u'' + \omega^2 u = r. \quad (54)$$

Mittels der in der Grundvorlesung erlernten Methoden zur Lösung linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten bekommen wir als allgemeine Lösung von (54) (im Fall  $\omega \neq 0$ )

$$u(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t + \frac{1}{\omega} \int_0^t \sin[\omega(t-s)]r(s)ds \quad (55)$$

mit beliebigen  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

- a) Anfangswertproblem:  $u(0) = u_0, u'(0) = v_0$  mit  $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$ .  
Hier sind  $c_1, c_2$  eindeutig gegeben durch  $c_1 = u_0, c_2 = \frac{v_0}{\omega}$ , wie sich sofort durch Einsetzen von (55) in die Anfangsbedingungen ergibt.
- b) Randwertproblem: Z.B.  $u(0) = 0, u(1) = 0$  (zu den Zeiten  $t = 0$  und  $t = 1$  wird ein Nulldurchgang gefordert).  
Einsetzen von (55) in die Randbedingungen liefert  $c_1 = 0$  und

$$c_2 \sin \omega + \frac{1}{\omega} \int_0^1 \sin[\omega(1-s)]r(s)ds = 0. \quad (56)$$

**1. Fall:**  $\omega \neq n\pi \quad (n \in \mathbb{N})$ .

Dann liefert (56) ein eindeutiges  $c_2$ , d.h. das Randwertproblem ist *eindeutig lösbar*.

**2. Fall:**  $\omega = n\pi$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ .

Dann lautet (56):

$$\int_0^1 \sin[\omega(1-s)]r(s)ds = 0,$$

also wegen  $\sin[\omega(1-s)] = \underbrace{\sin \omega}_{=0} \cos(\omega s) - \underbrace{\cos \omega}_{\neq 0} \sin(\omega s)$ :

$$\int_0^1 \sin(\omega s)r(s)ds = 0. \quad (57)$$

Die Bedingung (57) enthält keine freie Konstante mehr, ist also entweder erfüllt oder nicht.

**1. Unterfall:** (57) ist erfüllt.

Dann hat das Randwertproblem *unendlich viele Lösungen*, denn  $c_2 \in \mathbb{R}$  ist beliebig.

**2. Unterfall:** (57) ist nicht erfüllt.

Dann hat das Randwertproblem *keine Lösung*.

Diese **Alternative**:

“*Entweder* das homogene Randwertproblem hat nur die triviale Lösung, und das inhomogene Randwertproblem hat für beliebige Inhomogenität  $r$  eine eindeutige Lösung

*oder* das homogene Randwertproblem hat nichttriviale Lösungen, und das inhomogene Randwertproblem hat nicht für jede Inhomogenität  $r$  eine Lösung; wenn doch, dann gibt es unendlich viele Lösungen”

wird uns auf allgemeiner Ebene wieder begegnen. (Sie gilt sogar für partielle Differentialgleichungen.)

- c) Man mag die Randbedingungen  $u(0) = 0$ ,  $u(1) = 0$  aus b) (Nulldurchgänge zu vorgegebenen Zeiten) als unphysikalisch ansehen. Wir können aber zum Beispiel auch nach *periodischen* Lösungen suchen, falls  $r$  die Periode  $T$  hat; dann ergeben sich die Randbedingungen

$$u(0) = u(T), \quad u'(0) = u'(T). \quad (58)$$

(Jede Lösung  $u \in C^2[0, T]$  von (54), (58) wird mittels der periodischen Fortsetzung  $u(t + nT) := u(t) \quad (t \in [0, T], n \in \mathbb{Z})$  zu einer periodischen Lösung  $u \in C^2(\mathbb{R})$  von (54).)

Setzen wir wieder (55) in die Randbedingungen (58) ein, so erhalten wir wieder eine Alternative der obigen Form. Die „Ausnahmemenge“ der  $\omega$ , für die das Randwertproblem keine eindeutige Lösung hat, ist hier  $\left\{ \frac{2\pi n}{T} : n \in \mathbb{N}_0 \right\}$  und für ein solches  $\omega = \frac{2\pi n}{T}$  ist

$$c_1 \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) + c_2 \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)$$

(mit beliebigen  $c_1$  und  $c_2$ ) Lösung des homogenen Randwertproblems.

**Beweis:** Übung

Wir gehen nochmal zurück zu Beispiel b) und wollen die Ausnahmemenge  $\{n\pi : n \in \mathbb{N}\}$  noch etwas anders beschreiben:

$$\begin{aligned} -u'' &= \omega^2 u \quad (0 \leq t \leq 1) \\ u(0) &= 0, \quad u(1) = 0 \end{aligned}$$

hat genau für  $\omega = n\pi$  (mit  $n \in \mathbb{N}$ ) nichttriviale Lösungen ( $c_2 \sin(n\pi t)$ ).

Äquivalent formuliert hat das *Eigenwertproblem*

$$\begin{aligned} -u'' &= \lambda u \quad (0 \leq t \leq 1) \\ u(0) &= 0, \quad u(1) = 0 \end{aligned}$$

die *Eigenwerte*  $\lambda_n = n^2\pi^2$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) und die *Eigenfunktionen*  $u_n(t) = \sin(n\pi t)$ . Derartige Eigenwertprobleme mit gewöhnlichen Differentialgleichungen werden wir später noch genauer und allgemeiner untersuchen.

Nun soll die im Beispiel b) erwähnte Alternative allgemein für Randwertprobleme der Form (50),(52) hergeleitet werden.

Wir nennen (wie immer) die Differentialgleichung (50) homogen, wenn  $r \equiv 0$  gilt, sonst inhomogen. Die Randbedingungen (52) heißen homogen, wenn  $\gamma_1 = \dots = \gamma_n = 0$ , sonst inhomogen. Das Randwertproblem (50),(52) heißt homogen, wenn die Differentialgleichung *und* die Randbedingungen homogen sind, sonst inhomogen.

Wir wählen ein beliebiges, (nun) festes Fundamentalsystem  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  der homogenen Differentialgleichung  $L[u] = 0$ , und eine spezielle Lösung  $\psi \in C^n[a, b]$  der inhomogenen Differentialgleichung (50). Die Existenz von  $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \psi$  wurde in den Anfänger-Vorlesungen behandelt (basierend auf dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Anfangswertprobleme). Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (50) lautet daher

$$u = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i + \psi \quad \text{mit beliebigen } c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}. \quad (59)$$

Setzen wir diese allgemeine Lösung in die Randbedingungen (52) ein, erhalten wir wegen der Linearität der  $R_k$  die Bedingungen

$$\sum_{i=1}^n c_i R_k[\varphi_i] + R_k[\psi] = \gamma_k \quad (k = 1, \dots, n),$$

d.h. mit

$$M := (R_k[\varphi_i])_{k,i=1,\dots,n}, \quad b := (\gamma_k - R_k[\psi])_{k=1,\dots,n}$$

das linear-algebraische System

$$M \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = b. \quad (60)$$

Zur Herleitung der erwünschten Alternative müssen wir nun lediglich die beiden Fälle

- i)  $\det M \neq 0$  und
- ii)  $\det M = 0$

unterscheiden: Im Fall i) ist (60) eindeutig lösbar (und das homogene Problem hat nur die triviale Lösung). Dasselbe gilt wegen obiger äquivalenter Umformungen daher auch für das Randwertproblem (50),(52). Analog schließen wir im Fall ii) ( $\det M = 0$ ) und erhalten somit:

**Satz 5.1:** *Es liegt einer der beiden folgenden Fälle vor:*

- i) *Das homogene Randwertproblem (50),(52) (mit  $r \equiv 0, \gamma_1 = \dots = \gamma_n = 0$ ) hat nur die triviale Lösung, und das inhomogene Randwertproblem hat für jedes  $r \in C[a, b]$  und alle  $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbb{R}$  eine eindeutige Lösung.*
- ii) *Das homogene Randwertproblem hat nichttriviale Lösungen, und das inhomogene Randwertproblem ist nicht für alle  $r \in C[a, b]$  und  $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbb{R}$  lösbar. Ist es doch lösbar, dann nicht eindeutig.*

**Bemerkung:** Die beiden Fälle  $\det M \neq 0$  und  $\det M = 0$  in (60) sind nicht von der Wahl des Fundamentalsystems abhängig: Ist  $(\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_n) = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)C$  (mit einer invertierbaren (!) Matrix  $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ) ein weiteres Fundamentalsystem, so gilt für  $\tilde{M} := (R_k[\tilde{\varphi}_i])_{k,i=1,\dots,n}$ :  $\tilde{M} = MC$ . Also gilt  $\det \tilde{M} = 0$  genau dann, wenn auch  $\det M = 0$  ist.

**Beispiel:** Betrachte das Randwertproblem

$$-u'' + c(x)u = r(x) \quad (0 \leq x \leq 1), \quad u(0) = \gamma_1, \quad u(1) = \gamma_2 \quad (61)$$

mit  $c, r \in C[0, 1]$  und  $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ . Im Allgemeinen ist (61) nicht geschlossen lösbar. Setzen wir zusätzlich

$$c(x) \geq 0 \quad (0 \leq x \leq 1) \quad (62)$$

voraus, so können wir zeigen, daß das homogene Randwertproblem nur die triviale Lösung hat: Ist  $u \in C^2[0, 1]$  Lösung von

$$-u'' + c(x)u = 0 \quad (0 \leq x \leq 1), \quad u(0) = u(1) = 0,$$

so gilt

$$0 = \int_0^1 u(-u'' + cu)dx = \underbrace{-uu'|_0^1}_{=0} + \int_0^1 (u')^2 dx + \int_0^1 \underbrace{c}_{\geq 0} u^2 dx \geq \int_0^1 (u')^2 dx$$

und daher  $u' = 0$ , also  $u \equiv u(0) = 0$ .

In der Alternative von Satz 5.1 muß also Fall i) vorliegen. Daher ist das inhomogene Randwertproblem (61) eindeutig lösbar.

**Bemerkung:** Die eindeutige Lösbarkeit des Randwertproblems (61) ist allgemeiner unter der Voraussetzung

$$c(x) > -\pi^2 \quad (0 \leq x \leq 1) \quad (63)$$

(anstelle von (62)) gegeben, wie wir später zeigen werden. In gewissem Sinne können wir aber (63) nicht noch weiter abschwächen, denn für  $c \equiv -\pi^2$  hat das homogene Randwertproblem (61) die nichttriviale Lösung  $\sin(\pi x)$ .

## 6 Die Greensche Funktion

Gegeben sei nun ein Randwertproblem (50), (52), und es liege Fall i) im Alternativsatz 5.1 vor. Wir suchen nach einer „expliziten“ Darstellung der eindeutigen Lösung.

**Beispiel:**

$$-u'' = r \quad (0 \leq x \leq 1), \quad u(0) = \gamma_1, \quad u(1) = \gamma_2. \quad (64)$$

Das homogene Problem hat nur die triviale Lösung, denn  $u'' = 0$  hat die allgemeine Lösung  $u(x) = ax + b$  (mit  $a, b \in \mathbb{R}$ ), und  $u(0) = u(1) = 0$  impliziert  $a = b = 0$ . Also liegt in der Tat Fall i) in Satz 5.1 vor. Ist nun  $u \in C^2[0, 1]$  die eindeutige Lösung von (64), so erhalten wir durch Aufintegrieren

$$\begin{aligned} u'(x) &= - \int_0^x r(t) dt + c_0 \quad \text{mit einem } c_0 \in \mathbb{R}, \\ u(x) &= - \int_0^x 1 \left( \int_0^t r(s) ds \right) dt + c_0 x + c_1 \quad \text{mit einem weiteren } c_1 \in \mathbb{R}, \\ &= - \left[ t \int_0^t r(s) ds \right]_0^x + \int_0^x t \cdot r(t) dt + c_0 x + c_1 \\ &= \int_0^x (t - x) r(t) dt + c_0 x + c_1 \quad (0 \leq x \leq 1). \end{aligned} \quad (65)$$

Die Randbedingung  $u(0) = \gamma_1$  liefert  $c_1 = \gamma_1$ . Die zweite Randbedingung  $u(1) = \gamma_2$  verlangt

$$\int_0^1 (t - 1) r(t) dt + c_0 + c_1 = \gamma_2,$$

also (mit  $c_1 = \gamma_1$ )

$$c_0 = \gamma_2 - \gamma_1 + \int_0^1 (1 - t) r(t) dt.$$

Setzen wir dies in (65) ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^x (t - x) r(t) dt + x \left[ \gamma_2 - \gamma_1 + \underbrace{\int_0^1 (1 - t) r(t) dt}_{=\int_0^x + \int_x^1} \right] + \gamma_1 \\ &= \int_0^x (1 - x) t r(t) dt + \int_x^1 x (1 - t) r(t) dt + (1 - x) \gamma_1 + x \gamma_2 \\ &= \int_0^1 G(x, t) r(t) dt + (1 - x) \gamma_1 + x \gamma_2 \quad (0 \leq x \leq 1) \end{aligned}$$

mit

$$G(x, t) := \begin{cases} x(1-t) & 0 \leq x \leq t \leq 1, \\ (1-x)t & 0 \leq t \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$G$  heißt *Greensche Funktion* zu  $(-u'', u(0), u(1))$ .

Wir stellen fest:

- a)  $G$  ist stetig auf  $[0, 1] \times [0, 1]$ .
- b) Eingeschränkt auf die beiden Dreiecke  $\Delta_1 := \{(x, t) \in [0, 1]^2 : x \leq t\}$  und  $\Delta_2 := \{(x, t) \in [0, 1]^2 : x \geq t\}$  ist  $G$  als Funktion von  $x$  zweimal stetig differenzierbar.
- c)  $\frac{\partial G}{\partial x}(x, x-0) - \frac{\partial G}{\partial x}(x, x+0) = -1$ .
- d) Eingeschränkt auf  $\Delta_1$  und auf  $\Delta_2$  erfüllt  $G$  als Funktion von  $x$  die homogene Differentialgleichung, also  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}(G|_{\Delta_i})(x, t) = 0$ .
- e)  $G$  erfüllt als Funktion von  $x$  die homogenen Randbedingungen, also  $G(0, t) = G(1, t) = 0$ .

Nun wollen wir die Greensche Funktion auch für allgemeine Differentialausdrücke  $L$  der Form (50) und Randausdrücke  $R_1, \dots, R_n$  der Form (52) definieren.

**Satz 6.1:**

*Hat das homogene Randwertproblem  $L[u] = 0$  ( $a \leq x \leq b$ ),  $R_1[u] = \dots = R_n[u] = 0$  nur die triviale Lösung, so existiert eine eindeutig bestimmte Greensche Funktion  $G : [a, b]^2 \rightarrow \mathbb{R}$  zu  $(L, R_1, \dots, R_n)$ , die auf  $[a, b]^2$  (falls  $n \geq 2$ ) bzw. auf  $[a, b]^2 \setminus \{(x, x) : x \in [a, b]\}$  (falls  $n = 1$ ) stetig ist und die Eigenschaft hat, daß für jedes  $r \in C[a, b]$  die eindeutige Lösung  $u$  des Randwertproblems*

$$L[u] = r \quad (a \leq x \leq b), \quad R_k[u] = 0 \quad (k = 1, \dots, n)$$

*gegeben ist durch*

$$u(x) = \int_a^b G(x, t)r(t)dt \quad (a \leq x \leq b). \quad (66)$$

*(Im Fall  $n = 1$  ist die Eindeutigkeit von  $G$  nur bis auf die Nullmenge  $\{(x, x) : x \in [a, b]\}$  gegeben.)*

*$G$  ist eindeutig festgelegt auch durch folgende Eigenschaften:*

$$G(x, t) = \begin{cases} G_1(x, t) & ((x, t) \in \Delta_1 := \{(\tilde{x}, \tilde{t}) : a \leq \tilde{x} \leq \tilde{t} \leq b\}) \\ G_2(x, t) & ((x, t) \in \Delta_2 := \{(\tilde{x}, \tilde{t}) : a \leq \tilde{t} \leq \tilde{x} \leq b\}) \end{cases}$$

mit

- a) falls  $n \geq 2$ :  $G, \frac{\partial G}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{n-2} G}{\partial x^{n-2}}$  existieren und sind stetig auf  $[a, b]^2$ .

- b)  $G_i, \frac{\partial G_i}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^n G_i}{\partial x^n}$  existieren und sind stetig auf  $\overline{\Delta}_i$  ( $i = 1, 2$ ).
- c)  $\frac{\partial^{n-1} G_2}{\partial x^{n-1}}(x, x) - \frac{\partial^{n-1} G_1}{\partial x^{n-1}}(x, x) = \frac{1}{a_n(x)} \quad (a \leq x \leq b).$
- d)  $L[G_i(\cdot, t)](x) = 0$  für  $(x, t) \in \overline{\Delta}_i$  ( $i = 1, 2$ ), d.h.  $G$  erfüllt auf den beiden Teildreiecken als Funktion von  $x$  die homogene Differentialgleichung.
- e)  $R_k[G(\cdot, t)] = 0 \quad (k = 1, \dots, n, t \in [a, b])$  in dem Sinne, daß

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left[ \alpha_{ki} \frac{\partial^i G_1}{\partial x^i}(a, t) + \beta_{ki} \frac{\partial^i G_2}{\partial x^i}(b, t) \right] = 0 \quad (k = 1, \dots, n, t \in [a, b]).$$

**Beweis:** Wir zeigen:

- 1) Es existiert ein  $G$  mit den Eigenschaften a) bis e), die  $G$  eindeutig festlegen.
- 2) Es gilt die Darstellungsformel (66); sie legt  $G$  ebenfalls fest (im Fall  $n = 1$  nur bis auf die Nullmenge  $\{(x, x) : x \in [a, b]\}$ ).

**Zu 1):** (Dieser Beweisteil ist auch als *Konstruktionsvorschrift* für die Greensche Funktion zu lesen.)

$(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  sei ein (nun fest gewähltes) Fundamentalsystem zur Differentialgleichung  $L[u] = 0$ . Wir machen den Ansatz

$$G_1(x, t) = \sum_{k=1}^n C_k(t) \varphi_k(x), \quad G_2(x, t) = \sum_{k=1}^n D_k(t) \varphi_k(x)$$

mit stetigen Funktionen  $C_k, D_k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann sind b) und d) bereits erfüllt. Ferner *müssen*  $G_1$  und  $G_2$  wegen b) und d) diese Form haben! Mit  $A_k = \frac{1}{2}(C_k + D_k)$ ,  $B_k = \frac{1}{2}(C_k - D_k)$  ist eine äquivalente Formulierung dieses Ansatzes gegeben durch

$$\begin{aligned} G_1(x, t) &= \sum_{k=1}^n (A_k(t) + B_k(t)) \varphi_k(x), \\ G_2(x, t) &= \sum_{k=1}^n (A_k(t) - B_k(t)) \varphi_k(x). \end{aligned}$$

Eigenschaft a) verlangt nun (falls  $n \geq 2$ ):

$$\sum_{k=1}^n (A_k(t) + B_k(t)) \varphi_k^{(j)}(x) = \sum_{k=1}^n (A_k(t) - B_k(t)) \varphi_k^{(j)}(x)$$

für  $x = t \in [a, b]$ ;  $j = 0, \dots, n-2$ , also

$$\sum_{k=1}^n B_k(x) \varphi_k^{(j)}(x) = 0 \quad \text{für } x \in [a, b]; j = 0, \dots, n-2. \quad (67)$$

Eigenschaft c) verlangt

$$\sum_{k=1}^n (A_k(x) - B_k(x)) \varphi_k^{(n-1)}(x) - \sum_{k=1}^n (A_k(x) + B_k(x)) \varphi_k^{(n-1)}(x) = \frac{1}{a_n(x)}$$

für alle  $x \in [a, b]$ , also

$$\sum_{k=1}^n B_k(x) \varphi_k^{(n-1)}(x) = -\frac{1}{2a_n(x)} \quad (x \in [a, b]). \quad (68)$$

(67) und (68) gemeinsam bilden offenbar ein lineares Gleichungssystem für  $B_1(x), \dots, B_n(x)$ :

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \dots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1(x) \\ B_2(x) \\ \vdots \\ B_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\frac{1}{2a_n(x)} \end{pmatrix} \quad (x \in [a, b]). \quad (69)$$

Die Matrix  $\Phi(x)$  ist die zu  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  gehörige Fundamentalmatrix, also für alle  $x \in [a, b]$  invertierbar. Also sind  $B_1(x), \dots, B_n(x)$  durch (69) eindeutig bestimmt. Da die Einträge der Matrixfunktion  $\Phi$  sowie die rechte Seite in (69) *stetig* auf  $[a, b]$  sind, folgt auch die Stetigkeit von  $B_1, \dots, B_n$ , etwa mit Hilfe der Cramerschen Regel: Die  $B_j$  sind Quotienten von Determinanten, also von polynomialen Ausdrücken in den Einträgen von  $\Phi$  und  $a_n$ , und der Nenner verschwindet nirgends.

Es verbleibt Eigenschaft e); diese verlangt

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left[ \alpha_{ki} \sum_{j=1}^n (A_j(t) + B_j(t)) \varphi_j^{(i)}(a) + \beta_{ki} \sum_{j=1}^n (A_j(t) - B_j(t)) \varphi_j^{(i)}(b) \right] = 0$$

$(k = 1, \dots, n, t \in [a, b]),$

also

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n A_j(t) \underbrace{\left[ \sum_{i=0}^{n-1} \left( \alpha_{ki} \varphi_j^{(i)}(a) + \beta_{ki} \varphi_j^{(i)}(b) \right) \right]}_{=R_k[\varphi_j]} \\ &= \sum_{j=1}^n B_j(t) \left[ \sum_{i=0}^{n-1} \left( -\alpha_{ki} \varphi_j^{(i)}(a) + \beta_{ki} \varphi_j^{(i)}(b) \right) \right] \quad (k = 1, \dots, n; t \in [a, b]). \end{aligned} \quad (70)$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem für  $A_1(t), \dots, A_n(t)$  mit Matrix  $(R_k[\varphi_j])_{k,j=1,\dots,n}$ . Diese ist invertierbar, da Alternative i) des Alternativsatzes vorliegt (siehe Beweis des Alternativsatzes). Also sind  $A_1(t), \dots, A_n(t)$  durch (70) eindeutig bestimmt, ferner stetig wegen der Stetigkeit von  $B_1, \dots, B_n$ .

