

Differentialgleichungen und Hilberträume

Gehört bei Prof. Dr. Weis

KIT - Karlsruher Institut für Technologie

Sommersemester 2012

Mitschriebe ausgearbeitet von

Philipp Basler, Nils Braun, Larissa Bauer

20. Juli 2012

Inhaltsverzeichnis

0	Motivation	7
1	Geometrie der Hilberträume	13
1.1	Definition von Hilberträume	13
1.2	Orthogonalprojektion	18
1.3	Orthonormalsysteme	22
1.4	Schwache Konvergenz und Kompaktheit	32
1.5	Darstellungssatz von Riesz	37
2	Lineare Operatoren auf Hilberträumen	39
2.1	Stetige Operatoren	39
2.2	Abgeschlossene Operatoren	45
2.3	Spektrum linearer Operatoren	49
2.4	Selbstadjungierte Operatoren	56
2.5	Spektralsatz für kompakte selbstadjungierte Operatoren	66
2.6	Funktionalkalkül selbstadjungierter Operatoren	75
2.7	Spektralsatz für allgemeine selbstadjungierte Operatoren	79
2.8	Formen und Operatoren	83
3	Rand und Eigenwertprobleme	91
3.1	Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung	91
3.2	Das Sturm'sche Randwertproblem und seine Green'sche Funktion	102
3.3	Sturm-Liouville Eigenwertproblem	106
3.4	Sobolevräume	115
3.5	Elliptische Differentialgleichungen mit Dirichletrandbedingungen	122
3.6	Eigenwertproblem für selbstadjungierte elliptische Differentialoperatoren	131
4	Evolutionsgleichung	135
4.1	Analysis vektorwertiger Funktionen	135
4.2	Wärmeleitungsgleichung	140

4.3	Schrödingergleichung	146
4.4	Wellengleichung	149
4.5	Evolutionsgleichung für allgemeine selbstadjungierte Operatoren	152

Literatur

- N. Young : An Introduction to Hilbert space, Cambridge
- L. Debnath, P. Miknsinski, Introduction to Hilbert spaces with applications, Academic Press
- J. Weidmann: Hilbertraumtheorie I II (?), Teubner
- D. Werner: Höhere Analysis oder Funktionentheorie , Springer

Kapitel 0

Motivation

0.0.1 Differentialgleichungen

Bisher bekannt

-

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y(t)) \quad y(0) = y_0$$

mit $y : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$

-

$$\frac{dy_1}{dt}(t) = \sum_{j=1}^n a_{1j} y_j(t) \quad y_1(0) = y_{01} \tag{1}$$

$$\vdots \tag{2}$$

$$\frac{dy_n}{dt}(t) = \sum_{j=1}^n a_{nj} y_j(t) \quad y_n(0) = y_{0n} \tag{3}$$

-

$$y'(t) = \nabla^2 y(t) \quad y(0) = y_0$$

mit $y : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Probleme:

- Existenz und Eindeutigkeit in *Funktionenräumen*
- Asymptotik
- Stabilität

0.0.2 Hilberträume

Alte Beispiele sind $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ mit

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i \quad x = (x_i), y = (y_i) \in \mathbb{K}^n$$

Weiterhin gilt

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \quad (e_i)_j = \delta_{ij}$$

$$\langle x, y \rangle = 0 \implies x \perp y$$

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos(\alpha)$$

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

0.0.3 Beispiele

$$l^2 = \left\{ (x_i), x_i \in \mathbb{K} : \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}$$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i \quad x \perp y \iff \langle x, y \rangle = 0$$

$$e_n = (\delta_{nj})_j \quad x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j$$

0.0.4 Beispiele

$$\langle f, g \rangle = \int f(x) \bar{g}(x) \, dx$$

wobei

(a) $f, g \in C(\mathbb{R}^n)$, $\text{supp } f, \text{supp } g$ beschränkt

(b) $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$

(c) $f, g \in L^2(U, \mu)$, (U, μ) Maßraum

0.0.5 Definition Hilbertraum

Ein Hilbertraum ist ein Vektorraum mit

$$V, \langle \cdot, \cdot \rangle$$

und

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$$

ist Hilbertraum falls

$$(V, \|\cdot\|)$$

vollständig ist.

**Definition
Hilber-
traum**

0.0.6 Satz

$$(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$$

sei ein separabler Hilbertraum. Es gibt eine Orthonormalbasis (ONB) (U_n) ($\langle U_n, U_m \rangle = \delta_{mn}$, $\|U_n\| = 1$), so dass alle $x \in H$ eine eindeutige Basisdarstellung haben

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i U_i \quad x_i \in \mathbb{K}$$

mit

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$(x_i) \in l^2 \rightsquigarrow J(x_i) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j U_j$ eine Isometrie

$$l^2 \stackrel{\triangle}{=} H$$

Satz

Diagonalisierung selbstadjungierter Matritzen

$$A \in M(n, n), A^* = A, \langle x, Ax \rangle = \langle Ax, x \rangle$$

Dann gibt es eine ONB $U_j, j = 1, \dots, n$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^n$ mit $Ue_j = U_j, j = 1, \dots, n$

$$UAU^{-1} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

$$AU_j = \lambda_j U_j$$

0.0.7 Satz

Satz

Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum.

$$T : H \rightarrow H, T = T^*, \langle x, Tx \rangle = \langle Tx, x \rangle$$

Weiterhin sei $T(U_H)$ kompakt.