**Zu 2):** Es sei  $r \in C[a, b]$  gegeben. Mit der in 1) konstruierten Greenschen Funktion  $G$  setzen wir:

$$\begin{aligned} u(x) &:= \int_a^b G(x, t) r(t) dt \\ &= \int_a^x G_2(x, t) r(t) dt + \int_x^b G_1(x, t) r(t) dt \quad (a \leq x \leq b). \end{aligned} \quad (71)$$

Wegen Eigenschaft b) ist  $u$  differenzierbar, und

$$\begin{aligned} u'(x) &= \underbrace{[G_2(x, x) - G_1(x, x)]}_{=0, \text{ da } G \text{ stetig f\"ur } n \geq 2} \cdot r(x) + \int_a^x \frac{\partial G_2}{\partial x}(x, t) r(t) dt \\ &\quad + \int_x^b \frac{\partial G_1}{\partial x}(x, t) r(t) dt. \end{aligned}$$

Falls  $n \geq 2$ , ist  $u'$  also wegen Eigenschaft b) differenzierbar, und

$$\begin{aligned} u''(x) &= \underbrace{\left[ \frac{\partial G_2}{\partial x}(x, x) - \frac{\partial G_1}{\partial x}(x, x) \right]}_{=0, \text{ da } \frac{\partial G}{\partial x} \text{ stetig f\"ur } n \geq 3} \cdot r(x) + \int_a^x \frac{\partial^2 G_2}{\partial x^2}(x, t) r(t) dt + \\ &\quad + \int_x^b \frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2}(x, t) r(t) dt. \end{aligned}$$

Falls  $n \geq 3$ , ist  $u''$  also differenzierbar. Durch induktive Fortsetzung erhalten wir entsprechende Formeln f\"ur alle Ableitungen von  $u$  bis

$$\begin{aligned} u^{(n-1)}(x) &= \underbrace{\left[ \frac{\partial^{n-2} G_2}{\partial x^{n-2}}(x, x) - \frac{\partial^{n-2} G_1}{\partial x^{n-2}}(x, x) \right]}_{=0, \text{ da } \frac{\partial^{(n-2)} G}{\partial x^{n-2}} \text{ stetig, falls } n \geq 2} \cdot r(x) \\ &\quad + \int_a^x \frac{\partial^{n-1} G_2}{\partial x^{n-1}}(x, t) r(t) dt + \int_x^b \frac{\partial^{n-1} G_1}{\partial x^{n-1}}(x, t) r(t) dt \end{aligned}$$

und schlie\u00dflich (auch im Fall  $n = 1$ )

$$\begin{aligned} u^{(n)}(x) &= \underbrace{\left[ \frac{\partial^{n-1} G_2}{\partial x^{n-1}}(x, x) - \frac{\partial^{n-1} G_1}{\partial x^{n-1}}(x, x) \right]}_{=\frac{1}{a_n(x)}, \text{ wegen c).}} \cdot r(x) + \\ &\quad + \int_a^x \frac{\partial^n G_2}{\partial x^n}(x, t) r(t) dt + \int_x^b \frac{\partial^n G_1}{\partial x^n}(x, t) r(t) dt. \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned}
L[u](x) &= \sum_{i=0}^n a_i(x) u^{(i)}(x) \\
&= r(x) + \int_a^x \underbrace{\left[ \sum_{i=0}^n a_i(x) \frac{\partial^i G_2}{\partial x^i}(x, t) \right]}_{=L[G_2(\cdot, t)]=0 \text{ wegen Eigenschaft d)} r(t) dt \\
&\quad + \int_x^b \underbrace{\left[ \sum_{i=0}^n a_i(x) \frac{\partial^i G_1}{\partial x^i}(x, t) \right]}_{=L[G_1(\cdot, t)]=0, \text{ wegen d)} r(t) dt \\
&= r(x) \quad (a \leq x \leq b)
\end{aligned}$$

und für  $k = 1, \dots, n$ :

$$\begin{aligned}
R_k[u] &= \sum_{i=0}^{n-1} [\alpha_{ki} u^{(i)}(a) + \beta_{ki} u^{(i)}(b)] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \left[ \alpha_{ki} \int_a^b \frac{\partial^i G_1}{\partial x^i}(a, t) r(t) dt + \beta_{ki} \int_a^b \frac{\partial^i G_2}{\partial x^i}(b, t) r(t) dt \right] \\
&= \int_a^b \underbrace{\left( \sum_{i=0}^{n-1} \left[ \alpha_{ki} \frac{\partial^i G_1}{\partial x^i}(a, t) + \beta_{ki} \frac{\partial^i G_2}{\partial x^i}(b, t) \right] \right)}_{=0, \text{ wegen e)} r(t) dt \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$u$  ist also *die* Lösung des Randwertproblems  $L[u] = r$  ( $a \leq x \leq b$ ),  $R_1[u] = \dots = R_n[u] = 0$ , d.h. (71) ist die behauptete Lösungsdarstellung (66).

Es bleibt zu zeigen, daß auch (66) die Greensche Funktion eindeutig festlegt. Sei dazu zunächst  $n \geq 2$ . Ist  $\tilde{G}$  eine weitere stetige Funktion auf  $[a, b]^2$ , für welche die Lösungsdarstellung (66) gilt, dann ist also

$$\int_a^b [G(x, t) - \tilde{G}(x, t)] r(t) dt = 0 \quad \forall x \in [a, b] \quad \forall r \in C[a, b]. \quad (72)$$

Annahme:  $G(x, t) - \tilde{G}(x, t) \neq 0$  für ein  $(x, t) \in [a, b]^2$ . Dann wechselt  $G - \tilde{G}$  in einer offenen Umgebung  $U = U_x \times U_t$  von  $(x, t)$  nicht das Vorzeichen; o.B.d.A. sei  $G - \tilde{G} > 0$  auf  $U$  (sonst vertausche  $G$  und  $\tilde{G}$ ). Wir wählen ein  $r \in C[a, b]$  mit  $r > 0$  auf  $U_t$ ,  $r = 0$  außerhalb  $U_t$ . Dann folgt für  $\tilde{x} \in U_x$ :

$$\int_a^b [G(\tilde{x}, \tilde{t}) - \tilde{G}(\tilde{x}, \tilde{t})] r(\tilde{t}) d\tilde{t} = \int_{U_t} \underbrace{[G(\tilde{x}, \tilde{t}) - \tilde{G}(\tilde{x}, \tilde{t})]}_{>0} \underbrace{r(\tilde{t})}_{>0} d\tilde{t} > 0$$

im Widerspruch zu (72).

Im Fall  $n = 1$  erhalten wir genauso einen Widerspruch zur Annahme, daß  $G(x, t) - \tilde{G}(x, t) \neq 0$  für ein  $(x, t) \in [a, b]^2$  mit  $x \neq t$  gilt.  $\square$

Der folgende Satz liefert nun eine Darstellung der Lösung des *voll* inhomogenen Problems (bei dem also auch die Randbedingungen inhomogen sind).

**Satz 6.2:**

Das homogene Randwertproblem  $L[u] = 0$  ( $a \leq x \leq b$ ),  $R_k[u] = 0$  ( $k = 1, \dots, n$ ) habe nur die triviale Lösung, und  $G$  sei die Greensche Funktion zu  $(L, R_1, \dots, R_n)$ . Ferner sei  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  ein Fundamentalsystem zur Differentialgleichung  $L[u] = 0$  ( $a \leq x \leq b$ ) mit der Zusatzeigenschaft

$$R_k[\varphi_i] = \delta_{ik} \quad (i, k = 1, \dots, n). \quad (73)$$

(Existenz und Eindeutigkeit eines solchen Fundamentalsystems: Übung.) Dann ist für alle  $r \in C[a, b]$  und  $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbb{R}$  die eindeutige Lösung des Randwertproblems

$$L[u] = r \quad (a \leq x \leq b), \quad R_k[u] = \gamma_k \quad (k = 1, \dots, n) \quad (74)$$

gegeben durch

$$u(x) = \int_a^b G(x, t)r(t)dt + \sum_{i=1}^n \gamma_i \varphi_i(x) \quad (a \leq x \leq b). \quad (75)$$

**Beweis:** Wir setzen

$$u_1(x) := \int_a^b G(x, t)r(t)dt, \quad u_2(x) := \sum_{i=1}^n \gamma_i \varphi_i(x) \quad (a \leq x \leq b).$$

Nach Satz 6.1 gilt

$$L[u_1] = r \quad (a \leq x \leq b), \quad R_k[u_1] = 0 \quad (k = 1, \dots, n).$$

Wegen  $L[\varphi_i] = 0$  ( $a \leq x \leq b$ ,  $i = 1, \dots, n$ ) und (73) erhalten wir weiter

$$L[u_2] = 0 \quad (a \leq x \leq b), \quad R_k[u_2] = \sum_{i=1}^n \gamma_i \delta_{ik} = \gamma_k \quad (k = 1, \dots, n),$$

also insgesamt wegen der Linearität des Problems:

$$L[u_1 + u_2] = r \quad (a \leq x \leq b), \quad R_k[u_1 + u_2] = \gamma_k \quad (k = 1, \dots, n),$$

d.h.  $u := u_1 + u_2$  löst wie behauptet das Randwertproblem (74).  $\square$

Schließlich betrachten wir den **Spezialfall**:

$$\begin{aligned} L[u](x) &= a_2(x)u''(x) + a_1(x)u'(x) + a_0(x)u(x) \quad (a \leq x \leq b), \\ R_1[u] &= -\alpha_0 u'(a) + \beta_0 u(a), \quad R_2[u] = \alpha_1 u'(b) + \beta_1 u(b) \end{aligned} \quad (76)$$

mit  $a_0, a_1, a_2 \in C[a, b]$ ,  $a_2(x) \neq 0$  ( $a \leq x \leq b$ ) und  $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$  mit  $\alpha_0^2 + \beta_0^2 > 0$ ,  $\alpha_1^2 + \beta_1^2 > 0$ .

Problem (76) ist speziell wegen  $n = 2$ , aber auch wegen der *Separiertheit* der Randbedingungen, d.h.  $R_1$  greift nur auf den Randpunkt  $a$  zu,  $R_2$  nur auf den Randpunkt  $b$ . (Z.B. periodische Randbedingungen sind *nicht* separiert.)

Wir setzen wieder voraus, daß das homogene Randwertproblem

$$L[u] = 0 \quad (a \leq x \leq b), \quad R_1[u] = R_2[u] = 0$$

nur die triviale Lösung hat.  $(\varphi, \psi)$  sei ein Fundamentalsystem zur Differentialgleichung  $L[u] = 0$  ( $a \leq x \leq b$ ) mit der Zusatzeigenschaft (vgl. (73))

$$R_1[\varphi] = 0, \quad R_2[\varphi] = 1, \quad R_1[\psi] = 1, \quad R_2[\psi] = 0. \quad (77)$$

Ferner sei

$$W(x) := \det \begin{pmatrix} \varphi(x) & \psi(x) \\ \varphi'(x) & \psi'(x) \end{pmatrix}$$

die Wronski-Determinante des Fundamentalsystems  $(\varphi, \psi)$ . Dann ist die Green-sche Funktion zu  $(L, R_1, R_2)$  gegeben durch

$$G(x, t) = \frac{1}{a_2(t)W(t)} \begin{cases} \varphi(x)\psi(t) & (a \leq x \leq t \leq b) \\ \varphi(t)\psi(x) & (a \leq t \leq x \leq b). \end{cases} \quad (78)$$

**Beweis:** Übung.

**Beispiel:** Wir betrachten noch einmal das Eingangsbeispiel

$$L[u] = -u'' \quad (0 \leq x \leq 1), \quad R_1[u] = u(0), \quad R_2[u] = u(1).$$

Das Fundamentalsystem  $(\varphi, \psi)$  zu  $-u'' = 0$  mit der Zusatzeigenschaft (77) lautet hier:

$$\varphi(x) = x, \quad \psi(x) = 1 - x \quad (0 \leq x \leq 1).$$

Somit gilt  $W(x) = \det \begin{pmatrix} x & 1-x \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -1$ . Nach (78) erhalten wir

$$G(x, t) = \begin{cases} x(1-t) & (0 \leq x \leq t \leq 1) \\ t(1-x) & (0 \leq t \leq x \leq 1), \end{cases}$$

wie eingangs des Kapitels schon direkt berechnet wurde.

## 7 Die eindimensionale Wellengleichung

Die eindimensionale Wellengleichung ist die erste *partielle* Differentialgleichung, mit der wir uns beschäftigen wollen. Zur Motivation betrachten wir eine schwingende *Saite* mit Längenmassendichte  $\rho$  [kg/m] und Länge  $l$ , die mit der Spannkraft  $T$  [kg m/s<sup>2</sup>] bei  $x = 0$  und  $x = l$  eingespannt ist. Bei der mathematischen Modellbildung der Saite machen wir folgende Näherungen:

- Biegekräfte sind vernachlässigbar (dies unterscheidet die „Saite“ von einem „Balken“).
- Gegenüber der Spannkraft  $T$  sind alle äußeren Kräfte (z.B. Gravitation) vernachlässigbar.
- Die Auslenkungen  $u(x, t)$  der Saite sind klein, d.h. Terme quadratischer (und höherer) Ordnung in  $u$  sind vernachlässigbar, ferner auch longitudinale Auslenkungen.

Es sei  $K(x, t) = (K_1(x, t), K_2(x, t))$  die Kraft - als differenzierbar angenommen - im Punkt  $x$  zur Zeit  $t$ , tangential an die Saite und nach rechts gerichtet. Die Gesamtkraft, die an einem Saitenstück zwischen  $x$  und  $x + \Delta x$  angreift, beträgt

$$K(x + \Delta x, t) - K(x, t) \underset{\text{Taylor}}{=} \frac{\partial K}{\partial x}(x, t) \Delta x + o(\Delta x) \quad (79)$$

Andererseits ist der „Masse·Beschleunigung“-Term dieses Stückes in  $y$ -Richtung gegeben durch

$$\int_x^{x+\Delta x} \rho(\tilde{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\tilde{x}, t) d\tilde{x} = \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \Delta x + o(\Delta x) \quad (80)$$

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  ist die transversale Beschleunigung in  $y$ -Richtung; die longitudinale (in  $x$ -Richtung) wird wie verabredet vernachlässigt. Wegen (79), (80) gilt nach dem Newtonschen Kraftgesetz:

$$\frac{\partial K}{\partial x}(x, t) \Delta x + o(\Delta x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \Delta x + o(\Delta x) \end{pmatrix}.$$

Dividieren wir durch  $\Delta x$  und schicken dann  $\Delta x \rightarrow 0$ , erhalten wir

$$\frac{\partial K}{\partial x}(x, t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial K_1}{\partial x}(x, t) \\ \frac{\partial K_2}{\partial x}(x, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \end{pmatrix}.$$

Also ist  $K_1$  räumlich konstant und damit  $\equiv T$  (für alle  $t$ ), und

$$K_2(x, t) = \int_0^x \rho(\tilde{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\tilde{x}, t) d\tilde{x} + K_2(0, t). \quad (81)$$

Da  $K(x, t)$  tangential (und nach rechts) angreift, gilt weiter

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \frac{K_2(x, t)}{K_1(x, t)} \underset{(81)}{=} \frac{1}{T} \int_0^x \rho(\tilde{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\tilde{x}, t) d\tilde{x} + \frac{K_2(0, t)}{T},$$

und Differenzieren nach  $x$  liefert

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\rho(x)}{T} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t).$$

Nehmen wir ferner  $\rho$  als konstant an, so folgt mit  $c := \sqrt{\frac{T}{\rho}}$  (Wellengeschwindigkeit):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 \leq x \leq l, t \geq 0). \quad (82)$$

Dies ist die (räumlich) eindimensionale *Wellengleichung* für die Auslenkung  $u$ . Da die Saite bei  $x = 0$  und bei  $x = l$  eingespannt ist, erhalten wir ferner die *Randbedingungen*

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad \text{für alle } t \geq 0. \quad (83)$$

Für eine sachgemäße Problemstellung kommen zu (82), (83) noch *Anfangsbedingungen* hinzu, die den Anfangszustand und die Anfangsgeschwindigkeit der Saite festlegen:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) \quad (0 \leq x \leq l) \quad (84)$$

mit gegebenen Funktionen  $u_0, u_1 : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ . (82), (83), (84) heißt *Anfangsrandwertproblem* für die Wellengleichung.

Zur mathematischen Untersuchung betrachten wir zunächst die Wellengleichung auf ganz  $\mathbb{R}$  (ohne Randbedingungen):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (x \in \mathbb{R}, t \geq 0). \quad (85)$$

Zur Lösung führen wir *charakteristische Koordinaten*

$$\xi = x + ct, \quad \eta = x - ct$$

ein (also gilt  $x = \frac{1}{2}(\xi + \eta)$ ,  $t = \frac{1}{2c}(\xi - \eta)$ ) und betrachten, für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion  $u$ ,

$$\tilde{u}(\xi, \eta) := u(x, t) = u\left(\frac{1}{2}(\xi + \eta), \frac{1}{2c}(\xi - \eta)\right).$$

Also ist

$$u(x, t) = \tilde{u}(\xi, \eta) = \tilde{u}(x + ct, x - ct). \quad (86)$$

Dann gilt nach der Kettenregel

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta \partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ &= \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2}, \end{aligned} \quad (87)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} = c \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} - c \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \dots = c^2 \left( \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2} \right). \end{aligned} \quad (88)$$

Nach (87), (88) gilt (85) genau dann, wenn

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \quad (89)$$

(89) läßt sich nun leicht durch Aufintegrieren lösen:  
 $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}$  ist nach (89) unabhängig von  $\eta$ , also

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}(\xi, \eta) = \hat{\omega}(\xi)$$

mit einer Funktion  $\hat{\omega}$ . Nochmaliges Aufintegrieren ergibt

$$\tilde{u}(\xi, \eta) = \int_0^\xi \hat{\omega}(s) ds + \underbrace{\text{„Konstante“}}_{\text{darf von } \eta \text{ abhängen!}},$$

also

$$\tilde{u}(\xi, \eta) = \omega_1(\xi) + \omega_2(\eta)$$

mit geeigneten Funktionen  $\omega_1, \omega_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Gemäß (86) erhalten wir also

$$u(x, t) = \omega_1(x + ct) + \omega_2(x - ct). \quad (90)$$

Jede  $C^2$ -Lösung  $u$  der Wellengleichung (85) ist also von der Form (90). Umgekehrt ist jede Funktion  $u$  der Form (90) mit *beliebigen*  $\omega_1, \omega_2 \in C^2(\mathbb{R})$  Lösung der Wellengleichung, d.h. (90) ist die allgemeine Lösung von (85). Im Gegensatz zur Erfahrung bei gewöhnlichen Differentialgleichungen sind also hier zwei *Funktionen*  $\omega_1, \omega_2$  frei und nicht nur zwei Konstanten.

Wir betrachten den Spezialfall  $\omega_1 \equiv 0$ , also  $u(x, t) = \omega_2(x - ct)$ . Erhöhung von  $t$  um  $\tau > 0$  und von  $x$  um  $c\tau$  liefert offenbar denselben Funktionswert. Also ist  $u$  eine mit Geschwindigkeit  $c$  *nach rechts laufende Welle*. Genauso erhalten wir im Spezialfall  $\omega_2 \equiv 0$ , also  $u(x, t) = \omega_1(x + ct)$ , eine *nach links laufende Welle*.

Jede Lösung der Wellengleichung (85) ist also Superposition einer nach rechts laufenden und einer nach links laufenden Welle!

Wir betrachten nun die Wellengleichung (85) zusammen mit *Anfangsbedingungen*

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (91)$$

mit gegebenen Funktionen  $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$ ,  $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$ . Das *Anfangswertproblem* (85), (91), also mit auf ganz  $\mathbb{R}$  gestellten Anfangsbedingungen, wird auch *Cauchy-Problem* für die Wellengleichung genannt. (Zusätzliche *Randbedingungen* wie in (83) fallen beim Cauchy-Problem nicht an.)

Wir setzen nun die allgemeine Lösung (90) in die Anfangsbedingungen (91) ein. Da nach (90)

$$u(x, 0) = \omega_1(x) + \omega_2(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = c \omega_1'(x) - c \omega_2'(x)$$

gilt, liefert (91) die Bedingungen

$$(a) \omega_1(x) + \omega_2(x) = u_0(x), \quad (b) \omega_1'(x) - \omega_2'(x) = \frac{1}{c} u_1(x) \quad (x \in \mathbb{R}). \quad (92)$$

Durch Aufintegrieren von (92b) erhalten wir

$$\omega_1(x) - \omega_2(x) = \frac{1}{c} \int_0^x u_1(s) ds + k \quad (x \in \mathbb{R})$$

und daraus mit (92a):

$$\begin{aligned} \omega_1(x) &= \frac{1}{2} \left[ u_0(x) + \frac{1}{c} \int_0^x u_1(s) ds + k \right], \\ \omega_2(x) &= \frac{1}{2} \left[ u_0(x) - \frac{1}{c} \int_0^x u_1(s) ds - k \right], \end{aligned}$$

also schließlich aus (90):

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left[ u_0(x + ct) + u_0(x - ct) + \frac{1}{c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s) ds \right]. \quad (93)$$

Dies ist also die Lösung des Cauchy-Problems (85), (91), die sich nun auch als *eindeutig* herausgestellt hat.

Nun kehren wir schließlich zum Anfangsrandwertproblem (82), (83), (84) zurück, bei dem das Ortsintervall  $[0, l]$  ist (und nicht ganz  $\mathbb{R}$  wie beim Cauchy-Problem) und die Randbedingungen (83) zu Differentialgleichung und Anfangsbedingungen hinzukommen. Wir führen (hier) die Lösung zurück auf die bereits bekannte Lösung (93) des Cauchy-Problems:

Neben der zu erwartenden Voraussetzung  $u_0 \in C^2[0, l]$ ,  $u_1 \in C^1[0, l]$  verlangen wir nun ferner Verträglichkeitsbedingungen zwischen (82), (83), (84), die sich so ergeben:

Für jede Lösung  $u \in C^2([0, l] \times [0, \infty))$  von (82), (83), (84) folgt aus (83) durch Differenzieren nach  $t$ :

$$(a) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(l, t) = 0, \quad (b) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(l, t) = 0 \quad (t \geq 0), \quad (94)$$

und (94b) liefert zusammen mit der Differentialgleichung (82):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(l, t) = 0 \quad (t \geq 0). \quad (95)$$

Auswerten von (83), (94a), (95) in  $t = 0$  zeigt

$$\begin{aligned} u(0, 0) &= u(l, 0) = 0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, 0) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(l, 0) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, 0) &= \frac{\partial u}{\partial t}(l, 0) = 0. \end{aligned} \quad (96)$$

Andererseits folgt aus der Anfangsbedingung (84),  $u(x, 0) = u_0(x)$  ( $0 \leq x \leq l$ ), durch zweimaliges Differenzieren nach  $x$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, 0) = u_0''(x) \quad (0 \leq x \leq l). \quad (97)$$

Auswerten von (84) und (97) in  $x = 0$  und  $x = l$  liefert nun im Vergleich mit (96) die Verträglichkeitsbedingungen

$$u_0(0) = u_0(l) = 0, \quad u_0''(0) = u_0''(l) = 0, \quad u_1(0) = u_1(l) = 0 \quad (98)$$

an die Daten  $u_0, u_1$  des Problems, die wir nun fordern (als notwendige Bedingungen für die Existenz einer Lösung  $u \in C^2([0, l] \times [0, \infty))$ ). In der Tat sind sie (zusammen mit  $u_0 \in C^2[0, l]$ ,  $u_1 \in C^1[0, l]$ ) auch *hinreichend*:

Setzen wir  $u_0$  und  $u_1$  zunächst punktsymmetrisch auf  $[-l, l]$  fort:

$$u_i(-x) := -u_i(x) \quad (0 < x < l; \ i = 0, 1)$$

und anschließend  $2l$ -periodisch auf ganz  $\mathbb{R}$

$$u_i(x + 2kl) := u_i(x) \quad (-l < x \leq l; \ k \in \mathbb{Z}; \ i = 0, 1),$$

so erhalten wir wegen (98) (!) Funktionen  $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$ ,  $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$ , die außerdem ungerade bzgl. 0 und bzgl.  $l$  sind.

Mit diesen  $u_0, u_1$  setzen wir

$$u(x, t) := \frac{1}{2} \left[ u_0(x + ct) + u_0(x - ct) + \frac{1}{c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s) ds \right] \quad (x \in \mathbb{R}, \ t \geq 0)$$

und wissen aus (93), daß dieses  $u$  das Cauchy-Problem mit Anfangsdaten  $u_0, u_1$  löst. Also löst  $u$  (eingeschränkt auf  $[0, l] \times [0, \infty)$ ) die Differentialgleichung (82) und die Anfangsbedingungen (84). Wir zeigen nun, daß  $u$  auch die Randbedingungen (83) erfüllt; dann haben wir eine Lösung  $u \in C^2([0, l] \times [0, \infty))$  des Anfangsrandwertproblems (82), (83), (84) gewonnen.

In der Tat gilt für alle  $t \geq 0$ :

$$\begin{aligned} u(0, t) &= \frac{1}{2} \left[ \underbrace{u_0(ct) + u_0(-ct)}_{=0, \text{ da } u_0 \text{ ungerade bzgl. } 0} + \underbrace{\frac{1}{c} \int_{-ct}^{ct} u_1(s) ds}_{=0, \text{ da } u_1 \text{ ungerade bzgl. } 0} \right] = 0, \\ u(l, t) &= \frac{1}{2} \left[ \underbrace{u_0(l + ct) + u_0(l - ct)}_{=0, \text{ da } u_0 \text{ ungerade bzgl. } l} + \underbrace{\frac{1}{c} \int_{l-ct}^{l+ct} u_1(s) ds}_{=0, \text{ da } u_1 \text{ ungerade bzgl. } l} \right] = 0. \end{aligned}$$

## 8 Hilbert- und Banachräume

Die *Funktionalanalysis* ist ein entscheidendes Hilfsmittel bei der Untersuchung von Differential- (und Integral-) Gleichungen. Sie ist aber auch als eigenständiges Gebiet von großem Interesse. Hier sollen einige elementare Grundlagen der Funktionalanalysis gelegt werden, die wir später bei weiteren Untersuchungen von gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen zum Einsatz bringen wollen.

**Definition:** Es sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum, mit  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Ferner sei  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$  eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften:

N1) (Definitheit)  $\|u\| \geq 0$ , und  $\|u\| = 0 \iff u = 0$ , für alle  $u \in V$ .

N2) (Homogenität)  $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$  für alle  $u \in V$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

N3) (Dreiecksungleichung)  $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$  für alle  $u, v \in V$ .

Dann heißt  $(V, \|\cdot\|)$  **normierter Vektorraum** oder **normierter linearer Raum** oder **normierter Raum**. Die Abbildung  $\|\cdot\|$  heißt **Norm** auf  $V$ .

**Definition:** Es sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum, mit  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Ferner sei  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  eine Abbildung mit

SP1) (Definitheit)  $\langle u, u \rangle \geq 0$ , und  $\langle u, u \rangle = 0 \iff u = 0$ , für alle  $u \in V$ .

SP2) (Halblinearität)  $\langle \lambda u + \mu v, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle + \mu \langle v, w \rangle$  für alle  $u, v, w \in V$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ .

SP3) (Halbsymmetrie)  $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$  für alle  $u, v \in V$ .

Dann heißt  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  **unitärer Raum** oder **Innenproduktraum** oder **Prä-Hilbertraum**. Die Abbildung  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  heißt **inneres Produkt** oder **Skalarprodukt** oder **Innenprodukt** auf  $V$ .

**Lemma 8.1:** Es sei  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein unitärer Raum. Dann gilt:

a)  $\langle w, \lambda u + \mu v \rangle = \overline{\lambda} \langle w, u \rangle + \overline{\mu} \langle w, v \rangle$  für alle  $u, v, w \in V$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ .

b) Die Abbildung  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$\|u\| := \sqrt{\langle u, u \rangle} \quad (u \in V) \quad (99)$$

ist eine Norm auf  $V$ ; sie wird als die durch  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  erzeugte Norm bezeichnet. Durch (99) wird also jeder unitäre Raum zu einem normierten Raum.

c) Es gilt (mit  $\|\cdot\|$  aus (99)) die Cauchy - Schwarzsche Ungleichung

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\| \quad \text{für alle } u, v \in V;$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn  $u, v$  linear abhängig sind.

**Beweis:** Genauso wie im Fall  $V = \mathbb{R}^n$  oder  $V = \mathbb{C}^n$ ; siehe Anfänger - Vorlesungen.  $\square$

Durch Nachrechnen stellt man leicht fest: Ist  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein unitärer Raum und  $\|\cdot\|$  die durch  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  erzeugte Norm, so gilt die *Parallelogrammgleichung*

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2) \quad (u, v \in V), \quad (100)$$

und das innere Produkt läßt sich wie folgt durch die Norm ausdrücken:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \langle u, v \rangle &= \frac{1}{4} (\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2) \quad (u, v \in V), \text{ falls } \mathbb{K} = \mathbb{R}; \\ \text{(b)} \quad \langle u, v \rangle &= \frac{1}{4} (\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 + i\|u + iv\|^2 - i\|u - iv\|^2) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k \|u + i^k v\|^2 \quad (u, v \in V), \text{ falls } \mathbb{K} = \mathbb{C}. \end{aligned} \quad (101)$$

Es gilt auch die folgende Umkehrung, die wir hier nicht beweisen wollen:

**Satz 8.2:**

*Es sei  $(V, \|\cdot\|)$  ein normierter  $\mathbb{K}$ -Vektorraum, in dem die Parallelogrammgleichung (100) gilt. Dann ist durch (101) ein inneres Produkt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  auf  $V$  gegeben (und  $\|\cdot\|$  ist durch  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  erzeugte Norm), das heißt  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ist ein unitärer Raum.*

**Beispiele:**

1)  $V = \mathbb{K}^n$  wird mit

$$\|u\|_p := \left( \sum_{k=1}^n |u_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{K}^n)$$

mit festem  $p \in [1, \infty)$  zu einem normierten Raum  $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$ ; der Beweis folgt unten in ii). Auch mit

$$\|u\|_\infty := \max_{k \in \{1, \dots, n\}} |u_k| \quad (u \in \mathbb{K}^n)$$

wird  $\mathbb{K}^n$  zu einem normierten Vektorraum  $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ .

i) Es gilt ferner die *Höldersche Ungleichung*

$$\sum_{k=1}^n |u_k v_k| \leq \|u\|_p \|v\|_q \quad (u, v \in \mathbb{K}^n) \quad (102)$$

für alle  $p, q \in [1, \infty]$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Solche  $p, q$  werden *zueinander dual* genannt.

**Beweis:** Es seien  $p, q \in [1, \infty]$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Falls  $p = \infty$  (und damit  $q = 1$ ) oder  $q = \infty$  (und damit  $p = 1$ ), folgt (102) sehr leicht. Sind  $p, q \in (1, \infty)$ , so gilt die *Young'sche Ungleichung*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad (a, b \in [0, \infty)), \quad (103)$$

wie man etwa durch Minimieren von  $f(a) := \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} - ab$  über  $a \in [0, \infty)$  (bei festem  $b$ ) feststellt. Für jedes  $\lambda > 0$  und alle  $u, v \in \mathbb{K}^n$  gilt daher

$$\begin{aligned} |u_k v_k| &= (\lambda |u_k|) \cdot (\lambda^{-1} |v_k|) \\ &\stackrel{(103)}{\leq} \frac{\lambda^p}{p} |u_k|^p + \frac{\lambda^{-q}}{q} |v_k|^q \quad (k = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

und somit

$$\sum_{k=1}^n |u_k v_k| \leq \frac{\lambda^p}{p} \|u\|_p^p + \frac{\lambda^{-q}}{q} \|v\|_q^q,$$

woraus (102) durch Minimieren der rechten Seite über  $\lambda$  folgt.

Die Normeigenschaften N1) und N2) für  $\|\cdot\|_p$  (mit  $p \in [1, \infty]$ ) sind offensichtlich. Im Fall  $p = \infty$  folgt auch N3) sofort aus der Dreiecksungleichung für den Betrag. Im Fall  $p \in [1, \infty)$  gilt für  $u, v \in \mathbb{K}^n$ :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |u_k + v_k|^p &= \sum_{k=1}^n |u_k + v_k|^{p-1} |u_k + v_k| \\ &\leq \sum_{k=1}^n |u_k + v_k|^{p-1} |u_k| + \sum_{k=1}^n |u_k + v_k|^{p-1} |v_k| \\ &\stackrel{(102), q=\frac{p}{p-1}}{\leq} \left( \sum_{k=1}^n |u_k + v_k|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} \left( \sum_{k=1}^n |u_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad + \left( \sum_{k=1}^n |u_k + v_k|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} \left( \sum_{k=1}^n |v_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left( \sum_{k=1}^n |u_k + v_k|^p \right)^{1-\frac{1}{p}} \left( \|u\|_p + \|v\|_p \right), \end{aligned}$$

also folgt auch hier die Dreiecksungleichung N3), die für  $\|\cdot\|_p$  auch *Minkowskische* Ungleichung heißt.

2)  $\mathbb{K}^n$  wird mit

$$\langle u, v \rangle := \sum_{k=1}^n u_k \bar{v}_k \quad (u, v \in \mathbb{K}^n)$$

offenbar zu einem unitären Raum  $(\mathbb{K}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . Die durch  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  erzeugte Norm ist  $\|\cdot\|_2$  aus Beispiel 1). Alle anderen Normen  $\|\cdot\|_p$  ( $p \in [1, \infty] \setminus \{2\}$ ) aus 1) werden *nicht* durch ein inneres Produkt erzeugt, denn die Parallelogrammgleichung (100) ist etwa für  $u := (1, 0, \dots, 0)$ ,  $v := (0, 1, 0, \dots, 0)$  verletzt. (Der Trivialfall  $n = 1$  ist hier natürlich auszunehmen.)

3) Die Folgenräume  $l_p$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ).

Für  $p \in [1, \infty)$  sei

$$l_p := \left\{ (u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^p < \infty \right\}$$

und

$$\|u\|_p := \left( \sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (u \in l_p),$$

sowie

$$l_{\infty} := \left\{ (u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sup_{k \in \mathbb{N}} |u_k| < \infty \right\}$$

und

$$\|u\|_{\infty} := \sup_{k \in \mathbb{N}} |u_k| \quad (u \in l_{\infty}).$$

Wie in 1) i) zeigt man auch hier die *Höldersche Ungleichung*:

Es seien  $p, q \in [1, \infty]$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Sind  $u \in l_p$  und  $v \in l_q$ , so ist  $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k v_k|$  konvergent und

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k v_k| \leq \|u\|_p \|v\|_q.$$

Hieraus folgt wie in 1) ii) nun auch hier die Minkowskische Ungleichung und daraus, daß  $l_p$  ein Vektorraum ist (!) und daß  $\|\cdot\|_p$  eine Norm in  $l_p$  ist.

Im Falle  $p = 2$  ist offenbar ein inneres Produkt auf  $l_2$  gegeben durch

$$\langle u, v \rangle := \sum_{k=1}^{\infty} u_k \overline{v_k} \quad (u, v \in l_2),$$

das heißt  $l_2$  wird mit  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  zu einem unitären Raum. Alle anderen  $l_p$  ( $p \in [1, \infty] \setminus \{2\}$ ) sind *keine* unitären Räume, denn wie in 2) erkennt man, daß die Parallelogrammgleichung verletzt ist.

Schließlich gilt (Beweis als Übung)

$$l_{p_1} \subsetneq l_{p_2} \quad \text{für } 1 \leq p_1 < p_2 \leq \infty. \quad (104)$$

- 4) Es sei  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt, und  $C(\overline{\Omega})$  der  $\mathbb{K}$ -Vektorraum der stetigen Funktionen  $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{K}$ . Wir definieren für  $u \in C(\overline{\Omega})$ :

$$\begin{aligned} \|u\|_p &:= \left( \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} & 1 \leq p < \infty, \\ \|u\|_{\infty} &:= \max_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)|. \end{aligned}$$

Auch hier zeigt man (genauso wie in  $\mathbb{K}^n$ , aber mit Integration statt Summation) die *Höldersche Ungleichung*

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx \leq \|u\|_p \|v\|_q \quad (u, v \in C(\overline{\Omega})), \quad (105)$$

wobei  $p, q \in [1, \infty]$  wieder  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  erfüllen. Daraus folgt wiederum die Minkowskische Ungleichung und daher, daß  $(C(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_p)$  ein normierter Raum ist.

Im Fall  $p = 2$  ist ein inneres Produkt auf  $C(\overline{\Omega})$  gegeben durch

$$\langle u, v \rangle := \int_{\Omega} u(x) \overline{v(x)} dx \quad (u, v \in C(\overline{\Omega})),$$

welches die Norm  $\|\cdot\|_2$  erzeugt. Die anderen Normen  $\|\cdot\|_p$  ( $p \in [1, \infty] \setminus \{2\}$ ) werden nicht von inneren Produkten erzeugt.

5) Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen. Wir definieren die übliche Äquivalenzrelation

$$u \sim v \Leftrightarrow \exists M \subset \Omega \text{ mit Lebesgue-Maß } 0 \quad \forall x \in \Omega \setminus M : u(x) = v(x) \quad (106)$$

auf der Menge der Funktionen  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ . Im Folgenden sprechen wir von „Funktionen“  $\Omega \rightarrow \mathbb{K}$ , meinen aber immer *Äquivalenzklassen* von Funktionen bzgl. der Äquivalenzrelation (106); das heißt Funktionen, die sich nur auf Lebesgueschen Nullmengen unterscheiden, werden identifiziert.

Für  $p \in [1, \infty)$  definieren wir

$$L^p(\Omega) := \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{K} : u \text{ Lebesgue-meßbar, } \int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty \right\}$$

und

$$\|u\|_p := \left( \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (u \in L^p(\Omega))$$

sowie

$$L^\infty(\Omega) := \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{K} : u \text{ Lebesgue-meßbar, } \operatorname{ess\,sup}_{\Omega} |u| < \infty \right\}$$

und

$$\|u\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_{\Omega} |u|.$$

Dabei ist für eine meßbare Funktion  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$

$$\operatorname{ess\,sup}_{\Omega} v := \inf \{ C \in \mathbb{R} : v(x) \leq C \text{ für fast alle } x \in \Omega \}$$

das *wesentliche Supremum* von  $v$ .

Wieder zeigen wir wie früher die *Höldersche Ungleichung*:

Sind  $p, q \in [1, \infty]$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  und sind  $u \in L^p(\Omega)$ ,  $v \in L^q(\Omega)$ , so gilt  $uv \in L^1(\Omega)$  und

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx \leq \|u\|_p \|v\|_q.$$

Daraus folgt wieder die Minkowskische Ungleichung und daraus die Vektorraum-Eigenschaft von  $L^p(\Omega)$  und schließlich alle Normeigenschaften von  $\|\cdot\|_p$ . (Beachte zum Nachweis von N1: Ist  $p \in [1, \infty)$ , und  $u \in L^p(\Omega)$  mit  $\|u\|_p = 0$ , also  $\int_{\Omega} |u(x)|^p dx = 0$ , so folgt  $u(x) = 0$  für fast alle  $x \in \Omega$ , also  $u = 0$  im Sinne der oben vereinbarten Identifizierung.)

Also ist  $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$  ein normierter Raum. Wieder ist im Fall  $p = 2$  durch

$$\langle u, v \rangle := \int_{\Omega} u(x) \overline{v(x)} dx \quad (u, v \in L^2(\Omega))$$

ein inneres Produkt auf  $L^2(\Omega)$  gegeben, welches die Norm  $\|\cdot\|_2$  erzeugt; und alle anderen Normen  $\|\cdot\|_p$  werden nicht durch innere Produkte erzeugt (Beweis: Übung).

In jedem normierten Raum hat man einen kanonischen *Konvergenzbegriff* und kann auch leicht *Cauchy-Folgen* definieren:

**Definition:** Es sei  $(V, \|\cdot\|)$  ein normierter Raum und  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $V$ . Ferner sei  $u \in V$ .

a)  $(u_k)$  **konvergiert** gegen  $u$  (in Zeichen:  $u_k \rightarrow u$  oder  $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = u$ ), wenn  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u\| = 0$ , wenn also gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k_0 \in \mathbb{N} \quad \forall k \geq k_0 \quad \|u_k - u\| < \varepsilon.$$

b)  $(u_k)$  heißt **Cauchy-Folge**, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k_0 \in \mathbb{N} \quad \forall k, j \geq k_0 \quad \|u_k - u_j\| < \varepsilon.$$

Während im  $\mathbb{R}^n$  alle Cauchy-Folgen konvergent sind (siehe Anfänger-Vorlesung), gilt dies in generellen normierten Räumen i.a. *nicht* (siehe Beispiele unten). In den meisten funktionalanalytischen Sätzen treten im Beweis aber Situationen auf, in denen man auf die Konvergenz von Cauchy-Folgen angewiesen ist. Normierte Räume, in denen es nicht-konvergente Cauchy-Folgen gibt, sind daher praktisch fast immer unbrauchbar. Man benötigt *vollständige* normierte Räume, in denen alle Cauchy-Folgen konvergieren:

**Definition:** a) Ein normierter Raum, in dem alle Cauchy-Folgen konvergieren, heißt **vollständiger normierter Raum** oder **Banachraum**.

b) Ein unitärer Raum, der bzgl. der durch sein inneres Produkt erzeugten Norm ein Banachraum ist, heißt **Hilbertraum**.

**Satz 8.3:**

Für alle  $p \in [1, \infty]$  sind  $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$  und  $(l_p, \|\cdot\|_p)$  Banachräume. Insbesondere ist also  $l_2$  ein Hilbertraum.

**Beweis:** Wir zeigen die Vollständigkeit von  $(l_p, \|\cdot\|_p)$  für  $p \in [1, \infty)$ ; der Fall  $p = \infty$  verbleibt als Übung. Die Vollständigkeit von  $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$  ergibt sich als offensichtliche Vereinfachung des Beweises für  $l_p$ .

Sei also  $(u^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $l_p$ , das heißt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k_0 \in \mathbb{N} \quad \forall k, j \geq k_0 : \quad \left( \sum_{\nu=1}^{\infty} |u_{\nu}^{(j)} - u_{\nu}^{(k)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon. \quad (107)$$

Für jedes feste  $\mu \in \mathbb{N}$  gilt

$$|u_{\mu}^{(j)} - u_{\mu}^{(k)}| \leq \left( \sum_{\nu=1}^{\infty} |u_{\nu}^{(j)} - u_{\nu}^{(k)}|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

und wegen (107) ist daher  $(u_{\mu}^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  Cauchy-Folge in  $\mathbb{K}$ . Da  $(\mathbb{K}, |\cdot|)$  vollständig ist ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  : Anfängervorlesung,  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  : Korollar des Falles  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ), existiert also ein  $u_{\mu} \in \mathbb{K}$  mit

$$u_{\mu}^{(k)} \rightarrow u_{\mu} \quad \text{für } k \rightarrow \infty. \quad (108)$$

Die so konstruierte Folge  $u := (u_{\mu})_{\mu \in \mathbb{N}}$  ist nun ein *Kandidat* für den erhofften Grenzwert der Folge  $(u^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  in  $l_p$ . (108) ist aber noch lange nicht die erhoffte Eigenschaft  $\|u^{(k)} - u\|_p \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ )! Wir werden zeigen:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k_0 = k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall k \geq k_0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \left( \sum_{\nu=1}^N |u_{\nu}^{(k)} - u_{\nu}|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon. \quad (109)$$

Daraus folgt mit  $\varepsilon := 1$  und  $k := k_0(1)$  zunächst

$$\begin{aligned} \left( \sum_{\nu=1}^N |u_{\nu}|^p \right)^{\frac{1}{p}} &\stackrel{\text{Minkowski}}{\leq} \left( \sum_{\nu=1}^N |u_{\nu} - u_{\nu}^{(k)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{\nu=1}^N |u_{\nu}^{(k)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\stackrel{(109)}{\leq} 1 + \|u^{(k)}\|_p. \end{aligned}$$

Da  $N \in \mathbb{N}$  beliebig ist, folgt die Konvergenz von  $\sum_{\nu=1}^{\infty} |u_{\nu}|^p$  und daher  $u \in l_p$  (was bisher nicht klar war!).

Nun folgt aus (109) mittels Grenzübergang  $N \rightarrow \infty$  das gewünschte Ergebnis  $u^{(k)} \rightarrow u$  in  $l_p$ .

Zum Nachweis von (109) sei  $\varepsilon > 0$ . Wir wählen  $k_0 = k_0(\varepsilon)$  so, daß

$$\forall k, j \geq k_0 \quad \left( \sum_{\nu=1}^{\infty} |u_{\nu}^{(j)} - u_{\nu}^{(k)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (110)$$

was wegen (107) möglich ist. Nun seien  $k \geq k_0$  und  $N \in \mathbb{N}$ . Wegen (108) existiert ein  $j \in \mathbb{N}$ , o.B.d.A.  $j \geq k_0$ , mit

$$|u_{\nu}^{(j)} - u_{\nu}| \leq \frac{\varepsilon}{2N^{1/p}} \quad \text{für } \nu = 1, \dots, N$$

und somit

$$\left( \sum_{\nu=1}^N |u_{\nu}^{(j)} - u_{\nu}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

und mit (110) folgt

$$\left( \sum_{\nu=1}^N |u_{\nu}^{(k)} - u_{\nu}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum_{\nu=1}^N |u_{\nu}^{(k)} - u_{\nu}^{(j)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{\nu=1}^N |u_{\nu}^{(j)} - u_{\nu}|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

□

**Satz 8.4:**  $(C(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_p)$  ist

- a) *nicht* vollständig, falls  $p \in [1, \infty)$ ,
- b) vollständig (also ein Banachraum), falls  $p = \infty$ .

**Beweis: Zu a):** Hier nur ansatzweise für den Fall  $\Omega = (-1, 1)$ ; der Rest verbleibt als Übung.

Die Folge  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $C[-1, 1]$  definiert durch

$$u_k(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } -1 \leq x \leq 0, \\ kx & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{k}, \\ 1 & \text{für } \frac{1}{k} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

ist eine Cauchy-Folge bzgl.  $\|\cdot\|_p$ , aber nicht konvergent (bzgl.  $\|\cdot\|_p$ ) in  $C[-1, 1]$ .

**Zu b):** (Nebenbemerkung: Die in a) definierte Folge ist *keine* Cauchy-Folge bzgl.  $\|\cdot\|_{\infty}$ !)

Es sei  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $(C(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{\infty})$ , das heißt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k_0 \in \mathbb{N} \quad \forall k, j \geq k_0 \quad \max_{x \in \overline{\Omega}} |u_j(x) - u_k(x)| < \varepsilon. \quad (111)$$

Für jedes feste  $y \in \overline{\Omega}$  gilt

$$|u_j(y) - u_k(y)| \leq \max_{x \in \overline{\Omega}} |u_j(x) - u_k(x)|,$$

und wegen (111) ist daher  $(u_k(y))_{k \in \mathbb{N}}$  Cauchy-Folge in  $\mathbb{K}$ , besitzt also einen (natürlich  $y$ -abhängigen) Grenzwert  $u(y)$  in  $\mathbb{K}$ :

$$u_k(y) \rightarrow u(y) \quad \text{für } k \rightarrow \infty. \quad (112)$$

Die so konstruierte Funktion  $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{K}$  ist *Kandidat* für den erhofften Grenzwert der Folge  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $(C(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_\infty)$ . Wir zeigen:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k_0 \in \mathbb{N} \quad \forall k \geq k_0 \quad \forall x \in \overline{\Omega} : \\ |u_k(x) - u(x)| < \varepsilon. \end{aligned} \quad (113)$$

Dies bedeutet die gleichmäßige Konvergenz von  $(u_k)$  gegen  $u$ . Da alle  $u_k$  stetig sind, folgt die Stetigkeit von  $u$ , das heißt  $u \in C(\overline{\Omega})$  (Satz aus der Anfängervorlesung). Nun folgt aus (113) mittels Übergang zum Supremum über  $x$  das gewünschte Ergebnis  $u_k \rightarrow u$  in  $(C(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_\infty)$ .

Zum Nachweis von (113) sei  $\varepsilon > 0$ . Gemäß (111) können wir  $k_0 \in \mathbb{N}$  wählen mit

$$\forall k, j \geq k_0 \quad \max_{x \in \overline{\Omega}} |u_j(x) - u_k(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (114)$$

Nun seien  $k \geq k_0$  und  $x \in \overline{\Omega}$ . Wegen (112) existiert ein  $j \in \mathbb{N}$ , o.B.d.A.  $j \geq k_0$ , mit

$$|u_j(x) - u(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

und mit (114) folgt

$$|u_k(x) - u(x)| \leq |u_k(x) - u_j(x)| + |u_j(x) - u(x)| < \varepsilon.$$

□

### Satz 8.5:

$(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$  ist vollständig für alle  $p \in [1, \infty]$ .

**Beweis:** Für  $p = \infty$  ist der Beweis ähnlich zum Beweis der Vollständigkeit von  $(C(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_\infty)$  (Satz 8.4 b)). Es kommen lediglich kleine Zusatzüberlegungen hinzu, die die auftretenden Ausnahmemengen (vom Lebesgue-Maß 0) handhaben. Übung!

Nun sei  $p \in [1, \infty)$ , und es sei  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $L^p(\Omega)$ . Also existiert zu jedem  $\nu \in \mathbb{N}$  ein  $k_0 = k_0(\nu)$  (o.B.d.A.  $k_0(\nu)$  streng monoton wachsend in  $\nu$ ) mit

$$\forall k, j \geq k_0 : \quad \left( \int_{\Omega} |u_j - u_k|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{2^\nu}. \quad (115)$$

Wir definieren  $v_\nu := u_{k_0(\nu)}$  und zeigen zunächst für die Teilfolge  $(v_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$  von  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  die Existenz eines Grenzwerts: Wir setzen

$$w_1 := v_1, \quad w_\nu := v_\nu - v_{\nu-1} \quad (\text{für } \nu \geq 2). \quad (116)$$

Aus (115) (mit  $\nu - 1$  statt  $\nu$ ) folgt für  $j := k_0(\nu)$ ,  $k := k_0(\nu - 1)$ , daß  $\|v_\nu - v_{\nu-1}\|_p \leq \frac{1}{2^{\nu-1}}$  (für  $\nu \geq 2$ ) gilt, und daher

$$\begin{aligned} \forall \mu \in \mathbb{N}, \mu \geq 2 \quad \sum_{\nu=1}^{\mu} \|w_\nu\|_p &\stackrel{(116)}{=} \|v_1\|_p + \sum_{\nu=2}^{\mu} \|v_\nu - v_{\nu-1}\|_p \\ &\leq \|v_1\|_p + \sum_{\nu=2}^{\mu} \frac{1}{2^{\nu-1}} \leq \|v_1\|_p + 1. \end{aligned}$$

Also ist

$$S := \sum_{\nu=1}^{\infty} \|w_\nu\|_p < \infty. \quad (117)$$

Für

$$f_\mu(x) := \sum_{\nu=1}^{\mu} |w_\nu(x)| \quad (x \in \Omega, \mu \in \mathbb{N}) \quad (118)$$

gilt somit

$$\begin{aligned} \forall \mu \in \mathbb{N} \quad \left( \int_{\Omega} |f_\mu|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} &\stackrel{\text{Minkowski}}{\leq} \sum_{\nu=1}^{\mu} \left( \int_{\Omega} |w_\nu|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sum_{\nu=1}^{\mu} \|w_\nu\|_p \leq S, \end{aligned}$$

also  $f_\mu \in L^p(\Omega)$  und

$$\int_{\Omega} |f_\mu|^p dx \leq S^p \quad (\mu \in \mathbb{N}). \quad (119)$$

Nach (118) ist  $(f_\mu)_{\mu \in \mathbb{N}}$  eine monoton wachsende Folge nichtnegativer meßbarer Funktionen, und für die punktweise (fast überall) Grenzfunktion

$$f(x) := \lim_{\mu \rightarrow \infty} f_\mu(x) \quad (x \in \Omega) \quad (120)$$

gilt (da auch  $f_\mu^p \geq 0$ ,  $(f_\mu^p)_{\mu \in \mathbb{N}}$  wachsend,  $\lim_{\mu \rightarrow \infty} f_\mu^p = f^p$ ) nach dem Satz von B. Levi (monotone Konvergenz):

$$\int_{\Omega} f^p dx \stackrel{!}{=} \lim_{\mu \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_\mu^p dx \stackrel{(119)}{\leq} S^p,$$

also

$$f \in L^p(\Omega). \quad (121)$$

Wäre  $f(x) = \infty$  auf einer Menge von positivem Maß, so wäre auch  $\int_{\Omega} f^p dx = \infty$ , im Widerspruch zu (121). Also gilt

$$f(x) < \infty \quad (x \in \Omega \setminus N, \ N \text{ Nullmenge})$$

Nach (118), (120) gilt daher

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |w_{\nu}(x)| < \infty \quad (x \in \Omega \setminus N).$$

Also ist

$$u(x) := \sum_{\nu=1}^{\infty} w_{\nu}(x) \quad (122)$$

(absolut) konvergent für  $x \in \Omega \setminus N$ . Ferner gilt

$$|u(x)| \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} |w_{\nu}(x)| \stackrel{(118)}{=} \lim_{\mu \rightarrow \infty} f_{\mu}(x) \stackrel{(120)}{=} f(x) \quad \text{für } x \in \Omega \setminus N \quad (123)$$

und daher wegen (121)

$$u \in L^p(\Omega). \quad (124)$$

Ferner gilt nach (116)

$$\sum_{\nu=1}^{\mu} w_{\nu}(x) = v_1(x) + \sum_{\nu=2}^{\mu} [v_{\nu}(x) - v_{\nu-1}(x)] = v_{\mu}(x) \quad (x \in \Omega)$$

und daher nach (122):

$$v_{\mu}(x) \xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} u(x) \quad (\text{punktweise}) \text{ für } x \in \Omega \setminus N,$$

also auch

$$|v_{\mu}(x) - u(x)|^p \xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} 0 \quad \text{für } x \in \Omega \setminus N. \quad (125)$$

Schließlich ist

$$\begin{aligned} |v_{\mu}(x) - u(x)| &\leq |v_{\mu}(x)| + |u(x)| \stackrel{(116)}{=} \left| \sum_{\nu=1}^{\mu} w_{\nu}(x) \right| + |u(x)| \\ &\leq \sum_{\nu=1}^{\mu} |w_{\nu}(x)| + |u(x)| \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} |w_{\nu}(x)| + |u(x)| \\ &\stackrel{(118), (120)}{=} f(x) + |u(x)| \stackrel{(123)}{\leq} 2f(x) \quad \text{für } x \in \Omega \setminus N, \end{aligned}$$

also

$$|v_{\mu}(x) - u(x)|^p \leq 2^p f(x)^p \quad \text{für } x \in \Omega \setminus N. \quad (126)$$

Da  $2^p f(x)^p$  integrierbar ist nach (121), folgt mit (125), (126) nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz:

$$\int_{\Omega} |v_{\mu} - u|^p dx \rightarrow 0 \quad \text{für } \mu \rightarrow \infty,$$

also (mit (124)):

$$v_{\mu} \rightarrow u \quad \text{in } L^p(\Omega). \quad (127)$$

Es bleibt zu zeigen, daß die gesamte Folge  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  gegen  $u$  konvergiert (in  $L^p(\Omega)$ ). Dazu sei  $\varepsilon > 0$ . Wir wählen ein  $\nu \in \mathbb{N}$  mit  $1/2^{\nu} < \varepsilon/2$  und  $\|v_{\nu} - u\|_p < \varepsilon/2$  (vgl. (127)), sowie  $k_0 = k_0(\nu)$  gemäß (115). Dann gilt für alle  $k \geq k_0$  (beachte  $v_{\nu} = u_{k_0}$ ):

$$\|u_k - u\|_p \leq \|u_k - u_{k_0}\|_p + \|u_{k_0} - u\|_p \stackrel{(115)}{<} \frac{1}{2^{\nu}} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

□

Ohne Beweis ergänzen wir noch den folgenden

**Satz 8.6** (Dichtesatz): *Es sei  $p \in [1, \infty)$  und*

$$C_0^{\infty}(\Omega) := \{\varphi \in C^{\infty}(\Omega) : \exists K \subset \Omega \text{ kompakt } \forall x \in \Omega \setminus K : \varphi(x) = 0\} \quad (128)$$

*Dann gilt:  $C_0^{\infty}(\Omega)$  ist **dicht** in  $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ , d.h.*

$$\overline{C_0^{\infty}(\Omega)}^{\|\cdot\|_p} = L^p(\Omega), \quad (129)$$

*das heißt zu jedem  $u \in L^p(\Omega)$  existiert eine Folge  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $C_0^{\infty}(\Omega)$  mit*

$$\|u - \varphi_k\|_p \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0.$$

**Bemerkung:** Für  $p = \infty$  ist (129) falsch; nicht einmal  $C(\overline{\Omega})$  ist dicht in  $(L^{\infty}(\Omega), \|\cdot\|_{\infty})$

**Beweis:** Wir wählen ein unstetiges  $u \in L^{\infty}(\Omega)$  (z.B. eine nichttriviale Treppenfunktion) und nehmen an, daß eine Folge  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $C(\overline{\Omega})$  mit

$$\|u - u_k\|_{\infty} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$$

existiert. Dann ist  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  Cauchyfolge in  $(C(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{\infty})$  und konvergiert nach Satz 8.4 b) gegen ein  $v \in C(\overline{\Omega})$ , das heißt  $\|u_k - v\|_{\infty} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ . Es folgt  $u = v \in C(\overline{\Omega})$ . Widerspruch. □

## 9 Lineare Operatoren und Funktionale

Viele Gleichungen in der Analysis, insbesondere Differential- und Integralgleichungen, werden durch „Operatoren“ beschrieben, die zwischen Banachräumen abbilden.

**Definition:** Es seien  $V, W$   $\mathbb{K}$ -Vektorräume.

- a) Ein **Operator** ist eine Abbildung  $T$ , die eine Teilmenge  $D(T) \subset V$  (seinen **Definitionsbereich**) in  $W$  abbildet. ( $T$  ist durch Zuordnungsvorschrift **und** Definitionsbereich festgelegt!)
- b) Ist  $D(T) \subset V$  ein **Untervektorraum** (Unterraum) und ist  $T : D(T) \rightarrow W$  linear, d.h. gilt

$$T(\lambda u + \mu v) = \lambda T(u) + \mu T(v) \quad \forall u, v \in D(T) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},$$

so heißt  $T$  **linearer Operator**, im Falle  $W = \mathbb{K}$  auch **lineares Funktional**.

**Definition:** Es seien  $(V, \|\cdot\|_V)$  und  $(W, \|\cdot\|_W)$  normierte Räume,  $D(T) \subset V$  und  $T : D(T) \rightarrow W$  ein Operator. Ferner sei  $u_0 \in D(T)$ .

- a)  $T$  heißt **stetig in**  $u_0 : \iff$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall u \in D(T) \quad [\|u - u_0\|_V < \delta \Rightarrow \|T(u) - T(u_0)\|_W < \varepsilon]$$

$$\iff \text{Für jede Folge } (u_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ in } D(T) \text{ mit } \|u_k - u_0\|_V \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \text{ gilt}$$

$$\|T(u_k) - T(u_0)\|_W \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

$$T \text{ heißt stetig :} \iff \forall u_0 \in D(T) : \quad T \text{ stetig in } u_0.$$

- b)  $T$  sei zusätzlich linear.  $T$  heißt **beschränkt** :  $\iff \sup_{u \in D(T) \setminus \{0\}} \frac{\|T(u)\|_W}{\|u\|_V} < \infty$

$$\iff \exists C \geq 0 \quad \forall u \in D(T) : \quad \|T(u)\|_W \leq C \|u\|_V$$

In diesem Fall heißt

$$\begin{aligned} \|T\| &:= \sup \left\{ \frac{\|T(u)\|_W}{\|u\|_V} : u \in D(T) \setminus \{0\} \right\} \\ &= \inf \{ C \in \mathbb{R} : \forall u \in D(T) : \|T(u)\|_W \leq C \|u\|_V \} \\ &= \sup \{ \|T(u)\|_W : u \in D(T), \|u\|_V = 1 \} \end{aligned}$$

die **Operatornorm** (oder einfach **Norm**) von  $T$ .

**Lemma 9.1:**

Es seien  $(V, \|\cdot\|_V)$  und  $(W, \|\cdot\|_W)$  normierte Räume und  $T : D(T) \subset V \rightarrow W$  ein linearer Operator. Dann sind folgende Aussagen a), b), c) paarweise äquivalent:

- a)  $T$  ist beschränkt.

b)  $T$  ist stetig.

c)  $T$  ist stetig in  $0 \in V$ .

**Beweis: a)  $\Rightarrow$  b):** Sei  $u_0 \in D(T)$  und  $\varepsilon > 0$ . Wir wählen  $\delta > 0$  mit  $\|T\| \delta < \varepsilon$ . Dann gilt für alle  $u \in D(T)$  mit  $\|u - u_0\|_V < \delta$ :

$$\|T(u) - T(u_0)\|_W \stackrel{T \text{ linear}}{=} \|T(u - u_0)\|_W \leq \|T\| \|u - u_0\|_V < \|T\| \delta < \varepsilon.$$

**b)  $\Rightarrow$  c)** ist trivial.

**c)  $\Rightarrow$  a):** Nach c) existiert ein  $\delta > 0$  mit:

$$\forall u \in D(T) : \left[ \underbrace{\|u\|_V}_{=\|u-0\|_V} \leq \delta \implies \underbrace{\|T(u)\|_W}_{=\|T(u)-T(0)\|_W} \leq 1 \right]. \quad (130)$$

Nun sei  $u \in D(T) \setminus \{0\}$ , und  $v := \frac{\delta}{\|u\|_V} u$ . Dann gilt  $\|v\|_V = \frac{\delta}{\|u\|_V} \|u\|_V = \delta$  und daher  $\|T(v)\|_W \leq 1$  nach (130). Wegen  $T(v) = \frac{\delta}{\|u\|_V} T(u)$  folgt also  $\frac{\delta}{\|u\|_V} \|T(u)\|_W \leq 1$ , d.h.

$$\|T(u)\|_W \leq \frac{1}{\delta} \|u\|_V.$$

□

### Satz 9.2:

Es seien  $(V, \|\cdot\|_V)$  und  $(W, \|\cdot\|_W)$  normierte Räume und

$$B(V, W) := \{T : V \rightarrow W : T \text{ linear und beschränkt}\}.$$

(Es ist also  $D(T) = V$  für alle  $T \in B(V, W)$ .) Ferner sei  $\|\cdot\|$  die Operatornorm. Dann gilt:

- a)  $(B(V, W), \|\cdot\|)$  ist ein normierter Raum. (Dabei wird die kanonische Vektorraumstruktur von  $B(V, W)$  zugrundegelegt.)
- b) Ist  $(W, \|\cdot\|_W)$  ein Banachraum, so ist auch  $(B(V, W), \|\cdot\|)$  ein Banachraum.

**Beweis:** Übung.

### Korollar 9.3:

Es sei  $(V, \|\cdot\|_V)$  ein normierter Raum. Dann ist der **Dualraum**  $V'$  von  $V$ , definiert durch

$$V' := B(V, \mathbb{K}) = \{l : V \rightarrow \mathbb{K} : l \text{ linear und beschränkt}\},$$

versehen mit der Operatornorm

$$\|l\| := \sup \left\{ \frac{|lu|}{\|u\|_V} : u \in V \setminus \{0\} \right\},$$

ein Banachraum.

**Beweis:** Die Behauptung gilt nach Satz 9.2, denn  $(\mathbb{K}, |\cdot|)$  ist vollständig. □

## 9.1 Beispiele

- 1) Multiplikationsoperator: Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $a \in L^\infty(\Omega)$ , ferner  $p \in [1, \infty]$ . Der Operator  $M : L^p(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$ ,

$$(Mu)(x) := a(x)u(x) \quad (x \in \Omega, u \in L^p(\Omega))$$

ist linear und beschränkt, und  $\|M\| = \|a\|_\infty$ .

**Beweis** (hier nur für  $p \in [1, \infty)$ ):

Für alle  $u \in L^p(\Omega)$  gilt

$$\|Mu\|_p = \left( \int_{\Omega} |au|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|a\|_\infty \|u\|_p.$$

Also ist  $M$  beschränkt, und  $\|M\| \leq \|a\|_\infty$ . Zum Nachweis von  $\|M\| \geq \|a\|_\infty$  sei  $\varepsilon > 0$ . Dann existiert eine meßbare Menge  $A \subset \Omega$  von positivem (und endlichem) Maß mit

$$|a(x)| \geq \|a\|_\infty - \varepsilon \quad \text{für } x \in A.$$

Ist nun  $u$  die charakteristische Funktion von  $A$ , so gilt  $u \in L^p(\Omega) \setminus \{0\}$  und

$$\|Mu\|_p = \left( \int_A |a(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \geq (\|a\|_\infty - \varepsilon) \|u\|_p,$$

und daher  $\|M\| \geq \|a\|_\infty - \varepsilon$ . Da  $\varepsilon > 0$  beliebig ist, folgt  $\|M\| \geq \|a\|_\infty$ .  $\square$

- 2) Integraloperator: Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt und  $k \in C(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$ . Der Operator

$$K : C(\overline{\Omega}) \rightarrow C(\overline{\Omega}), \quad (Ku)(x) := \int_{\Omega} k(x, y)u(y)dy \quad (x \in \overline{\Omega}, u \in C(\overline{\Omega}))$$

ist linear und bzgl.  $\|\cdot\|_\infty$  beschränkt, und

$$\|K\| \leq \max_{x \in \overline{\Omega}} \int_{\Omega} |k(x, y)| dy.$$

**Beweis:** Übung.

- 3) Integraloperator: Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $k \in L^2(\Omega \times \Omega)$ . Der Operator  $K : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ ,

$$(Ku)(x) := \int_{\Omega} k(x, y)u(y)dy \quad (x \in \Omega, u \in L^2(\Omega))$$

ist linear und bzgl.  $\|\cdot\|_2$  beschränkt, und

$$\|K\| \leq \|k\|_2 = \sqrt{\int_{\Omega} \int_{\Omega} |k(x, y)|^2 dx dy}.$$

**Beweis:** Für alle  $u \in L^2(\Omega)$  gilt:

$$\begin{aligned} \|Ku\|_2^2 &= \int_{\Omega} |Ku|^2 dx = \int_{\Omega} \left| \int_{\Omega} k(x, y) u(y) dy \right|^2 dx \\ &\stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \int_{\Omega} \left[ \int_{\Omega} |k(x, y)|^2 dy \right] \cdot \left[ \int_{\Omega} |u(y)|^2 dy \right] dx \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \left[ \int_{\Omega} \int_{\Omega} |k(x, y)|^2 dx dy \right] \cdot \|u\|_2^2. \end{aligned}$$

□

- 4) Differentialoperator: Es sei  $V = W = C[0, 1]$  mit  $\|\cdot\|_V = \|\cdot\|_W = \|\cdot\|_{\infty}$  und  $D(A) := \{u \in C^2[0, 1] : u(0) = u(1) = 0\}$ ,

$$A : D(A) \rightarrow C[0, 1], \quad Au := -u'' \quad (u \in D(A)).$$

$A$  ist linear, aber *nicht* beschränkt, denn etwa für

$$u_k(x) := \sin(k\pi x) \quad (x \in [0, 1], k \in \mathbb{N})$$

gilt  $u_k \in D(A) \setminus \{0\}$  und

$$\frac{\|Au_k\|_{\infty}}{\|u_k\|_{\infty}} = \frac{\|k^2 \pi^2 u_k\|_{\infty}}{\|u_k\|_{\infty}} = k^2 \pi^2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty,$$

also

$$\sup \left\{ \frac{\|Au\|_{\infty}}{\|u\|_{\infty}} : u \in D(A) \setminus \{0\} \right\} = \infty.$$

**Bemerkung:** Ersetzt man hier  $(C[0, 1], \|\cdot\|_{\infty})$  durch  $(L^p(0, 1), \|\cdot\|_p)$  (und belässt  $D(A)$  und die Zuordnungsvorschrift  $Au = -u''$  wie zuvor), so ändert sich nichts an der Unbeschränktheit von  $A$ .

- 5) Differentialoperator: Es sei  $V = W = C[a, b]$  mit  $\|\cdot\|_V = \|\cdot\|_W = \|\cdot\|_{\infty}$  und  $D(A) := \{u \in C^n[a, b] : R_1[u] = \dots = R_n[u] = 0\}$ . Dabei sind  $R_1, \dots, R_n$  Randoperatoren wie früher in (52) eingeführt. Ferner sei  $L$  ein formaler Differentialoperator der Form (50), und

$$A : D(A) \rightarrow C[a, b], \quad Au := L[u] \quad (u \in D(A)).$$

Wieder findet man:  $A$  ist nicht beschränkt, und wieder ändert sich daran nichts, wenn man  $(C[a, b], \|\cdot\|_{\infty})$  durch  $(L^p(a, b), \|\cdot\|_p)$  ersetzt.

**Bemerkung:** Für gegebenes  $r \in C[a, b]$  ist die Randwertaufgabe

$$L[u] = r \quad (a \leq x \leq b), \quad R_1[u] = \dots = R_n[u] = 0$$

äquivalent zu der Gleichung

$$Au = r$$

(mit gesuchtem  $u \in D(A)$ ).

## 10 Orthogonalprojektionen, Orthonormalsysteme und -basen

Aus der Linearen Algebra sind wir gewohnt, daß viele Fragen durch die Benutzung von *Basen* (leichter) beantwortet werden können. Etwas Vergleichbares suchen wir nun auch in unendlich-dimensionalen Räumen. Aus dem Zornschen Lemma folgt, daß in *allen* Vektorräumen sog. *Hamel-Basen* existieren; diese sind linear unabhängig, und jedes Element des Vektorraumes ist aus *endlich* vielen Basiselementen linear kombinierbar. Praktisch sind solche Hamel-Basen aber in unendlich-dimensionalen Vektorräumen in der Regel unbrauchbar, da sie nicht konstruktiv angebbare sind; lediglich ihre Existenz ist bekannt.

In *Hilberträumen* (mit einer Zusatzeigenschaft) gibt es aber andere Basen, die meist konkret angegeben werden können und von „einfacher“ Bauart sind. Hilbertraumelemente sind dabei allerdings i.A. nicht aus endlich vielen Basiselementen linear kombinierbar, sondern aus abzählbar vielen in Form einer *Reihe*, die bezüglich der Norm des Hilbertraumes konvergiert.

Im Folgenden sei  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein unitärer Raum und  $\|\cdot\|$  die durch  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  erzeugte Norm.

**Lemma 10.1:**

- a)  $\|\cdot\| : H \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig. (Hierzu wird die unitäre Struktur nicht benötigt.)
- b) Sind  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  und  $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$  konvergente Folgen in  $H$  mit Grenzwerten  $u$  bzw.  $v$ , so gilt

$$\langle u_k, v_k \rangle \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \langle u, v \rangle.$$

**Beweis:** Zu a): Für  $u, v \in H$  gilt

$$\|u\| = \|(u - v) + v\| \leq \|u - v\| + \|v\| \quad \text{sowie} \quad \|v\| \leq \|u - v\| + \|u\|$$

also die „zweite Dreiecksungleichung“

$$\left| \|u\| - \|v\| \right| \leq \|u - v\|. \quad (131)$$

Hieraus folgt die behauptete Stetigkeit leicht.

**Zu b):** Nach a) ist  $(\|v_k\|)_{k \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Folge in  $\mathbb{R}$  (mit Grenzwert  $\|v\|$ ) und daher beschränkt:

$$\|v_k\| \leq C \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} |\langle u_k, v_k \rangle - \langle u, v \rangle| &= |\langle u_k - u, v_k \rangle + \langle u, v_k - v \rangle| \\ &\leq \|u_k - u\| \underbrace{\|v_k\|}_{\leq C} + \|u\| \|v_k - v\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

□

Wir wiederholen:

- i) Eine Menge  $A \subset H$  ist *abgeschlossen*, wenn jeder Häufungspunkt von  $A$  in  $A$  liegt, wenn also gilt:  
Ist  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $A$ , die konvergent ist, so liegt auch ihr Grenzwert in  $A$ .
- ii) Für jede Menge  $M \subset H$  heißt

$$\overline{M} := \{u \in H : \exists \text{ Folge } (u_k) \text{ in } M \text{ mit } u_k \rightarrow u\}$$

der *Abschluß* von  $M$ .  $\overline{M}$  ist abgeschlossen.

**Definition:** Es sei  $U \subset H$  ein Unterraum. Dann heißt

$$U^\perp := \{v \in H : \langle v, u \rangle = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$

(sprich: „ $U$  senkrecht“) das **Orthogonalkomplement** von  $U$ .

**Lemma 10.2:**

Es sei  $U \subset H$  ein Unterraum. Dann ist  $U^\perp$  ein abgeschlossener Unterraum von  $H$ . Es gilt  $U \cap U^\perp = \{0\}$ .

**Beweis:** Für  $v_1, v_2 \in U^\perp$  und  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$  gilt

$$\langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, u \rangle = \lambda_1 \langle v_1, u \rangle + \lambda_2 \langle v_2, u \rangle = 0 \quad \text{für alle } u \in U,$$

also  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in U^\perp$ . Zum Nachweis der Abgeschlossenheit sei  $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $U^\perp$ , die gegen ein  $v \in H$  konvergiert. Nach Lemma 10.1 b) gilt  $\langle v_k, u \rangle \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \langle v, u \rangle$  für alle  $u \in U$ . Wegen  $\langle v_k, u \rangle = 0$  ( $u \in U$ ) folgt somit  $\langle v, u \rangle = 0$  ( $u \in U$ ), also  $v \in U^\perp$ . Schließlich sei  $v \in U \cap U^\perp$ . Wegen  $v \in U^\perp$  gilt  $\langle v, u \rangle = 0$  für alle  $u \in U$ , insbesondere also für  $u = v$ . Also ist  $\langle v, v \rangle = 0$  und damit  $v = 0$ . □

**Satz 10.3** (Approximationssatz im Hilbertraum):

$(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  sei ein Hilbertraum und  $U \subset H$  ein abgeschlossener (!) Unterraum. Ferner sei  $v_0 \in H$ . Dann existiert eine eindeutig bestimmte **beste Approximation**  $u^* \in U$  für  $v_0$  in  $U$ , d.h. es gilt

$$\|u^* - v_0\| = \inf_{u \in U} \|u - v_0\|.$$

Ferner gilt für  $u^*$  (und für kein anderes  $u \in U$ ) die Orthogonalitätsrelation

$$v_0 - u^* \in U^\perp.$$

**Beweis:** Es sei  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $U$  mit

$$\|u_k - v_0\| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \inf_{u \in U} \|u - v_0\| =: d. \quad (132)$$

Für  $k, l \in \mathbb{N}$  gilt:

$$\begin{aligned} \|u_k - u_l\|^2 &= \|(u_k - v_0) - (u_l - v_0)\|^2 \\ &\stackrel{(100)}{=} 2\|u_k - v_0\|^2 + 2\|u_l - v_0\|^2 - \underbrace{\|(u_k - v_0) + (u_l - v_0)\|^2}_{=4\|\frac{1}{2}(u_k+u_l)-v_0\|^2 \geq 4d^2} \\ &\leq 2\underbrace{\|u_k - v_0\|^2}_{\xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} d^2} + 2\underbrace{\|u_l - v_0\|^2}_{\xrightarrow[l \rightarrow \infty]{} d^2} - 4d^2 < \varepsilon \quad \text{für } k, l \geq k_0(\varepsilon). \end{aligned}$$

Also ist  $(u_k)$  eine Cauchy-Folge und daher wegen der Vollständigkeit von  $H$  konvergent gegen ein  $u^* \in H$ . Da  $U$  abgeschlossen ist, folgt  $u^* \in U$ .

Nach Lemma 10.1 a) gilt weiter  $\|u_k - v_0\| \rightarrow \|u^* - v_0\|$  und daher wegen (132):  $\|u^* - v_0\| = d$ , d.h.  $u^*$  ist beste Approximation.

Ist  $\tilde{u}^*$  eine weitere beste Approximation, so gilt

$$\begin{aligned} \|u^* - \tilde{u}^*\|^2 &= \|(u^* - v_0) - (\tilde{u}^* - v_0)\|^2 \\ &\stackrel{(100)}{=} 2\underbrace{\|u^* - v_0\|^2}_{=d^2} + 2\underbrace{\|\tilde{u}^* - v_0\|^2}_{=d^2} - \underbrace{\|(u^* - v_0) + (\tilde{u}^* - v_0)\|^2}_{=4\|\frac{1}{2}(u^*+\tilde{u}^*)-v_0\|^2 \geq 4d^2} \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

und daher  $u^* = \tilde{u}^*$ .

Zum Nachweis der Orthogonalitätsrelation sei  $u \in U$ ; zu zeigen ist  $\langle v_0 - u^*, u \rangle = 0$ . Es sei  $\varphi \in (-\pi, \pi]$  das komplexe Argument von  $\langle v_0 - u^*, u \rangle$ , also gilt

$$\langle v_0 - u^*, u \rangle = |\langle v_0 - u^*, u \rangle| \cdot e^{i\varphi}. \quad (133)$$

(Dies paßt auch im Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ; dann ist  $\varphi = 0$  oder  $\varphi = \pi$ .)

Für alle  $\lambda > 0$  gilt:

$$\begin{aligned} \|v_0 - u^*\|^2 &\leq \|v_0 - (u^* + \lambda e^{i\varphi} u)\|^2 \quad (\text{da } u^* \text{ beste Approximation}) \\ &= \|(v_0 - u^*) - \lambda e^{i\varphi} u\|^2 \\ &= \|v_0 - u^*\|^2 - \lambda e^{-i\varphi} \langle v_0 - u^*, u \rangle - \lambda e^{i\varphi} \langle u, v_0 - u^* \rangle + \lambda^2 \|u\|^2 \\ &\stackrel{(133)}{=} \|v_0 - u^*\|^2 - 2\lambda |\langle v_0 - u^*, u \rangle| + \lambda^2 \|u\|^2 \end{aligned}$$

und daher

$$|\langle v_0 - u^*, u \rangle| \leq \frac{\lambda}{2} \|u\|^2,$$

woraus  $\langle v_0 - u^*, u \rangle = 0$  mittels Grenzübergang  $\lambda \rightarrow 0_+$  folgt.

Schließlich sei  $\tilde{u}^* \in U$  ein weiteres Element mit  $v_0 - \tilde{u}^* \in U^\perp$ . Dann gilt (da  $U^\perp$  Unterraum)

$$u^* - \tilde{u}^* = (v_0 - \tilde{u}^*) - (v_0 - u^*) \in U^\perp,$$

aber außerdem  $u^* - \tilde{u}^* \in U$ , und daher  $u^* - \tilde{u}^* = 0$  nach Lemma 10.2.  $\square$

**Bemerkung:** Im Beweis wurde zunächst die Vollständigkeit von  $H$  benutzt, um die Konvergenz der Folge  $(u_k)$  zu bekommen, und dann die Abgeschlossenheit von  $U$ , um zu erhalten, daß der Grenzwert  $u^*$  in  $U$  liegt. Wenn wir statt der Vollständigkeit von  $H$  und der Abgeschlossenheit von  $U$  voraussetzen:

$$(U, \langle \cdot, \cdot \rangle|_{U \times U}) \quad \text{sei ein Hilbertraum,} \quad (134)$$

so folgt die Konvergenz von  $(u_k)$  gegen ein  $u^* \in U$  auch ohne die Vollständigkeit des gesamten Raumes  $H$ . Insbesondere gilt (134), falls  $U$  *endlich-dimensional* ist (Übung), was bei vielen praktischen Anwendungen von Satz 10.3 der Fall ist.

**Satz 10.4:**

*$(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  sei ein Hilbertraum und  $U \subset H$  ein abgeschlossener Unterraum. Wir betrachten den Operator  $P_U : H \rightarrow U$ , der jedem  $v \in H$  seine beste Approximation  $u^* =: P_U v \in U$  zuordnet. Dann gilt:*

- a)  $P_U$  ist linear;
- b)  $P_U$  ist eine Projektion, d.h.  $P_U \circ P_U = P_U$ ;
- c)  $v - P_U v \in U^\perp$  für alle  $v \in H$ ;
- d)  $P_U$  ist  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -symmetrisch, d.h.  $\langle P_U v, w \rangle = \langle v, P_U w \rangle$  für alle  $v, w \in H$ .

$P_U$  heißt **Orthogonal-Projektion** auf  $U$ .

**Beweis: Zu a).** Sind  $v_1, v_2 \in H$  und  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ , so gilt für alle  $u \in U$ :

$$\begin{aligned} & \langle P_U(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) - [\lambda_1 P_U v_1 + \lambda_2 P_U v_2], u \rangle \\ &= \langle P_U(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) - (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2), u \rangle + \lambda_1 \langle v_1 - P_U v_1, u \rangle + \\ & \quad \lambda_2 \langle v_2 - P_U v_2, u \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

(mittels dreimaliger Anwendung der Orthogonalitätsrelation aus Satz 10.3). Wählt man speziell  $u := P_U(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) - [\lambda_1 P_U v_1 + \lambda_2 P_U v_2] \in U$ , so folgt

die Linearität.

**Zu b).** Für alle  $v \in H$  ist  $(P_U \circ P_U)v$  die beste Approximation zu  $P_U v$  in  $U$ , und damit  $= P_U v$ , denn  $P_U v$  liegt bereits in  $U$ .

**Zu c).** Dies ist die Orthogonalitätsrelation aus Satz 10.3.

**Zu d).** Sind  $v, w \in H$ , so gilt

$$\begin{aligned}\langle P_U v, w \rangle &= \langle P_U v, P_U w \rangle + \underbrace{\langle P_U v, w - P_U w \rangle}_{=0 \text{ nach c)}} \\ &= \langle v, P_U w \rangle - \underbrace{\langle v - P_U v, P_U w \rangle}_{=0 \text{ nach c)}}\end{aligned}$$

□

**Bemerkung:** Man zeigt leicht:  $I - P_U$  ist die Orthogonal-Projektion auf  $U^\perp$ .

**Korollar 10.5:**

$(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  sei ein Hilbertraum und  $U \subset H$  ein abgeschlossener Unterraum. Dann gilt  $H = U \oplus U^\perp$ , d.h. jedes  $w \in H$  ist eindeutig darstellbar als  $w = u + v$  mit  $u \in U$  und  $v \in U^\perp$ .

**Beweis:** Zu gegebenem  $w \in H$  sei  $u \in U$  die beste Approximation zu  $w$  in  $U$ . Nach Satz 10.3 existiert diese, und es gilt  $v := w - u \in U^\perp$ . Zum Nachweis der Eindeutigkeit der Darstellung seien  $\tilde{u} \in U, \tilde{v} \in U^\perp$  mit  $w = \tilde{u} + \tilde{v}$ , also  $u - \tilde{u} = \tilde{v} - v \in U \cap U^\perp = \{0\}$ . Es folgt  $u = \tilde{u}$  und  $v = \tilde{v}$ . □

**Definition:** Es sei  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $H$  mit

$$\langle \varphi_k, \varphi_l \rangle = \delta_{kl} \quad (k, l \in \mathbb{N}).$$

Dann heißt  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  **Orthonormalsystem** in  $H$ . (Falls  $\dim H < \infty$ , ist hier und im Folgenden  $\mathbb{N}$  durch  $\{1, \dots, n\}$  mit  $n \leq \dim H$  zu ersetzen, und „Folge“ durch „ $n$ -Tupel“.)

**Lemma 10.6** (Orthonormalisierung nach E. Schmidt):

Es sei  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $H$ , derart daß je endlich viele Folgenglieder linear unabhängig sind. Hieraus wird rekursiv eine Folge  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  konstruiert:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &:= \frac{u_1}{\|u_1\|}, \\ \varphi_k &= \frac{1}{\left\| u_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle u_k, \varphi_j \rangle \varphi_j \right\|} \cdot \left( u_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle u_k, \varphi_j \rangle \varphi_j \right) \quad (k \geq 2).\end{aligned}$$

Dann ist  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  ein Orthonormalsystem in  $H$ . Zusätzlich gilt

$$\text{LH} \{ \varphi_1, \dots, \varphi_k \} = \text{LH} \{ u_1, \dots, u_k \} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

**Beweis:** Siehe Lineare Algebra.

**Beispiele:**

- 1) Im Fall  $H = \mathbb{K}^n$  (mit dem kanonischen inneren Produkt) ist zum Beispiel  $(e_1, \dots, e_n)$  (mit  $k \leq n$ ) ein Orthonormalsystem. Dabei ist  $e_j$  der  $j$ -te Einheitsvektor.
- 2) Im Fall  $H = l_2$  ist  $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$  (aber auch jede Teilfolge und jede Umordnung davon) ein Orthonormalsystem. Dabei ist  $e_j$  die  $j$ -te Einheitsfolge

$$e_j = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{j\text{-te Komp.}}, 0, \dots).$$

- 3) Im Fall  $H = L^2(-\pi, \pi)$  ist ein Orthonormalsystem gegeben durch

$$\left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(2x), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(2x), \dots \right) \quad (135)$$

oder, etwas einfacher in komplexer Form, durch

$$\left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ix}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ix}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{2ix}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-2ix}, \dots \right) \quad (136)$$

**Satz 10.7:**

Es sei  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  ein Orthonormalsystem in  $H$ . Ferner seien  $v_0 \in H, m \in \mathbb{N}$  und  $\gamma_1, \dots, \gamma_m \in \mathbb{K}$ . Dann gilt

$$\left\| v_0 - \sum_{k=1}^m \langle v_0, \varphi_k \rangle \varphi_k \right\| \leq \left\| v_0 - \sum_{k=1}^m \gamma_k \varphi_k \right\|, \quad (137)$$

und Gleichheit gilt nur im Falle  $\gamma_k = \langle v_0, \varphi_k \rangle$  ( $k = 1, \dots, m$ ). Also ist

$$\sum_{k=1}^m \langle v_0, \varphi_k \rangle \varphi_k =: u_m^*$$

beste Approximation (und als solche eindeutig) für  $v_0$  in

$$U_m := \text{LH} \{ \varphi_1, \dots, \varphi_m \}.$$

Schließlich gilt  $v_0 - u_m^* \in U_m^\perp$  und

$$\|u_m^*\|^2 = \sum_{k=1}^m |\langle v_0, \varphi_k \rangle|^2, \quad \|v_0 - u_m^*\|^2 = \|v_0\|^2 - \sum_{k=1}^m |\langle v_0, \varphi_k \rangle|^2. \quad (138)$$

**Bemerkung:** Insbesondere ist  $P_{U_m} v = \sum_{k=1}^m \langle v, \varphi_k \rangle \varphi_k$  für alle  $v \in H$ .

**Beweis:** Zunächst gilt für  $j = 1, \dots, m$ :

$$\begin{aligned}\langle v_0 - u_m^*, \varphi_j \rangle &= \langle v_0, \varphi_j \rangle - \left\langle \sum_{k=1}^m \langle v_0, \varphi_k \rangle \varphi_k, \varphi_j \right\rangle \\ &= \langle v_0, \varphi_j \rangle - \sum_{k=1}^m \langle v_0, \varphi_k \rangle \underbrace{\langle \varphi_k, \varphi_j \rangle}_{=\delta_{kj}} = 0\end{aligned}\quad (139)$$

und somit

$$\begin{aligned}\left\| v_0 - \sum_{k=1}^m \gamma_k \varphi_k \right\|^2 &= \left\| (v_0 - u_m^*) + \sum_{k=1}^m (\langle v_0, \varphi_k \rangle - \gamma_k) \varphi_k \right\|^2 \\ &= \|v_0 - u_m^*\|^2 + \underbrace{\left\langle v_0 - u_m^*, \sum_{k=1}^m (\langle v_0, \varphi_k \rangle - \gamma_k) \varphi_k \right\rangle}_{=0 \text{ nach (139)}} \\ &\quad + \underbrace{\left\langle v_0 - u_m^*, \sum_{k=1}^m (\langle v_0, \varphi_k \rangle - \gamma_k) \varphi_k \right\rangle}_{=0 \text{ nach (139)}} \\ &\quad + \left\langle \sum_{k=1}^m (\langle v_0, \varphi_k \rangle - \gamma_k) \varphi_k, \sum_{j=1}^m (\langle v_0, \varphi_j \rangle - \gamma_j) \varphi_j \right\rangle \\ &= \|v_0 - u_m^*\|^2 + \sum_{k,j=1}^m (\langle v_0, \varphi_k \rangle - \gamma_k) \overline{(\langle v_0, \varphi_j \rangle - \gamma_j)} \underbrace{\langle \varphi_k, \varphi_j \rangle}_{=\delta_{kj}} \\ &= \|v_0 - u_m^*\|^2 + \sum_{k=1}^m |\langle v_0, \varphi_k \rangle - \gamma_k|^2.\end{aligned}$$

Daraus folgt sofort die Ungleichung (137), mit Gleichheit genau im Falle  $\gamma_k = \langle v_0, \varphi_k \rangle$  ( $k = 1, \dots, m$ ). Dies zeigt natürlich, daß  $u_m^*$  eindeutige beste Approximation für  $v_0$  in  $U_m$  ist. Ferner gilt  $v_0 - u_m^* \in U_m^\perp$  nach (139). Schließlich ist

$$\begin{aligned}\|u_m^*\|^2 &= \left\langle \sum_{k=1}^m \langle v_0, \varphi_k \rangle \varphi_k, \sum_{j=1}^m \langle v_0, \varphi_j \rangle \varphi_j \right\rangle \\ &= \sum_{k,j=1}^m \langle v_0, \varphi_k \rangle \overline{\langle v_0, \varphi_j \rangle} \underbrace{\langle \varphi_k, \varphi_j \rangle}_{=\delta_{kj}} \\ &= \sum_{k=1}^m |\langle v_0, \varphi_k \rangle|^2\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\|v_0\|^2 &= \|(v_0 - u_m^*) + u_m^*\|^2 \\ &= \|v_0 - u_m^*\|^2 + 2\operatorname{Re} \underbrace{\langle v_0 - u_m^*, u_m^* \rangle}_{=0 \text{ nach (139)}} + \|u_m^*\|^2\end{aligned}$$

also  $\|v_0 - u_m^*\|^2 = \|v_0\|^2 - \|u_m^*\|^2$  und daher (138).  $\square$

**Satz 10.8** (Besselsche Ungleichung):

Es sei  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  ein Orthonormalsystem in  $H$  und  $v \in H$ . Dann gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle v, \varphi_k \rangle|^2 \leq \|v\|^2.$$

Insbesondere ist also die links stehende Reihe für jedes  $v \in H$  konvergent. Daraus wiederum folgt sofort

$$\langle v, \varphi_k \rangle \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad \text{für jedes } v \in H. \quad (140)$$

**Beweis:** Nach (138) gilt insbesondere

$$\|v\|^2 - \sum_{k=1}^m |\langle v, \varphi_k \rangle|^2 \geq 0 \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N},$$

woraus die Behauptung sofort folgt.  $\square$

**Definition:** Die Zahlen  $\langle v, \varphi_k \rangle$  heißen **verallgemeinerte Fourier-Koeffizienten** von  $v$  bzgl. des Orthonormalsystems  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ .

**Beispiel:** Wir betrachten nochmals  $H = L^2(-\pi, \pi)$  und das Orthonormalsystem (135). Bzgl. dieses Orthonormalsystems lauten die verallgemeinerten Fourier-Koeffizienten also

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} v(x) dx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} v(x) \cos(x) dx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} v(x) \sin(x) dx, \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} v(x) \cos(2x) dx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} v(x) \sin(2x) dx, \quad \dots \end{aligned} \quad (141)$$

und heißen Fourier-Koeffizienten (im engeren Sinne). Sie sind schon aus der Anfänger-Vorlesung bekannt!

Es stellt sich die Frage, wann in der Besselschen Ungleichung (Satz 10.8) *Gleichheit* für alle  $v \in H$  gilt. Es ist klar, daß dies nicht für jedes Orthonormalsystem der Fall sein kann, sondern nur für solche, die „genügend viele“ Glieder enthalten. (Läßt man aus einem Orthonormalsystem nur ein  $\varphi_{k_0}$  weg, so gilt in der Besselschen Ungleichung für  $v = \varphi_{k_0}$  sicher *keine* Gleichheit.)

**Satz 10.9:**

$(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  sei ein Hilbertraum und  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  ein Orthonormalsystem in  $H$ . Dann sind folgende Aussagen a) bis e) paarweise äquivalent:

a) Für alle  $v \in H$  gilt die **Parsevalsche Gleichung**

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle v, \varphi_k \rangle|^2 = \|v\|^2.$$

b) Jedes  $v \in H$  läßt sich nach  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  „entwickeln“:

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, \varphi_k \rangle \varphi_k,$$

wobei die Reihe im Sinne der Norm  $\|\cdot\|$  in  $H$  konvergiert.

c) Für alle  $u, v \in H$  gilt die Biorthogonalentwicklung

$$\langle u, v \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle u, \varphi_k \rangle \overline{\langle v, \varphi_k \rangle}.$$

d) Für alle  $v \in H$  gilt: Falls  $\langle v, \varphi_k \rangle = 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ , so ist  $v = 0$ .

e)  $\overline{LH\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}} = H$ . (Zur Erinnerung: der Querstrich bezeichnet den Abschluß in  $H$ .)

**Definition:** Ein Orthonormalsystem  $(\varphi_k)$  mit einer (und damit jeder) der obigen Eigenschaften a) bis e) heißt **vollständiges Orthonormalsystem** oder **Orthonormalbasis** in  $H$ .

**Beweis:** Wir machen die beiden Zirkelschlüsse  $c) \Rightarrow a) \Rightarrow d) \Rightarrow b) \Rightarrow c)$  und  $b) \Rightarrow e) \Rightarrow b)$ .

**c)  $\Rightarrow$  a):** folgt, wenn man in c)  $u = v$  einsetzt.

**a)  $\Rightarrow$  d):** folgt unmittelbar.

**d)  $\Rightarrow$  b):** Es sei  $v \in H$ . Wir setzen für alle  $m \in \mathbb{N}$ :  $u_m := \sum_{k=1}^m \langle v, \varphi_k \rangle \varphi_k$ .

Wir zeigen:  $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$  ist eine Cauchy-Folge in  $H$ . (142)

Dazu seien  $n, m \in \mathbb{N}$ , o.B.d.A.  $n < m$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \|u_m - u_n\|^2 &= \left\| \sum_{k=n+1}^m \langle v, \varphi_k \rangle \varphi_k \right\|^2 \\ &= \left\langle \sum_{k=n+1}^m \langle v, \varphi_k \rangle \varphi_k, \sum_{j=n+1}^m \langle v, \varphi_j \rangle \varphi_j \right\rangle \\ &= \sum_{k,j=n+1}^m \langle v, \varphi_k \rangle \overline{\langle v, \varphi_j \rangle} \underbrace{\langle \varphi_k, \varphi_j \rangle}_{=\delta_{kj}} \\ &= \sum_{k=n+1}^m |\langle v, \varphi_k \rangle|^2 \end{aligned}$$

Da die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle v, \varphi_k \rangle|^2$  aufgrund der Besselschen Ungleichung (Satz 10.8) konvergiert, folgt (142) aus dem Cauchy-Kriterium für Reihen in  $\mathbb{R}$ . Da  $H$  vollständig ist, hat  $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$  wegen (142) einen Grenzwert  $u \in H$ , also gilt

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, \varphi_k \rangle \varphi_k.$$

Wir müssen  $u = v$  beweisen. Es gilt für alle  $j \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned}\langle u, \varphi_j \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, \varphi_k \rangle \varphi_k, \varphi_j \right\rangle \stackrel{10.1. \text{ b)}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \langle \langle v, \varphi_k \rangle \varphi_k, \varphi_j \rangle \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, \varphi_k \rangle \underbrace{\langle \varphi_k, \varphi_j \rangle}_{=\delta_{kj}} = \langle v, \varphi_j \rangle,\end{aligned}$$

also  $\langle u - v, \varphi_j \rangle = 0$ . Nach d) gilt daher  $u = v$ .

**b)  $\Rightarrow$  c):** Es seien  $u, v \in H$ . Nach b) gilt

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \langle u, \varphi_k \rangle \varphi_k, \quad v = \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, \varphi_k \rangle \varphi_k$$

und daher

$$\begin{aligned}\langle u, v \rangle &= \left\langle \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \langle u, \varphi_k \rangle \varphi_k, \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \langle v, \varphi_j \rangle \varphi_j \right\rangle \\ &\stackrel{10.1. \text{ b)}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle \sum_{k=1}^n \langle u, \varphi_k \rangle \varphi_k, \sum_{j=1}^n \langle v, \varphi_j \rangle \varphi_j \right\rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k,j=1}^n \langle u, \varphi_k \rangle \overline{\langle v, \varphi_j \rangle} \underbrace{\langle \varphi_k, \varphi_j \rangle}_{=\delta_{kj}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \langle u, \varphi_k \rangle \overline{\langle v, \varphi_k \rangle} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle u, \varphi_k \rangle \overline{\langle v, \varphi_k \rangle}.\end{aligned}$$

**b)  $\Rightarrow$  e):** Für jedes  $v \in H$  gilt nach b):

$$v = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{k=1}^n \langle v, \varphi_k \rangle \varphi_k}_{\in \text{LH}\{\varphi_k: k \in \mathbb{N}\}} \in \overline{\text{LH}\{\varphi_k: k \in \mathbb{N}\}}$$

**e)  $\Rightarrow$  b):** Es sei  $v \in H$ . Nach e) existiert eine Folge  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\text{LH}\{\varphi_k: k \in \mathbb{N}\}$ , also  $v_n = \sum_{k=1}^{N_n} \alpha_k^{(n)} \varphi_k$ , mit  $v_n \rightarrow v$  ( $n \rightarrow \infty$ ). O.B.d.A. gelte  $N_n \rightarrow \infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Nach Satz 10.7 (genauer: (137)) gilt

$$\left\| v - \sum_{k=1}^{N_n} \langle v, \varphi_k \rangle \varphi_k \right\| \leq \left\| v - \sum_{k=1}^{N_n} \alpha_k^{(n)} \varphi_k \right\| = \|v - v_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

und daher  $v = \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, \varphi_k \rangle \varphi_k$ , also b). □

Für die Beantwortung der Frage der *Existenz* einer Orthonormalbasis in  $H$  müssen wir Genaueres über die Dimension von  $H$  wissen. Da Orthonormalbasen (bei uns) per Definition abzählbar sind, wird man so etwas wie „abzählbare Dimension“ von  $H$  voraussetzen müssen. Der folgende Begriff präzisiert dies.

**Definition:**  $H$  heißt **separabel**, wenn eine abzählbare Teilmenge  $A \subset H$  existiert mit  $\overline{A} = H$  (d.h.  $A$  ist **dicht** in  $H$ ).

**Satz 10.10:**

*Es existiert eine Orthonormalbasis in  $H$  genau dann, wenn  $H$  separabel ist.*

**Beweis:** Wir setzen

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}_{\mathbb{K}} &:= \mathbb{Q}, \quad \text{falls } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \quad \text{und} \\ \mathbb{Q}_{\mathbb{K}} &:= \mathbb{Q} + i\mathbb{Q} = \{q_1 + iq_2 : q_1, q_2 \in \mathbb{Q}\}, \quad \text{falls } \mathbb{K} = \mathbb{C}.\end{aligned}$$

Es existiere eine Orthonormalbasis  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $H$ . Wir zeigen, daß

$$A := \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k : n \in \mathbb{N}; \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Q}_{\mathbb{K}} \right\}$$

dicht in  $H$  ist. Da  $A$  offenbar abzählbar ist, folgt dann die Separabilität von  $H$ .

Zum Nachweis von  $\overline{A} = H$  seien  $u \in H$  und  $\varepsilon > 0$ . Nach Satz 10.9 existiert ein  $v = \sum_{k=1}^n \beta_k \varphi_k \in \text{LH} \{ \varphi_k : k \in \mathbb{N} \}$  mit  $\|u - v\| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Da  $\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$  dicht in  $\mathbb{K}$  ist, existieren weiter  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$  mit  $|\alpha_k - \beta_k| < \frac{\varepsilon}{2n}$  ( $k = 1, \dots, n$ ), also  $\|v - w\| < \frac{\varepsilon}{2}$  für  $w := \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k \in A$ . Also gilt  $\|u - w\| < \varepsilon$ , und somit  $u \in \overline{A}$ .

Umgekehrt sei  $H$  separabel und  $A \subset H$  eine abzählbare dichte Teilmenge. Es existiert also eine Folge  $(w_j)_{j \in \mathbb{N}}$  mit  $A = \{w_j : j \in \mathbb{N}\}$ . Rekursiv können wir eine Teilfolge  $(w_{j_k})_{k \in \mathbb{N}}$  auswählen mit:

- i)  $w_{j_1}, \dots, w_{j_k}$  sind linear unabhängig  $\forall k \in \mathbb{N}$ ;
- ii)  $\text{LH} \{w_{j_1}, \dots, w_{j_k}\} = \text{LH} \{w_1, w_2, \dots, w_{j_k}\} \quad \forall k \in \mathbb{N}$ .

Wegen i) läßt sich aus  $(w_{j_k})_{k \in \mathbb{N}}$  nach dem Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren (Lemma 10.6) ein Orthonormalsystem  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $H$  konstruieren mit

$$\text{LH} \{ \varphi_1, \dots, \varphi_k \} = \text{LH} \{ w_{j_1}, \dots, w_{j_k} \} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Mit ii) folgt

$$\text{LH} \{ \varphi_k : k \in \mathbb{N} \} = \text{LH} \{ w_j : j \in \mathbb{N} \}.$$

Da  $A = \{w_j : j \in \mathbb{N}\}$  (und damit auch  $\text{LH} \{w_j : j \in \mathbb{N}\}$ ) dicht in  $H$  ist, folgt  $\overline{\text{LH} \{ \varphi_k : k \in \mathbb{N} \}} = H$ , d.h.  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  ist eine Orthonormalbasis nach Satz 10.9.  $\square$

### Beispiele:

- 1) Im Fall  $H = \mathbb{K}^n$  stimmt der neue Begriff „Orthonormalbasis“ mit dem alten aus der Linearen Algebra überein. Insbesondere ist beispielsweise  $(e_1, \dots, e_n)$  ( $e_j$  :  $j$ -ter Einheitsvektor) eine Orthonormalbasis.
- 2) Im Fall  $H = l_2$  ist  $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$  ( $e_j$  :  $j$ -te Einheitsfolge) eine Orthonormalbasis, denn für  $v \in l_2$  mit  $\underbrace{\langle v, e_k \rangle}_{=v_k} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$  gilt  $v = 0$ .

- 3) In  $H = L^2(-\pi, \pi)$  hatten wir bereits das Orthonormalsystem

$$\left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(2x), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(2x), \dots \right)$$

betrachtet. Dieses ist offenbar genau dann eine Orthonormalbasis, wenn die klassische Fourierreihe einer jeden Funktion  $u \in L^2(-\pi, \pi)$  bzgl.  $\|\cdot\|_2$  (nicht notwendig punktweise!) gegen  $u$  konvergiert. Dass dies tatsächlich so ist, werden wir später sehen.

Insbesondere sind also alle oben genannten in 1) bis 3) Hilberträume separabel.

Der folgende Satz von *Fischer-Riesz* zeigt, daß alle separablen Hilberträume mit  $\dim H = \infty$  in gewissen Sinne dieselbe Struktur haben.

#### Satz 10.11:

Es sei  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$  ein separabler Hilbertraum,  $\dim H = \infty$ , und  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Orthonormalbasis in  $H$  (Existenz nach Satz 10.10). Dann ist die Abbildung

$$\Phi : \begin{cases} H \rightarrow l_2 \\ u \mapsto (\langle u, \varphi_k \rangle_H)_{k \in \mathbb{N}} \end{cases}$$

(wobei  $l_2$  über demselben Körper  $\mathbb{K}$  betrachtet wird wie  $H$ ) ein **isometrischer Isomorphismus**, also ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum-Isomorphismus mit der zusätzlichen Isometrie-Eigenschaft

$$\langle \Phi(u), \Phi(v) \rangle_{l_2} = \langle u, v \rangle_H \quad \forall u, v \in H. \quad (143)$$

**Also:** Alle separablen Hilberträume  $H$  über  $\mathbb{K}$  mit  $\dim H = \infty$  sind zu  $l_2$  über  $\mathbb{K}$  (und damit auch zueinander) isometrisch isomorph.

**Beweis:** Offenbar ist  $\Phi$  linear. Aufgrund der Besselschen Ungleichung (Satz 10.8) bildet  $\Phi$  in der Tat nach  $l_2$  ab, und Satz 10.9 (Aussage c)) zeigt die Isometrie-Eigenschaft (143), und daher insbesondere auch die Injektivität von  $\Phi$ . Zum Nachweis der Surjektivität sei  $a = (a_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l_2$ . Wir setzen

$$u_n := \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (144)$$

Dann gilt für  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $n < m$ :

$$\|u_n - u_m\|^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^m a_k \varphi_k \right\|^2 = \sum_{k=n+1}^m |a_k|^2.$$

Wegen der Konvergenz der Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$  ist also  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Cauchy-Folge in  $H$  und hat daher einen Grenzwert  $u \in H$ . (144) liefert nun

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k.$$

Nimmt man das innere Produkt mit  $\varphi_j$  (und benutzt Lemma 10.1), so folgt  $\langle u, \varphi_j \rangle = a_j$  ( $j \in \mathbb{N}$ ) und somit  $a = \Phi(u)$ .  $\square$

## 11 Darstellung linearer Funktionale im Hilbertraum

$(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  sei ein Hilbertraum. Wir wiederholen die Definition des Dualraumes

$$H' := \{l : H \rightarrow \mathbb{K} : l \text{ linear, beschränkt}\} = B(H, \mathbb{K})$$

mit der kanonischen Operatornorm

$$\|l\|' := \sup_{u \in H \setminus \{0\}} \frac{|lu|}{\|u\|}.$$

Für jedes feste  $v \in H$  ist ein beschränktes lineares Funktional  $l_v$  auf  $H$  (also ein  $l_v \in H'$ ) gegeben durch

$$l_v u := \langle u, v \rangle \quad (u \in H). \quad (145)$$

Offenbar ist dieses  $l_v$  in der Tat linear, und es gilt  $|l_v u| \leq \|u\| \|v\|$  ( $u \in H$ ), also ist  $l_v$  tatsächlich beschränkt und  $\|l_v\|' \leq \|v\|$ . Umgekehrt gilt, falls  $v \neq 0$ , auch  $\|l_v\|' \geq \frac{|l_v v|}{\|v\|} \stackrel{(145)}{=} \|v\|$ , also

$$\|l_v\|' = \|v\|. \quad (146)$$

Das folgende wichtige Resultat zeigt, daß *alle*  $l \in H'$  von der Form (145) sind.

**Satz 11.1** (Darstellungssatz von Fréchet-Riesz): *Zu jedem  $l \in H'$  existiert ein eindeutiges  $v \in H$  mit  $l = l_v$ , also mit*

$$lu = \langle u, v \rangle \quad \text{für alle } u \in H. \quad (147)$$

**Beweis:** Zum Nachweis der *Existenz* eines solchen  $v \in H$  bemerken wir zunächst, daß (147) im Fall  $l = 0$  für  $v = 0$  gilt. Nun sei also  $l \neq 0$ . Wir betrachten den Kern (Nullraum)

$$N_l := \{u \in H : lu = 0\}.$$

$N_l$  ist offenbar ein Unterraum von  $H$ , der außerdem *abgeschlossen* ist: Ist  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $N_l$ , die gegen ein  $u \in H$  konvergiert, so gilt  $lu_k = 0$  wegen  $u_k \in N_l$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) und daher, da  $l$  beschränkt und daher nach Lemma 9.1 stetig ist,  $lu = \lim_{k \rightarrow \infty} lu_k = 0$ , also  $u \in N_l$ .

Nach Korollar 10.5 gilt somit

$$H = N_l \oplus N_l^\perp. \quad (148)$$

Wegen  $l \neq 0$  ist  $N_l \neq H$ . (148) liefert somit  $N_l^\perp \neq \{0\}$ . Wir wählen ein  $w \in N_l^\perp \setminus \{0\}$  und setzen

$$v := \frac{\overline{lw}}{\|w\|^2} w \in N_l^\perp. \quad (149)$$

Es gilt  $lw \neq 0$ , denn sonst wäre  $w \in N_l \cap N_l^\perp = \{0\}$ . Nun sei  $u \in H$ . Wegen

$$l \left( u - \frac{lu}{lw} w \right) = lu - \frac{lu}{lw} lw = 0$$

gilt  $u - \frac{lu}{lw} w \in N_l$ , also wegen  $v \in N_l^\perp$ :

$$\left\langle u - \frac{lu}{lw} w, v \right\rangle = 0,$$

folglich

$$\langle u, v \rangle = \left\langle \frac{lu}{lw} w, v \right\rangle \stackrel{(149)}{=} \frac{lu}{lw} \left\langle w, \frac{\overline{lw}}{\|w\|^2} w \right\rangle = lu,$$

d.h. es gilt (147).

Zum Nachweis der Eindeutigkeit von  $v$  seien  $v_1, v_2 \in H$  mit  $lu = \langle u, v_i \rangle$  für alle  $u \in H$  ( $i = 1, 2$ ). Es folgt  $\langle u, v_1 - v_2 \rangle = 0$  für alle  $u \in H$ , und die Wahl  $u := v_1 - v_2$  liefert  $v_1 = v_2$ .  $\square$

Aus (145) und (146) und Satz 11.1 folgt: Die Abbildung

$$\Phi : \begin{cases} H \longrightarrow H' \\ v \longmapsto l_v \end{cases} \quad (150)$$

ist bijektiv, antilinear (d.h.  $\Phi$  ist additiv, und  $\Phi(\lambda v) = \overline{\lambda} \Phi(v)$ ) und normerhaltend.

Im Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ist  $\Phi$  also ein *normerhaltender Isomorphismus*. Im Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  brauchen wir zunächst eine geeignete Definition von „konjugiert komplexen Elementen“, d.h. von  $\overline{v} \in H$  (für  $v \in H$ ), mit den Eigenschaften  $\overline{\overline{v_1 + v_2}} = \overline{v_1} + \overline{v_2}$ ,  $\overline{\overline{\lambda v}} = \lambda \overline{v}$ ,  $\overline{\overline{v}} = v$ ,  $\|v\| = \|\overline{v}\|$ . In vielen Hilberträumen ist  $\overline{v}$  kanonisch definierbar (etwa in  $\mathbb{C}^n, l_2, L^2(\Omega)$ ). In separablen Hilberträumen können wir gemäß Satz 10.10 eine Orthonormalbasis  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  wählen und

$$\overline{v} := \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\langle v, \varphi_k \rangle} \varphi_k \quad (v \in H)$$

definieren.

Steht eine geeignete Definition von  $\bar{v}$  zur Verfügung (was wir nun annehmen wollen), können wir anstelle von (150) die Abbildung

$$\Phi : \begin{cases} H \longrightarrow H' \\ v \longmapsto l_{\bar{v}} \end{cases} \quad (151)$$

betrachten, die nun (wie im Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ) ein normerhaltender Isomorphismus ist.

De facto steht  $\bar{v}$  in *jedem* Hilbertraum zur Verfügung; zum Beweis müssen überabzählbare Orthonormalsysteme betrachtet werden.

Mit Hilfe von  $\Phi$  können wir auf  $H'$  ein inneres Produkt definieren:

$$\langle l_1, l_2 \rangle' := \langle \Phi^{-1}(l_1), \Phi^{-1}(l_2) \rangle \quad (l_1, l_2 \in H'). \quad (152)$$

Da  $\Phi$  normerhaltend ist (bezüglich der „alten“ Norm  $\|\cdot\|$  auf  $H$ ), erzeugt  $\langle \cdot, \cdot \rangle'$  wieder diese alte Norm  $\|\cdot\|$ .

$\Phi : H \longrightarrow H'$  ist also ein *isometrischer Isomorphismus* zwischen den Hilberträumen (beachte Korollar 9.3)  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  und  $(H', \langle \cdot, \cdot \rangle')$ .

Für viele Anwendungen, insbesondere auf partielle Differentialgleichungen, ist die folgende Verallgemeinerung des Darstellungssatzes 11.1 wichtig, bei der das innere Produkt in (147) durch eine *Sesquilinearform*  $B : H \times H \rightarrow \mathbb{K}$  (mit gewissen Zusatzeigenschaften) ersetzt wird.

**Satz 11.2** (Lemma von Lax-Milgram):

*Es sei  $B : H \times H \rightarrow \mathbb{K}$  eine Sesquilinearform. Es gelte mit Konstanten  $C, c > 0$ :*

- i)  $|B[u, v]| \leq C \|u\| \cdot \|v\| \quad (u, v \in H)$ ; **Beschränktheit** von  $B$
- ii)  $\operatorname{Re}(B[u, u]) \geq c \|u\|^2 \quad (u \in H)$ ; **Koerzivität** oder  **$H$ -Elliptizität** von  $B$ .

*Dann gibt es zu jedem  $l \in H'$  ein eindeutiges  $v \in H$  mit  $B[u, v] = l u$  für alle  $u \in H$ .*

**Beweis:** Übungen.

## 12 Die Sobolevräume $H^1(\Omega)$ und $H_0^1(\Omega)$

Wir wollen nun Hilberträume definieren, für die - im Gegensatz zu  $L^2(\Omega)$  - auch *Ableitungen* (in einem geeigneten Sinne) ihrer Elemente sinnvoll erklärt sind. Dabei sei  $\Omega$  eine offene Menge in  $\mathbb{R}^n$ .

Ist etwa  $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$  ein beschränktes Intervall, so ist  $C^1[a, b]$  mit der Norm

$$\|u\| := \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty$$

zwar ein Banachraum (Übung!), besitzt aber keine Hilbertraumstruktur; bzgl. des kanonischen inneren Produktes

$$\langle u, v \rangle := \int_a^b (u\bar{v} + u'\bar{v}') dx$$

ist  $C^1[a, b]$  nicht vollständig.

Ähnlich wie wir von  $C(\bar{\Omega})$  zu  $L^2(\Omega)$  übergegangen sind, um einen Hilbertraum zu erhalten, wollen wir also nun von  $C^1(\bar{\Omega})$  zu einem geeigneten Hilbertraum übergehen.

Zur Motivation nehmen wir zunächst  $\Omega$  als beschränkt und „regulär“ in dem Sinne an, daß der Gaußsche Divergenzsatz

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} v \, dx = \int_{\partial\Omega} v \cdot \nu \, d\sigma \quad \text{für alle } v \in C^1(\bar{\Omega})^n \quad (153)$$

gilt. Dabei ist  $\nu : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  das äußere Einheitsnormalenfeld an  $\partial\Omega$ . In den Anfängervorlesungen wurden einige Gebietsklassen dieser Art identifiziert. Sind nun  $u, \varphi \in C^1(\bar{\Omega})$  mit  $\varphi|_{\partial\Omega} \equiv 0$ , so gilt für alle  $i = 1, \dots, n$ :

$$\int_{\Omega} \underbrace{\operatorname{div}(u\varphi e_i)}_{=\frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi + u\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}} dx = \int_{\partial\Omega} u \underbrace{\varphi}_{=0} e_i \cdot \nu \, d\sigma = 0,$$

also die partielle Integrationsformel

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi \, dx. \quad (154)$$

Diese gilt also für  $u \in C^1(\bar{\Omega})$  und insbesondere für  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  (siehe (128)). (154) motiviert die folgende Definition *schwacher Ableitungen*. Die Voraussetzungen, daß  $\Omega$  beschränkt und „regulär“ ist, brauchen wir dafür nicht.

**Definition:** Es sei  $u \in L^2(\Omega)$ .  $u$  heißt **schwach differenzierbar nach  $x_i$  mit schwacher Ableitung in  $L^2(\Omega)$** , wenn ein  $v \in L^2(\Omega)$  existiert mit der Eigenschaft

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} v \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (155)$$

In diesem Fall heißt  $v$  **schwache Ableitung von  $u$  nach  $x_i$**  und wird mit  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  bezeichnet.

**Bemerkung:** a) Wenn  $v \in L^2(\Omega)$  mit der Eigenschaft (155) existiert, so ist es eindeutig bestimmt, denn ist  $\tilde{v} \in L^2(\Omega)$  eine weitere solche Funktion, so gilt  $\int_{\Omega} (v - \tilde{v}) \varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ , also  $v - \tilde{v} \in C_0^\infty(\Omega)^\perp = \{0\}$  (wegen Satz 8.6).

b) Ist  $\Omega$  beschränkt und „regulär“ und ist  $u \in C^1(\overline{\Omega})$ , so ist  $u$  auch schwach differenzierbar nach  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), und die schwache Ableitung  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  stimmt mit der klassischen überein. Dies folgt sofort aus (154).

**Beispiele:**

1) Es sei  $\Omega = (-1, 1)$  und  $u(x) := |x|$  ( $x \in \Omega$ ). Dann gilt für alle  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u \varphi' dx &= - \int_{-1}^0 x \varphi'(x) dx + \int_0^1 x \varphi'(x) dx \\ &= - \underbrace{[x\varphi(x)]_{-1}^0}_{=0 \cdot \varphi(0) + 1 \cdot \varphi(-1)=0} + \int_{-1}^0 \varphi(x) dx + \underbrace{[x\varphi(x)]_0^1}_{=1 \cdot \varphi(1) - 0 \cdot \varphi(0)=0} - \int_0^1 \varphi(x) dx \\ &= - \int_{\Omega} v \varphi dx \end{aligned}$$

mit  $v(x) := \begin{cases} -1 & (-1 \leq x < 0), \\ 1 & (0 \leq x \leq 1). \end{cases}$  Also ist  $u$  schwach differenzierbar (nach  $x$ ) mit Ableitung  $v$ .

2) Es sei  $\Omega = (-1, 1)$  und  $u(x) := \begin{cases} -1 & (-1 \leq x < 0), \\ 1 & (0 \leq x \leq 1). \end{cases}$  Dann ist  $u$  nicht schwach differenzierbar mit Ableitung in  $L^2(\Omega)$ .

**Beweis:** Übung.

**Definition** (des **Sobolev-Raumes**  $H^1(\Omega)$ ):

$H^1(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) : u \text{ ist schwach differenzierbar nach } x_i \text{ mit schwacher Ableitung in } L^2(\Omega) \text{ für alle } i \in \{1, \dots, n\}\}.$

Auf  $H^1(\Omega)$  können wir weiter das kanonische Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle_{H^1} &:= \langle u, v \rangle_{L^2} + \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\rangle_{L^2} \\ &= \int_{\Omega} \left( u \bar{v} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} \right) dx = \int_{\Omega} (u \bar{v} + \nabla u \cdot \nabla \bar{v}) dx \quad (156) \end{aligned}$$

definieren. Die durch  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  erzeugte Norm ist also gegeben durch

$$\|u\|_{H^1} = \sqrt{\|u\|_2^2 + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_2^2}. \quad (157)$$

**Satz 12.1:**  $(H^1(\Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1})$  ist ein Hilbertraum.

**Beweis:** Es sei  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $H^1(\Omega)$ , d.h. es gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k_0 \in \mathbb{N} \quad \forall j, k \geq k_0 \quad \|u_k - u_j\|_2^2 + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right\|_2^2 < \varepsilon^2.$$

Somit sind  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  und  $(\frac{\partial u_k}{\partial x_i})_{k \in \mathbb{N}}$  (für  $i = 1, \dots, n$ ) Cauchy-Folgen in  $L^2(\Omega)$  und somit konvergent in  $L^2(\Omega)$  mit Grenzwerten  $u$  bzw.  $v_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Wir zeigen, daß  $u$  schwach differenzierbar nach  $x_i$  ist mit  $\frac{\partial u}{\partial x_i} = v_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Dann gilt also  $u \in H^1(\Omega)$  und  $u_k \rightarrow u$ ,  $\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i}$  in  $L^2(\Omega)$ , und wegen (157) daher  $u_k \rightarrow u$  in  $H^1(\Omega)$ .

Sei also  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ . Dann gilt

$$\int_{\Omega} \underbrace{u_k}_{\rightarrow u \text{ in } L^2(\Omega)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \underbrace{\frac{\partial u_k}{\partial x_i}}_{\rightarrow v_i \text{ in } L^2(\Omega)} \varphi dx \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Wegen Lemma 10.1 b) folgt also

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} v_i \varphi dx \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Da dies für alle  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  gilt, ist  $u$  also in der Tat schwach differenzierbar nach  $x_i$  mit  $\frac{\partial u}{\partial x_i} = v_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ).  $\square$

Da wir den Sobolevraum  $H^1(\Omega)$  zur Lösung von Randwertaufgaben für Differentialgleichungen benutzen wollen, möchten wir auch *Randbedingungen*, z.B. die *Dirichlet-Randbedingung*

$$u(x) = 0 \quad \text{für } x \in \partial\Omega, \quad (158)$$

mit in den Sobolevraum  $H^1(\Omega)$  hineinstecken. Da Funktionen in  $H^1(\Omega)$  aber nur fast überall erklärt sind und  $\partial\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine Lebesguesche Nullmenge ist (zumindest wenn der Rand  $\partial\Omega$  nicht „zu irregulär“ ist), macht die punktweise Bedingung (158) für  $u \in H^1(\Omega)$  keinen Sinn. Stattdessen benutzen wir die

**Definition:** Es sei  $H_0^1(\Omega)$  der Abschluss  $\overline{C_0^\infty(\Omega)}$  von  $C_0^\infty(\Omega)$  in  $H^1(\Omega)$  (also bezüglich der Norm (157)).

$H_0^1(\Omega)$  ist also ein abgeschlossener Unterraum des Hilbertraums  $(H^1(\Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1})$ , und daher gilt

**Korollar 12.2:**  $(H_0^1(\Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1})$  ist ein Hilbertraum.

**Beweis:** Leichte Übung.

In der Tat enthält  $H_0^1(\Omega)$  in einem geeigneten verallgemeinerten Sinn die Randbedingung (158), was wir aber hier nicht weiter vertiefen wollen.

Ist  $\Omega$  ein *beschränktes Gebiet*, so können wir auf  $H_0^1(\Omega)$  ein anderes inneres Produkt

$$\langle u, v \rangle_{H_0^1} := \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\rangle_{L^2} = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx \quad (159)$$

betrachten. Die Definitheit von  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_0^1}$  folgt aus

**Satz 12.3** (Poincaré-Friedrichs-Ungleichung):

$\Omega$  sei ein *beschränktes Gebiet*. Dann existiert ein  $C_p > 0$  mit der Eigenschaft

$$\|u\|_2 \leq C_p \|\nabla u\|_2 \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

**Beweis:** Übungen.

Satz 12.3 zeigt nicht nur die Definitheit von  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_0^1}$ , sondern auch die Äquivalenz der von  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_0^1}$  erzeugten Norm  $\|\cdot\|_{H_0^1}$  und der Norm  $\|\cdot\|_{H^1}$  (s. (157)) auf  $H_0^1(\Omega)$ , denn für  $u \in H_0^1(\Omega)$  gilt

$$\|u\|_{H^1}^2 = \|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2 \leq (C_p^2 + 1) \|\nabla u\|_{L^2}^2 = (C_p^2 + 1) \|u\|_{H_0^1}^2$$

(und natürlich auch  $\|u\|_{H_0^1} \leq \|u\|_{H^1}$ ). Insbesondere gilt also:

**Korollar 12.4:**  $\Omega$  sei ein *beschränktes Gebiet*. Dann ist  $(H_0^1(\Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle_{H_0^1})$  ein Hilbertraum.

## 13 Dirichlet-Randwertproblem für die Poisson-Gleichung

Nun wollen wir für das einfachste Randwertproblem mit einer *partiellen* Differentialgleichung mit Hilfe des Sobolev-Raumes  $H_0^1(\Omega)$  und des Rieszschen Darstellungssatzes 11.1 eine Existenzaussage gewinnen.

Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine beschränkte offene Menge und  $r \in L^2(\Omega)$ . Wir betrachten das Randwertproblem

$$-(\Delta u)(x) = r(x) \quad (x \in \Omega), \quad u(x) = 0 \quad (x \in \partial\Omega); \quad (160)$$

dabei ist

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \quad (161)$$

der *Laplace-Operator*. Die Gleichung  $-\Delta u = r$  wird *Poisson-Gleichung* genannt. Die Randbedingung  $u = 0$  auf  $\partial\Omega$  heißt *Dirichlet-Randbedingung*.

**Beispiel:** Die (skalierten) Maxwell'schen Gleichungen im Vakuum für das elektrische Feld  $E : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  lauten im stationären (also zeitunabhängigen) Fall in Abwesenheit von Magnetfeldern:

$$\operatorname{div} E = r, \quad \operatorname{rot} E = 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Dabei ist  $r : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  die gegebene *Ladungsdichte*.

Ist nun  $\Omega$  spezieller ein *einfach zusammenhängendes Gebiet*, so folgt aus  $\operatorname{rot} E = 0$  in  $\Omega$  (unter der Annahme  $E \in C^1(\overline{\Omega})^3$ ) die Existenz eines *Potentials*  $u$  mit  $-\nabla u = E$ . Die Gleichung  $\operatorname{div} E = r$  wird damit zu

$$-\underbrace{\operatorname{div}(\nabla u)}_{=\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = \Delta u} = r \quad \text{in } \Omega.$$

Wenn wir am Rand  $\partial\Omega$  ferner eine elektrische *Erdung* anbringen, erhalten wir zusätzlich die Randbedingung

$$u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

also insgesamt unser Randwertproblem (160).

Aus vielerlei Gründen (analytischer und auch numerischer Art) ist es nützlich, die sogenannte *schwache Formulierung* des Randwertproblems (160) zu betrachten. Zur Motivation nehmen wir einstweilen wieder an, daß  $\Omega$  „regulär“ ist (in dem Sinne, daß der Gaußsche Divergenzsatz gilt) und daß  $r \in C(\overline{\Omega})$  gilt. Ist  $u \in C^2(\overline{\Omega})$  eine Lösung von (160) und ist  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  beliebig, so gilt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} r \varphi dx &= - \int_{\Omega} \underbrace{(\Delta u)}_{=\operatorname{div}(\nabla u)} \varphi dx = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\varphi \nabla u) dx + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx \\ &= - \int_{\partial\Omega} \underbrace{\varphi}_{=0} (\nabla u \cdot \nu) do + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx, \end{aligned}$$

also

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} r \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (162)$$

(162) heißt *schwache Formulierung* von (160). Oben haben wir gezeigt, daß jede klassische Lösung  $u \in C^2(\overline{\Omega})$  von (160) auch (162) erfüllt. Umgekehrt erhalten wir für jedes  $u \in C^2(\overline{\Omega})$  mit  $u = 0$  auf  $\partial\Omega$ , welches (162) erfüllt, durch Umkehrung der obigen Rechenschritte:

$$\int_{\Omega} (\Delta u + r) \varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Es folgt  $\Delta u + r \in C_0^\infty(\Omega)^{\perp L^2(\Omega)} = \{0\}$  (nach Satz 8.6), d.h.  $u$  ist klassische Lösung von (160).

Eine wesentliche Beobachtung ist nun, daß Lösungen von (162) sinnvoll erklärt werden können, die nur noch *erste* Ableitungen besitzen, welche zudem nur *schwache* Ableitungen zu sein brauchen. Wir wollen also nach Lösungen  $u \in H^1(\Omega)$  von (162) suchen. Um auch die Randbedingung  $u = 0$  auf  $\partial\Omega$  mit einzubauen, suchen wir also nach Lösungen  $u \in H_0^1(\Omega)$  von (162).

Wir können nun die Zusatzannahme, daß  $\Omega$  „regulär“ ist, wieder fallenlassen. Außerdem können wir wieder  $r \in L^2(\Omega)$  betrachten.

**Definition:** Ein  $u \in H_0^1(\Omega)$ , für welches (162) gilt, heißt *schwache Lösung* des Dirichlet-Randwertproblems für die Poisson-Gleichung (160).

Während klassische Lösungen von (162) nur unter Zusatzvoraussetzungen existieren, und auch dann der Existenzbeweis recht schwierig ist, ist es sehr einfach, die Existenz *schwacher* Lösungen zu beweisen:

**Satz 13.1:** Für jedes  $r \in L^2(\Omega)$  existiert eine eindeutige Lösung  $u \in H_0^1(\Omega)$  von (162) (also eine eindeutige schwache Lösung von (160)).

**Beweis:** Wir definieren das lineare Funktional

$$l : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{K}, \quad l\varphi := \int_{\Omega} r\varphi dx. \quad (163)$$

Es gilt aufgrund der Poincaré-Friedrichs-Ungleichung (Satz 12.3):

$$|l\varphi| \leq \|r\|_2 \|\varphi\|_2 \leq C_p \|r\|_2 \|\nabla\varphi\|_2 \stackrel{(159)}{=} C_p \|r\|_2 \|\varphi\|_{H_0^1} \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

also  $l \in H_0^1(\Omega)'$ . Nach dem Darstellungssatz 11.1 von Fréchet-Riesz existiert also ein eindeutiges  $v \in H_0^1(\Omega)$  mit

$$l\varphi = \langle \varphi, v \rangle_{H_0^1} \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

also wegen (163) und (159), mit  $u = \bar{v}$ ,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} r\varphi dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \quad (164)$$

Wegen  $H_0^1(\Omega) \supset C_0^\infty(\Omega)$  gilt also (162), d.h. die Existenz einer schwachen Lösung ist bewiesen. Für die Eindeutigkeit ist noch zu zeigen, daß aus (162) auch (164) folgt (denn die Lösung von (164) ist eindeutig).

Es gelte also (162), und es sei  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ . Nach Definition von  $H_0^1(\Omega)$  existiert also eine Folge  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $C_0^\infty(\Omega)$  mit  $\varphi_k \rightarrow \varphi$  in  $H_0^1(\Omega)$ . Benutzen wir (162) für  $\varphi_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) und lassen  $k \rightarrow \infty$  gehen, so folgt mit Lemma 10.1 b) und der Stetigkeit von  $l$  (aus (163)) die Beziehung (164).  $\square$

**Bemerkung:** Der letzte Teil des Beweises zeigt, daß in der schwachen Formulierung (162) der „Testraum“  $C_0^\infty(\Omega)$  äquivalent durch  $H_0^1(\Omega)$  ersetzt werden kann.

## 14 Der Spektralsatz für kompakte symmetrische Operatoren

In diesem Kapitel wollen wir *Eigenwertprobleme* für gewisse lineare Operatoren im Hilbertraum untersuchen, die anschließend weitere Erkenntnisse über gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen liefern werden.

Es sei  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein separabler Hilbertraum und  $K : H \rightarrow H$  ein linearer Operator.  $K$  sei *symmetrisch* (*hermitesch*), d.h. es gelte

$$\langle Ku, v \rangle = \langle u, Kv \rangle \quad \forall u, v \in H. \quad (165)$$

In  $\mathbb{K}^n$  gilt: Jede symmetrische (hermitesche) Matrix  $K \in \mathbb{K}^{n \times n}$  besitzt eine *Orthonormalbasis aus Eigenvektoren* (siehe Lineare Algebra). So etwas hätten wir gerne auch im Hilbertraum. Neben der Symmetrie von  $K$  brauchen wir dazu aber noch eine Zusatzeigenschaft:

**Definition:**  $K$  heißt **kompakt**, wenn für jede beschränkte Folge  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $H$  gilt:  $(Ku_k)_{k \in \mathbb{N}}$  besitzt eine konvergente Teilfolge.

**Bemerkung:** Im  $\mathbb{K}^n$  ist jeder lineare Operator (Matrix) kompakt; dies folgt leicht aus dem Satz von Bolzano-Weierstraß.

Im Folgenden sei also  $K$  symmetrisch und kompakt.

Wir stellen zunächst fest, daß  $K$  dann auch *beschränkt* ist (leichte Übung). Wir erinnern uns, daß daher die Norm

$$\|K\| := \sup \left\{ \frac{\|Ku\|}{\|u\|} : u \in H \setminus \{0\} \right\}$$

von  $K$  endlich ist.

**Lemma 14.1:** Es gilt  $\|K\| = \sup \left\{ \frac{|\langle Ku, u \rangle|}{\langle u, u \rangle} : u \in H \setminus \{0\} \right\}$ .

**Beweis:** Übungen.

Wir benutzen die „offensichtliche“

**Definition:**  $\lambda \in \mathbb{C}$  heißt **Eigenwert** von  $K$ , wenn ein  $u \in H \setminus \{0\}$  existiert mit  $Ku = \lambda u$ . Jedes solche  $u$  heißt dann **Eigenelement** zum Eigenwert  $\lambda$ . Der Raum  $\{u \in H : Ku = \lambda u\}$  heißt **Eigenraum** zu  $\lambda$ .

**Satz 14.2:**

- 1) Alle Eigenwerte sind **reell**. (Das liegt an der Symmetrie.)
- 2) Eigenelemente zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal. (Das liegt an der Symmetrie.)
- 3) Die Eigenwerte haben keinen von 0 verschiedenen Häufungspunkt. (Das liegt an der Kompaktheit.)
- 4) Jeder von 0 verschiedene Eigenwert hat endliche Vielfachheit, d.h. der zugehörige Eigenraum ist endlich-dimensional. (Das liegt an der Kompaktheit.)
- 5) Die Eigenwerte von  $K$  können angeordnet werden:  $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots$  (Das liegt an der Kompaktheit.)

**Beweis: Zu 1) und 2).** Leichte Übung.

**Zu 3) und 4).** Wir nehmen an, daß 3) oder 4) falsch ist. Dann gibt es also ein Orthonormalsystem  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  aus Eigenelementen (beachte 2)), deren zugehörige - nicht notwendig injektive - Eigenwertfolge  $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$  einen Grenzwert  $\hat{\lambda} \neq 0$  hat. O.B.d.A. gelte

$$|\lambda_k| \geq \frac{|\hat{\lambda}|}{2} =: \delta > 0 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}. \quad (166)$$

Wir definieren

$$v_k := \frac{1}{\lambda_k} u_k \quad (k \in \mathbb{N}). \quad (167)$$

Wegen (166) und  $\|u_k\| = 1$  gilt  $\|v_k\| \leq \frac{1}{\delta}$  ( $k \in \mathbb{N}$ ), d.h.  $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$  ist eine beschränkte Folge. Wegen der Kompaktheit von  $K$  existiert eine Teilfolge  $(v_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$  derart, daß  $(Kv_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$  konvergent ist. Nach (167) (und wegen  $Ku_k = \lambda_k u_k$ ) gilt aber  $Kv_{k_j} = u_{k_j}$ , d.h.  $(u_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$  ist konvergent. Andererseits gilt für  $i \neq j$ :

$$\|u_{k_j} - u_{k_i}\|^2 = \underbrace{\|u_{k_j}\|^2}_{=1} + \underbrace{\|u_{k_i}\|^2}_{=1} - \underbrace{\langle u_{k_j}, u_{k_i} \rangle}_{=0} - \underbrace{\langle u_{k_i}, u_{k_j} \rangle}_{=0} = 2, \text{ ein Widerspruch.}$$

**Zu 5).** Wegen 3), 4) ist nur noch zu zeigen, daß die Menge der Eigenwerte von  $K$  beschränkt ist. In der Tat gilt, falls  $Ku = \lambda u$  für ein  $\lambda \in \mathbb{R}$  und ein  $u \in H \setminus \{0\}$ :

$$|\lambda| = \frac{\|\lambda u\|}{\|u\|} = \frac{\|Ku\|}{\|u\|} \leq \|K\|.$$

□

**Satz 14.3:** Falls  $K \neq 0$ , so existiert ein Eigenwert  $\lambda_1 \neq 0$  mit zugehörigem Eigenelement  $\varphi_1 \in H$ ,  $\|\varphi_1\| = 1$ , so daß gilt

$$|\lambda_1| = \sup \left\{ \frac{|\langle Ku, u \rangle|}{\langle u, u \rangle} : u \in H \setminus \{0\} \right\} \stackrel{14.1}{=} \|K\|.$$

**Beweis:** Nach Lemma 14.1 existiert eine Folge  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $H \setminus \{0\}$  mit

$$\frac{|\langle Ku_n, u_n \rangle|}{\langle u_n, u_n \rangle} \rightarrow \|K\|. \quad (168)$$

O.B.d.A. gelte  $\|u_n\| = 1$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Für eine Teilfolge  $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  liegt dann Konvergenz ohne den Betrag vor:

$$\langle Ku_{n_k}, u_{n_k} \rangle \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \lambda_1 \in \mathbb{R}, \text{ und } |\lambda_1| = \|K\| \text{ wegen (168).}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} \|Ku_{n_k} - \lambda_1 u_{n_k}\|^2 &= \underbrace{\|Ku_{n_k}\|^2}_{\leq \|K\|^2 = \lambda_1^2} - 2\lambda_1 \langle Ku_{n_k}, u_{n_k} \rangle + \lambda_1^2 \\ &\leq 2\lambda_1(\lambda_1 - \langle Ku_{n_k}, u_{n_k} \rangle) \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (169)$$

Da  $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  beschränkt und  $K$  kompakt ist, gibt es eine Teilfolge  $(u_{n_{k_j}})_{j \in \mathbb{N}}$  mit

$$Ku_{n_{k_j}} \rightarrow \omega \in H. \quad (170)$$

Mit (169) folgt daher wegen  $\lambda_1 \neq 0$ :

$$u_{n_{k_j}} \rightarrow \frac{1}{\lambda_1} \omega \quad (171)$$

und somit wegen der Beschränktheit von  $K$ :

$$Ku_{n_{k_j}} \rightarrow \frac{1}{\lambda_1} K\omega.$$

Mit (170) erhalten wir also  $K\omega = \lambda_1 \omega$ . Da (171) insbesondere  $\omega \neq 0$  impliziert (wegen  $\|u_n\| = 1$ ), folgt die Behauptung mit  $\varphi_1 := \frac{\omega}{\|\omega\|}$ .  $\square$

**Satz 14.4:** Falls  $K \neq 0$ , dann existieren endlich oder abzählbar viele Eigenwerte  $\lambda_n \neq 0$  und ein Orthonormalsystem  $(\varphi_n)$  zugehöriger Eigenelemente, so daß gilt

- a)  $|\lambda_n| = \sup \left\{ \frac{|\langle Ku, u \rangle|}{\langle u, u \rangle} : u \in H \setminus \{0\}, \langle u, \varphi_j \rangle = 0 \ (j = 1, \dots, n-1) \right\}$ , sowie  $\lambda_n \rightarrow 0$ , falls unendlich viele existieren.
- b) Für jedes  $v \in \overline{K(H)}$  (Abschluß des Bildes) gilt  $v = \sum \langle v, \varphi_n \rangle \varphi_n$ .
- c) Es gibt kein weiteres Eigenpaar  $(\lambda, \varphi)$  mit  $\lambda \neq 0$  (bis auf Linearkombinationen der Eigenelemente im Fall mehrfacher Eigenwerte).

**Beweis:** Satz 14.3 liefert ein Eigenpaar  $(\lambda_1, \varphi_1)$  mit  $|\lambda_1| = \|K\|$ . Wir setzen  $H_1 := \{u \in H : \langle u, \varphi_1 \rangle = 0\}$ .  $H_1$  ist ein abgeschlossener Unterraum von  $H$  und daher ebenfalls ein separabler Hilbertraum.

$K$  bildet  $H_1$  nach  $H_1$  ab, denn

$$\forall u \in H_1 : \langle Ku, \varphi_1 \rangle = \langle u, K\varphi_1 \rangle = \lambda_1 \langle u, \varphi_1 \rangle = 0.$$

Der Operator  $K_1 := K|_{H_1} : H_1 \rightarrow H_1$  ist offenbar symmetrisch und kompakt. Falls  $K_1 \neq 0$ , existiert nach Satz 14.3 ein Eigenwert  $\lambda_2 \neq 0$  von  $K_1$  (und damit von  $K$ ) mit zugehörigem Eigenelement  $\varphi_2 \in H_1$  (also insbesondere  $\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = 0$ ),  $\|\varphi_2\| = 1$ , und

$$\begin{aligned} |\lambda_2| &= \sup \left\{ \frac{|\langle K_1 u, u \rangle|}{\langle u, u \rangle} : u \in H_1 \setminus \{0\} \right\} \\ &= \sup \left\{ \frac{|\langle Ku, u \rangle|}{\langle u, u \rangle} : u \in H \setminus \{0\}, \langle u, \varphi_1 \rangle = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Wir setzen nun  $H_2 := \{u \in H : \langle u, \varphi_j \rangle = 0 \ (j = 1, 2)\}$  und setzen das Verfahren in offensichtlicher Weise induktiv fort.

Falls  $K_m = 0$  für ein  $m \in \mathbb{N}$ , bricht das Verfahren ab, und wir haben nur endlich viele  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \neq 0$ . Ansonsten erhalten wir eine Folge  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Behauptung a) gilt nach Konstruktion und Satz 14.2 (Teile 3) und 4)).

**Zu b).** Es sei zunächst  $v \in K(H)$ , d.h. es gilt  $v = Ku$  mit einem  $u \in H$ . Wir setzen

$$u_k := u - \sum_{j=1}^k \langle u, \varphi_j \rangle \varphi_j.$$

Dann gilt  $\langle u_k, \varphi_i \rangle = 0$  ( $i = 1, \dots, k$ ) und daher  $u_k \in H_k$ . Falls nur endlich viele  $\lambda_1, \dots, \lambda_m, \varphi_1, \dots, \varphi_m$  aus obiger Konstruktion hervorgegangen sind, so gilt  $K_m = 0$ , also

$$\begin{aligned} 0 &= K_m u_m = K u_m = K u - \sum_{j=1}^m \langle u, \varphi_j \rangle \underbrace{K \varphi_j}_{=\lambda_j \varphi_j} \\ &= v - \sum_{j=1}^m \underbrace{\langle u, \lambda_j \varphi_j \rangle}_{=\langle u, K \varphi_j \rangle = \langle K u, \varphi_j \rangle = \langle v, \varphi_j \rangle} \varphi_j \end{aligned} \quad (172)$$

Falls unendlich viele  $\lambda_n, \varphi_n$  konstruiert wurden, so gilt  $\lambda_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) nach Satz 14.2 (3) und 4)), also  $\|K_n\| = |\lambda_n| \rightarrow 0$  und somit

$$\|K u_k\|_{u_k \in H_k} = \|K_k u_k\| \leq \underbrace{\|K_k\|}_{\rightarrow 0} \underbrace{\|u_k\|}_{\leq \|u\|} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

Andererseits gilt (vgl. die Rechnung in (172))

$$K u_k = v - \sum_{j=1}^k \langle v, \varphi_j \rangle \varphi_j,$$

d.h. es folgt  $v = \sum_{j=1}^{\infty} \langle v, \varphi_j \rangle \varphi_j$ .

Nun sei  $v \in \overline{K(H)}$  und  $\varepsilon > 0$ . Wir wählen ein  $w \in K(H)$  mit  $\|v - w\| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Nach dem oben Gezeigten existiert ein  $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  mit

$$\left\| w - \sum_{j=1}^m \langle w, \varphi_j \rangle \varphi_j \right\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für } m \geq N$$

(bzw. für das *eine* feste  $m$ , falls nur endlich viele  $\lambda_1, \dots, \lambda_m, \varphi_1, \dots, \varphi_m$  konstruiert wurden). Also gilt für diese(s)  $m$ :

$$\begin{aligned} \left\| v - \sum_{j=1}^m \langle v, \varphi_j \rangle \varphi_j \right\| &\stackrel{(137) \text{ in } 10.7}{\leq} \left\| v - \sum_{j=1}^m \langle w, \varphi_j \rangle \varphi_j \right\| \\ &\leq \|v - w\| + \left\| w - \sum_{j=1}^m \langle w, \varphi_j \rangle \varphi_j \right\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

**Zu c).** Sei  $(\lambda, \psi)$  ein weiteres Eigenpaar mit  $\lambda \neq 0$ . Falls  $\lambda \neq \lambda_n$  für alle oben konstruierten  $\lambda_n$ , so gilt  $\langle \psi, \varphi_n \rangle = 0$  für alle  $n$  nach Satz 14.2 (Teil 2)). Andererseits ist  $\psi = \frac{1}{\lambda} K\psi \in K(H)$ , und nach b) gilt daher

$$\psi = \sum \underbrace{\langle \psi, \varphi_n \rangle}_{=0} \varphi_n = 0, \text{ ein Widerspruch.}$$

Falls  $\lambda = \lambda_n$  für ein (oder mehrere)  $n$ : Übung. □

**Korollar 14.5:** Ist  $K(H)$  dicht in  $H$  (also  $\overline{K(H)} = H$ ), so gilt

$$v = \sum \langle v, \varphi_n \rangle \varphi_n \quad \text{für alle } v \in H,$$

d.h.  $(\varphi_n)$  ist eine Orthonormalbasis von  $H$  aus Eigenelementen von  $K$ .

**Bemerkung:** Ist  $K(H)$  dicht in  $H$ , so ist 0 kein Eigenwert von  $K$ , denn ist  $K\psi = 0$ , so gilt  $\langle \psi, \varphi_n \rangle = 0 \quad \forall n$  nach Satz 14.2 (Teil 2)) und daher  $\psi = \sum \langle \psi, \varphi_n \rangle \varphi_n = 0$ .

**Korollar 14.6:** Es gibt eine Orthonormalbasis von  $H$  aus Eigenelementen von  $K$ .

**Beweis:** Es sei  $(\varphi_n)$  das in Satz 14.4 konstruierte Orthonormalsystem aus Eigenelementen. Der Nullraum  $N(K) := \{u \in H : Ku = 0\}$  ist ein abgeschlossener Unterraum von  $H$  (da  $K$  beschränkt ist) und daher ein separabler Hilbertraum. Nach Satz 10.10 existiert also eine Orthonormalbasis  $(\psi_k)$  von  $N(K)$ .

Die Gesamtheit der  $\varphi_n$  und  $\psi_k$  bildet eine Orthonormalbasis von  $H$ , denn: Es gilt  $\langle \varphi_n, \psi_k \rangle = 0 \quad \forall n, k$ , d.h. diese Gesamtheit bildet ein Orthonormalsystem. Zum Nachweis der Vollständigkeit sei  $u \in H$ . Wir setzen

$$\psi := u - \sum \langle u, \varphi_n \rangle \varphi_n.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} K\psi &= Ku - K\left(\sum \langle u, \varphi_n \rangle \varphi_n\right) \underset{K \text{ beschränkt}}{=} Ku - \sum \langle u, \varphi_n \rangle \underbrace{K\varphi_n}_{=\lambda_n \varphi_n} \\ &= Ku - \sum \underbrace{\langle u, \lambda_n \varphi_n \rangle}_{=\langle u, K\varphi_n \rangle = \langle Ku, \varphi_n \rangle} \varphi_n = 0 \quad \text{nach Satz 14.4 b).} \end{aligned}$$

Also ist  $\psi \in N(K)$  und daher  $\psi = \sum \underbrace{\langle \psi, \psi_k \rangle}_{=\langle u, \psi_k \rangle} \psi_k$ , und folglich

$$u = \sum \langle u, \varphi_n \rangle \varphi_n + \sum \langle u, \psi_k \rangle \psi_k.$$

## 15 Symmetrische Eigenwertprobleme mit gewöhnlichen Differentialgleichungen

Es seien  $L$  ein linearer gewöhnlicher Differentialoperator  $n$ -ter Ordnung wie in (50) eingeführt

$$L[u](x) = \sum_{i=0}^n a_i(x)u^{(i)}(x); \quad a_i \in C[a, b]; \quad a_n(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

und  $R_1, \dots, R_n$  lineare Randoperatoren wie in (52).

Wir machen die *Symmetrie-Voraussetzung*

$$\left. \begin{aligned} \int_a^b L[u]\bar{v}dx &= \int_a^b u\overline{L[v]}dx \quad \text{für alle } u, v \in C^n[a, b] \text{ mit} \\ R_1[u] &= \dots = R_n[u] = R_1[v] = \dots = R_n[v] = 0. \end{aligned} \right\} \quad (173)$$

Es wird also verlangt, daß  $L$  beim partiellen Integrieren reproduziert wird, und daß die dabei entstehenden Randterme durch die Randbedingungen zum Verschwinden gebracht werden.

**Beispiel:** *Sturm-Liouville-Operator*

Es seien  $n = 2$ ,  $a_2 \in C^1[a, b]$ ,  $(a_1 := a_2'), a_0 \in C[a, b]$ ,  $a_2, a_0$  reellwertig,

$$\begin{aligned} L[u] &= (a_2 u')' + a_0 u \\ R_1[u] &= \alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a), \quad R_2[u] = \beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) \\ &\text{mit } \alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1 \in \mathbb{R}, (\alpha_0, \alpha_1) \neq (0, 0), (\beta_0, \beta_1) \neq (0, 0). \end{aligned}$$

Nachrechnen zeigt, daß (173) erfüllt ist.

Wir betrachten das *Eigenwertproblem*

$$L[u] = \lambda u \quad (a \leq x \leq b), \quad R_i[u] = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (174)$$

und zeigen:

**Satz 15.1:** *Es existiert eine Orthonormalbasis  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  von  $L^2(a, b)$  aus Eigenfunktionen*

$$\varphi_k \in D := \{u \in C^n[a, b] : R_i[u] = 0 \ (i = 1, \dots, n)\}$$

*des Eigenwertproblems (174). Die zugehörige Eigenwertfolge  $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$  hat keinen endlichen Häufungswert.*

**Beweis:** Wir wählen zunächst ein  $\gamma \in \mathbb{R}$ , welches *kein* Eigenwert von (174) ist.

(Zum Nachweis der Existenz eines solchen  $\gamma$  nehmen wir zum Widerspruch an, daß jedes  $\gamma \in \mathbb{R}$  Eigenwert von (174) ist.  $\varphi_\gamma \in D$  sei eine zu  $\gamma$  gehörige Eigenfunktion mit  $\|\varphi_\gamma\|_2 = 1$  ( $\gamma \in \mathbb{R}$ ). Dann gilt

$$\gamma \langle \varphi_\gamma, \varphi_{\bar{\gamma}} \rangle_{L^2} = \langle L[\varphi_\gamma], \varphi_{\bar{\gamma}} \rangle_{L^2} = \langle \varphi_\gamma, L[\varphi_{\bar{\gamma}}] \rangle_{L^2} = \bar{\gamma} \langle \varphi_\gamma, \varphi_{\bar{\gamma}} \rangle_{L^2},$$

also  $\langle \varphi_\gamma, \varphi_{\tilde{\gamma}} \rangle_{L^2} = 0$  für  $\gamma \neq \tilde{\gamma}$ . Also ist  $(\varphi_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{R}}$  ein überabzählbares Orthonormalsystem, was es in dem *separablen* (hier ohne Beweis) Hilbertraum  $L^2(a, b)$  aber nicht geben kann.)

Also hat die homogene lineare Randwertaufgabe

$$L[u] - \gamma u = 0 \quad (a \leq x \leq b), \quad R_1[u] = \dots = R_n[u] = 0$$

nur die triviale Lösung (denn jede nichttriviale wäre Eigenfunktion zum Eigenwert  $\gamma$ ).

Nach dem Alternativsatz 5.1 besitzt daher die inhomogene Randwertaufgabe

$$L[u] - \gamma u = r \quad (a \leq x \leq b), \quad R_1[u] = \dots = R_n[u] = 0 \quad (175)$$

für jedes  $r \in C[a, b]$  eine eindeutige Lösung, und diese ist nach Satz 6.1 gegeben durch

$$u(x) = \underbrace{\int_a^b G(x, t) r(t) dt}_{=:(K_0 r)(x)} \quad (a \leq x \leq b);$$

dabei ist  $G$  die zu  $(L - \gamma, R_1, \dots, R_n)$  gehörige Greensche Funktion. Dies erklärt einen linearen Operator  $K_0 : C[a, b] \rightarrow D$ . Wir definieren einen linearen Operator

$$K : L^2(a, b) \rightarrow L^2(a, b)$$

durch *dieselbe Vorschrift*:

$$(Kr)(x) := \int_a^b G(x, t) r(t) dt. \quad (176)$$

$K$  hat folgende Eigenschaften:

a)  $K$  ist kompakt.

(Beweisskizze:

- i)  $G$  ist bzgl.  $\|\cdot\|_{L^2((a,b) \times (a,b))}$  durch eine Folge  $(G_j)_{j \in \mathbb{N}}$  von Treppenfunktionen der Form  $G_j(x, t) = \sum_{\nu=1}^{N_j} f_{\nu,j}(x) g_{\nu,j}(t)$  approximierbar.
- ii) Für jedes  $j$  ist der durch  $G_j$  (wie in (176)) definierte Operator  $K_j$  kompakt, da sein Bild endlich-dimensional ist.
- iii) Die Folge  $(K_j)_{j \in \mathbb{N}}$  konvergiert gegen  $K$  bzgl. der Operatornorm (auf dem Raum der beschränkten linearen Operatoren  $L^2(a, b) \rightarrow L^2(a, b)$ ).
- iv) Die Menge der kompakten linearen Operatoren  $L^2(a, b) \rightarrow L^2(a, b)$  bildet einen *abgeschlossenen* Unterraum des Raumes der beschränkten.)

b)  $K$  ist symmetrisch.

(Beweisskizze:

i) Wegen (173) ist  $L - \gamma$  symmetrisch auf  $D$  bzgl.  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$ .

ii) Da  $K_0 r$  die Lösung von (175) ist (für jedes  $r \in C[a, b]$ ), ist  $K_0$  symmetrisch auf  $C[a, b]$  (bzgl.  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$ ).

iii) Da  $C[a, b]$  dicht in  $L^2(a, b)$  ist, ist  $K$  symmetrisch.)

c)  $K(L^2(a, b)) \subset C[a, b]$

(Beweis: Für  $r \in L^2(a, b)$  und  $x, \tilde{x} \in [a, b]$  gilt

$$\begin{aligned} |(Kr)(x) - (Kr)(\tilde{x})| &\stackrel{(176)}{=} \left| \int_a^b [G(x, t) - G(\tilde{x}, t)] r(t) dt \right| \\ &\leq \underbrace{\sqrt{\int_a^b |G(x, t) - G(\tilde{x}, t)|^2 dt}}_{< \varepsilon \text{ für } |x - \tilde{x}| < \delta(\varepsilon) \text{ wegen der Eigenschaften von } G} \cdot \|r\|_{L^2} \end{aligned}$$

d)  $K(L^2(a, b))$  ist dicht in  $L^2(a, b)$ .

(Beweis:  $K(L^2(a, b)) \supset K(C[a, b]) = K_0(C[a, b]) = D \supset C_0^\infty(a, b)$ , und  $C_0^\infty(a, b)$  ist dicht in  $L^2(a, b)$ .)

Nach a), b), d) existiert nach Korollar 14.5 eine Orthonormalbasis  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  von  $L^2(a, b)$  aus Eigenelementen  $\varphi_k \in L^2(a, b)$  von  $K$ ; für die zugehörige Eigenwertfolge  $(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}}$  gilt  $\mu_k \neq 0$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) und  $\mu_k \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ).

Also gilt  $\varphi_k = \frac{1}{\mu_k} K \varphi_k \in C[a, b]$  nach c), und daher  $\varphi_k = \frac{1}{\mu_k} K \varphi_k = \frac{1}{\mu_k} K_0 \varphi_k \in D$  ( $k \in \mathbb{N}$ ).  $\mu_k \varphi_k = K_0 \varphi_k$  ist also Lösung der Randwertaufgabe (175) mit  $r = \varphi_k$ , d.h.

$$\mu_k (L[\varphi_k] - \gamma \varphi_k) = \varphi_k$$

und somit

$$L[\varphi_k] = \underbrace{\left( \frac{1}{\mu_k} + \gamma \right)}_{=: \lambda_k} \varphi_k.$$

Wegen  $\mu_k \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$  hat  $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$  keinen endlichen Häufungswert.  $\square$

### Beispiele:

1) Wir betrachten das Eigenwertproblem aus Kapitel 5:

$$-u'' = \lambda u \quad (0 \leq x \leq 1), \quad u(0) = u(1) = 0. \quad (177)$$

Wir hatten in Kapitel 5 bereits durch explizite Rechnung gezeigt, daß alle Eigenwerte und (bis auf skalare Vielfache) alle Eigenfunktionen gegeben sind durch

$$\lambda_n = n^2 \pi^2, \quad u_n(x) = \sin(n\pi x) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Normieren der Eigenfunktionen auf  $L^2$ -Norm 1 liefert

$$\varphi_n(x) = \sqrt{2} \sin(n\pi x) \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (178)$$

Man zeigt leicht, daß die Symmetrievoraussetzung (173) hier erfüllt ist. Satz 15.1 zeigt somit die Existenz einer Orthonormalbasis von  $L^2(0, 1)$  aus Eigenfunktionen des Problems (177). Da (bis auf Multiplikation mit  $\sigma$  mit  $|\sigma| = 1$ ) *alle* normierten Eigenfunktionen durch (178) gegeben sind, können wir leicht folgern:

$$(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ (mit } \varphi_n \text{ aus (178)) ist eine Orthonormalbasis von } L^2(0, 1). \quad (179)$$

- 2) Betrachten wir in (177) statt der Dirichlet-Randbedingungen die *Neumann-Randbedingungen*

$$u'(0) = u'(1) = 0,$$

so berechnen wir die Eigenwerte und Eigenfunktionen

$$\hat{\lambda}_n = n^2 \pi^2, \quad \hat{\varphi}_n(x) = \begin{cases} 1 & (n = 0) \\ \sqrt{2} \cos(n\pi x) & (n \geq 1) \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

und bekommen aus Satz 15.1, daß auch  $(\hat{\varphi}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Orthonormalbasis von  $L^2(0, 1)$  ist.

- 3) Betrachten wir das Eigenwertproblem mit periodischen Randbedingungen

$$-u'' = \lambda u \quad (-\pi \leq x \leq \pi), \quad u(-\pi) = u(\pi), \quad u'(-\pi) = u'(\pi),$$

so berechnen wir die Eigenwerte und Eigenfunktionen

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_0 &= 0, \quad \hat{\varphi}_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \\ \hat{\lambda}_{2n-1} &= \hat{\lambda}_{2n} = n^2, \quad \hat{\varphi}_{2n-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx), \quad \hat{\varphi}_{2n}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) \quad (n \geq 1). \end{aligned}$$

Da auch hier die Symmetrievoraussetzung (173) erfüllt ist, folgt aus Satz 15.1 wieder:

$$(\hat{\varphi}_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist eine Orthonormalbasis von } L^2(-\pi, \pi).$$

Dies war im Beispiel kurz vor Satz 10.11 noch offen geblieben!

Als weitere *Anwendung* betrachten wir nochmals das Randwertproblem (siehe (61) im Beispiel nach Satz 5.1)

$$-u'' + c(x)u = r(x) \quad (0 \leq x \leq 1), \quad u(0) = \gamma_1, \quad u(1) = \gamma_2, \quad (180)$$

mit  $c, r \in C[0, 1]$ . Wir hatten gezeigt, daß das homogene Problem nur die triviale Lösung besitzt, falls  $c(x) \geq 0$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) gilt, und angemerkt (siehe (63)), daß dies auch unter der schwächeren Bedingung

$$c(x) > -\pi^2 \quad (0 \leq x \leq 1) \quad (181)$$

richtig ist. Das können wir nun beweisen:

Aus (181) folgt mit der Stetigkeit von  $c$  zunächst die Existenz eines  $\delta > 0$  mit

$$c(x) \geq -\pi^2 + \delta \quad (0 \leq x \leq 1). \quad (182)$$

Nun sei  $u \in C^2[0, 1]$  eine Lösung des homogenen Problems (180). Aus (179) folgt mit Satz 10.9 c):

$$\begin{aligned} \int_0^1 (-u'') \bar{u} dx &= \langle -u'', u \rangle_{L^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\langle -u'', \varphi_n \rangle_{L^2}}_{\substack{= \langle u, -\varphi_n'' \rangle_{L^2} = n^2 \pi^2 \langle u, \varphi_n \rangle_{L^2} \\ \text{RB}}} \overline{\langle u, \varphi_n \rangle_{L^2}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \pi^2 |\langle u, \varphi_n \rangle|^2 \geq \pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} |\langle u, \varphi_n \rangle|^2 \\ &= \pi^2 \|u\|_2^2 \end{aligned}$$

und daher mit (182):

$$0 = \int_0^1 (-u'' + c(x)u) \bar{u} dx \geq \pi^2 \|u\|_2^2 + (-\pi^2 + \delta) \|u\|_2^2 = \delta \|u\|_2^2,$$

also  $u = 0$ .

## 16 Separation der Variablen bei einigen elementaren partiellen Differentialgleichungen

Es seien  $L$  ein Differentialoperator wie in (50) und  $R_1, \dots, R_n$  Randoperatoren wie in (52). Es gelte die Symmetrie-Voraussetzung (173). Wir setzen weiter voraus, daß höchstens endlich viele Eigenwerte (gezählt gemäß Vielfachheit) des Problems (174) negativ sind. Ferner sei  $u_0 \in L^2(a, b)$ .

Wir betrachten die *Anfangs-Randwertaufgabe*:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= -L_x[u](x, t) & (a \leq x \leq b, \ 0 < t < \infty), \\ R_{i,x}[u](t) &= 0 & (0 < t < \infty; \ i = 1, \dots, n), \\ u(x, 0) &= u_0(x) & (a \leq x \leq b). \end{aligned} \quad (183)$$

Der Index  $x$  bei  $L$  und  $R_i$  soll dabei andeuten, daß diese Operatoren auf die  $x$ -Variable (und nicht auf die  $t$ -Variable) wirken.

Zur Lösung der Differentialgleichung in (183) machen wir den *Separationsansatz*

$$u(x, t) = v(x)w(t). \quad (184)$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$v(x)w'(t) = -L[v](x)w(t). \quad (185)$$

Unter der (vorläufigen) Annahme, daß  $v$  und  $w$  nullstellenfrei sind, erhalten wir aus (185):

$$\frac{w'(t)}{w(t)} = -\frac{L[v](x)}{v(x)}. \quad (186)$$

Die linke Seite ist eine Funktion nur von  $t$ , die rechte nur von  $x$ . Da (186) für alle  $t$  und  $x$  zu gelten hat, müssen also beide Seiten *konstant* sein. Die Konstante nennen wir  $-\lambda$ :

$$\frac{w'(t)}{w(t)} = -\lambda \quad (0 < t < \infty), \quad -\frac{L[v](x)}{v(x)} = -\lambda \quad (a \leq x \leq b),$$

also

$$w'(t) = -\lambda w(t) \quad (0 < t < \infty), \quad L[v](x) = \lambda v(x) \quad (a \leq x \leq b). \quad (187)$$

Setzen wir den Ansatz (184) ferner in die *Randbedingungen* in (183) ein, erhalten wir

$$w(t)R_i[v] = 0 \quad (0 < t < \infty; i = 1, \dots, n),$$

also mit unserer (vorläufigen) Annahme  $w(t) \neq 0$ :

$$R_i[v] = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (188)$$

Zusammen mit der zweiten Differentialgleichung in (187) erhalten wir also, daß  $\lambda$  Eigenwert und  $v$  zugehörige Eigenfunktion des Problems (174) sein müssen!

Ist nun  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  die von Satz 15.1 gelieferte Orthonormalbasis von  $L^2(a, b)$  aus Eigenfunktionen von (174) und  $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$  die zugehörige Eigenwertfolge, so ist also für jedes  $k \in \mathbb{N}$  eine Lösung von (187), (188) gegeben durch

$$w(t) = e^{-\lambda_k t}, \quad v(x) = \varphi_k(x),$$

woraus wir mit (184) abzählbar viele Lösungen

$$u_k(x, t) = e^{-\lambda_k t} \varphi_k(x) \quad (189)$$

der Differentialgleichung und der Randbedingungen in (183) erhalten. (Die *Anfangsbedingung* in (183) wird dadurch aber i.a. noch *nicht* erfüllt.)

Da Differentialgleichung und Randbedingungen in (183) linear und homogen sind, ist aber auch jede Linearkombination von Lösungen der Form (189) wieder eine Lösung („Superpositionsprinzip“), und bei entsprechender Konvergenz dürfen wir auch unendlich viele (bzw. *alle*) Lösungen der Form (189) in Form einer Reihe linear kombinieren:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k t} \varphi_k(x). \quad (190)$$

In der Tat ist diese Reihe für jedes  $a = (a_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l_2$  konvergent in  $L^2(a, b)$  bei festem  $t \in [0, \infty)$ , denn es gilt für  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $n < m$ , und jedes  $t \in (0, \infty)$ :

$$\left\| \sum_{k=n}^m a_k e^{-\lambda_k t} \varphi_k \right\|_{L^2(a,b)}^2 = \sum_{k=n}^m |a_k|^2 e^{-2\lambda_k t},$$

und die Folge  $(e^{-2\lambda_k t})_{k \in \mathbb{N}}$  ist (bei festem  $t$ ) beschränkt, da höchstens endlich viele der  $\lambda_k$  negativ sind (nach Voraussetzung).

Schließlich versuchen wir  $a = (a_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l_2$  so zu bestimmen, daß  $u$  aus (190) auch die *Anfangsbedingung* in (183) erfüllt. Dazu muß gelten:

$$u_0 \equiv u(\cdot, 0) \stackrel{(190)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k,$$

woraus wir sofort

$$a_k = \langle u_0, \varphi_k \rangle_{L^2} \quad (k \in \mathbb{N})$$

erhalten. Also ist

$$u(\cdot, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle u_0, \varphi_k \rangle_{L^2} e^{-\lambda_k t} \varphi_k \quad (191)$$

ein Kandidat für die Lösung der gesamten Anfangsrandwertaufgabe (183). Es müssen allerdings noch weitere Konvergenzuntersuchungen der Reihe angestellt (und Voraussetzungen gemacht) werden, um die Differenzierbarkeits-eigenschaften von  $u$  aus (191) zu erhalten, die für die Differentialgleichung und die Randbedingungen nötig sind. Auch hier ist wieder eine *schwache* Formulierung des Problems sehr nützlich. Dies wollen wir hier aber weglassen.

Anstelle von (183) können wir auch die folgende Anfangs-Randwertaufgabe betrachten, die zeitlich von *zweiter* Ordnung ist („Schwingungsgleichung“):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) &= -L_x[u](x, t) & (a \leq x \leq b, \ 0 < t < \infty), \\ R_{i,x}[u](t) &= 0 & (0 < t < \infty; \ i = 1, \dots, n), \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) & (a \leq x \leq b). \end{aligned} \quad (192)$$

Hier sind (passend zur *zweiten* zeitlichen Ableitung in der Differentialgleichung)  $u$  und  $\frac{\partial u}{\partial t}$  bei  $t = 0$  vorgegeben, d.h.  $u_0, u_1 \in L^2(a, b)$  sind gegeben. Zur Vereinfachung setzen wir nun voraus, daß alle Eigenwerte von (174) positiv sind.

Wieder machen wir den Separationsansatz (184) und erhalten mit denselben Argumenten wie vorher jetzt:

$$w''(t) = -\lambda w(t) \quad (0 < t < \infty), \quad L[v](x) = \lambda v(x) \quad (a \leq x \leq b) \quad (193)$$

mit einem  $\lambda \in \mathbb{C}$ , sowie die Randbedingungen (188). Wieder ist also  $\lambda$  Eigenwert und  $v$  zugehörige Eigenfunktion von (174), d.h. wir erhalten für jedes  $k \in \mathbb{N}$  eine Lösung von (193), (188):

$$w(t) = a_k \cos(\sqrt{\lambda_k} t) + b_k \sin(\sqrt{\lambda_k} t), \quad v(x) = \varphi_k(x)$$

mit beliebigen  $a_k, b_k \in \mathbb{C}$ . Durch Superposition bekommen wir also nun - bei geeigneter Konvergenz der Reihe - anstelle von (190):

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ a_k \cos(\sqrt{\lambda_k} t) + b_k \sin(\sqrt{\lambda_k} t) \right] \varphi_k(x).$$

Einsetzen in die *Anfangsbedingungen* in (192) liefert die Bedingungen (wobei wir voraussetzen, daß gliedweise Ableitung nach  $t$  erlaubt ist)

$$u_0 \equiv u(\cdot, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k, \quad u_1 \equiv \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sqrt{\lambda_k} \varphi_k,$$

woraus sich sofort

$$a_k = \langle u_0, \varphi_k \rangle_{L^2}, \quad b_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \langle u_1, \varphi_k \rangle_{L^2} \quad (k \in \mathbb{N})$$

ergibt. Wir erhalten also als Lösungskandidaten für die Anfangsrandwertaufgabe (192):

$$u(\cdot, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \langle u_0, \varphi_k \rangle_{L^2} \cos(\sqrt{\lambda_k} t) + \langle u_1, \varphi_k \rangle_{L^2} \frac{\sin(\sqrt{\lambda_k} t)}{\sqrt{\lambda_k}} \right] \varphi_k \quad (194)$$

und wieder müssen Zusatzüberlegungen angestellt (und Voraussetzungen gemacht) werden, um die nötigen Differenzierbarkeitseigenschaften zu bekommen.

**Beispiel:** Wir betrachten nochmals die Anfangsrandwertaufgabe (82), (83), (84) für die schwingende Saite:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (0 \leq x \leq l, \ 0 < t < \infty), \\ u(0, t) &= u(l, t) = 0 & (0 < t < \infty), \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) & (0 \leq x \leq l). \end{aligned}$$

Das Eigenwertproblem (174) lautet hier also

$$-c^2 u'' = \lambda u \quad (0 \leq x \leq l), \quad u(0) = u(l) = 0$$

und hat die (sämtlichen) Eigenwerte und Eigenfunktionen

$$\lambda_k = k^2 \frac{c^2 \pi^2}{l^2}, \quad \varphi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(k\pi \frac{x}{l}\right) \quad (k \in \mathbb{N}),$$

und die „Separationslösung“ (194) lautet hier

$$u(x, t) = \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \left( \int_0^l u_0(s) \sin \left( k\pi \frac{s}{l} \right) ds \right) \cos \left( \frac{k\pi}{l} ct \right) + \right. \\ \left. \frac{l}{k\pi c} \left( \int_0^l u_1(s) \sin \left( k\pi \frac{s}{l} \right) ds \right) \sin \left( \frac{k\pi}{l} ct \right) \right] \sin \left( k\pi \frac{x}{l} \right). \quad (195)$$

Dies ist eine Darstellung der Lösung alternativ zur Lösungsformel (93), die ja nach entsprechender Fortsetzung von  $u_0$  und  $u_1$  auch für das Anfangsrandwertproblem (82), (83), (84) gültig ist. Im Gegensatz zu (93) zeigt (195) aber die Superposition der Saitenschwingungen in *Grundton* ( $k = 1$ ) und *Obertöne* ( $k \geq 2$ ), sowie die Abhängigkeit der Amplituden der jeweiligen Anteile vom Anfangszustand ( $u_0, u_1$ ) der Saite.

Insbesondere erkennen wir: Das Frequenzverhältnis zwischen

- erstem Oberton und Grundton ist  $\frac{2}{1} \hat{=} Oktave$
- zweitem und erstem Oberton ist  $\frac{3}{2} \hat{=} Quinte$
- drittem und zweitem Oberton ist  $\frac{4}{3} \hat{=} Quarte$
- viertem und drittem Oberton ist  $\frac{5}{4} \approx große Terz$
- $\vdots$

## Literatur

- [1] J. Hale, H. Koçak: *Dynamics and Bifurcation*. Springer, 1991.
- [2] H. Heuser: *Funktionalanalysis*. Teubner.
- [3] W. Walter: *Analysis 2*. Springer.
- [4] W. Walter: *Ordinary Differential Equations*. Springer, 1998.
- [5] N. Young: *An Introduction to Hilbert Space*. Cambridge University Press.