Dann gibt es eine ONB $(U_j), \lambda_j \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, n$ mit

$$T(U_j) = \lambda_j U_j, j \in \mathbb{N}$$

$$T = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_j, \dots)$$

bezüglich (U_j)

$$Tx = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle x, U_j \rangle U_j$$

$$x = \sum_{j=1}^n \langle x, U_j \rangle U_j$$

Beispiele

(a)

$$H = L^2[0, \pi]$$

$$Af = -f'' \quad f \in L^2[0, \pi]$$

$$U_j = \sin(jx), \lambda_j = j^2$$

$$AU_j = j^2 U_j$$

Aber eigentlich

$$T = A^{-1}$$

(b)

$$H = L^2([0, \pi]^2)$$

$$Af = \nabla^2 f, \nabla^2 f(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f$$

$$f \in L^2([0, \pi]^2)$$

$$T = A^{-1}$$

$$U_{n,m}(x, y) = \sin(nx) \sin(my), \lambda_{nm} = n^2 + m^2, n, m \in \mathbb{N}$$

$$\nabla^2 \vartheta_{n,m} = (n^2 + m^2) \vartheta_{n,m}$$

(c)

$$H = L^2(\mathbb{R})$$

$$Af(x) = f''(x) - xf'(x)$$

$$f \in L^2(\mathbb{R}), T = A^{-1}$$

$$\vartheta_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!}} \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \left(\frac{d^n}{dx^n} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right) \cdots$$

$$A\vartheta_n = n\vartheta_n$$

$$Af = \mu f + g, g \text{ gegeben}$$

Lösung

$$f = (A - \mu)^{-1} g$$

Falls

$$A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \implies (A - \mu)^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1 - \mu}, \dots, \frac{1}{\lambda_n - \mu}\right) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} : \lambda_i \neq \mu$$

$$y'(t) = Ay(t) \quad A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

$$y(t) = \exp(tA)y_0 = \text{diag}(\exp(t\lambda_1), \dots, \exp(t\lambda_n)) y_0$$

Dynamische Systeme

$$y'(t) = f(y(t)), y(0) = y_0$$

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitzstetig.

Lösung $X(t, y_0)$ mit

$$X(S, X(t, y_0)) = X(s + t, y_0), s, t \in \mathbb{R}$$

$$X(t) = \exp(tA)y_0, \exp((t+s)A)y_0 = \exp(sA)\exp(tA)y_0$$

D auf $L_2(0, \pi)$?

$\mathbb{R}^n \rightarrow$ Hilbertraum. Dynamische System

$$A = \nabla^2, A = \frac{d^2}{dx^2} + x^2$$

Kapitel 1

Geometrie der Hilberträume

1.1 Definition von Hilberträume

1.1.1 Definition

V sei ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ mit

$$(i) \quad \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

$$(ii) \quad \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

$$(iii) \quad \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

$$(iv) \quad \langle x, x \rangle > 0 \text{ für } x \neq 0 \text{ Es folgt}$$

$$\langle x, \lambda y \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle$$

Definition

1.1.2 Definition

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ gegeben. Für $x \in V$ definiere

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$$

als die Norm, die von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ erzeugt wird.

Definition

Beispiel

$$\langle f, g \rangle = \int f(x) \overline{g}(x) \, dx \implies \|f(x)\| = \left(\int |f(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

1.1.3 Proposition

(i)

$$\|x\| > 0$$

für $x \neq 0$

(ii)

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$$

(iii)

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

(iv) Außerdem

$$\|\langle x, y \rangle\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Beweis:

iv Sei $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle \lambda y, x \rangle + \langle x, \lambda y \rangle + \langle \lambda y, \lambda y \rangle \\ &= \|x\|^2 + |\lambda|^2 \|y\|^2 + \lambda \overline{\langle x, y \rangle} + \overline{\lambda} \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

Wähle nun

$$\lambda = -\frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2}$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2} - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2} + \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2} \\ |\langle x, y \rangle| &\leq \|x\| \cdot \|y\| \end{aligned}$$

iii

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\ &= \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2\end{aligned}$$

1.1.4 Proposition

(a) Parallelogrammidentität

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

(b) Polarisationsformel $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$$2\langle x, y \rangle = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2$$

Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

$$4\langle x, y \rangle = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2$$

Bemerkung Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum mit gültiger Parallelogrammidentität. Dann gibt es ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ mit

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$$

Beweis:

(a)

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \|y\|^2 \\ \|x - y\|^2 &= \|x\|^2 - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \|y\|^2\end{aligned}$$

(b) Rechnen!

1.1.5 Definition

Definition

Sei H ein Vektorraum und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt mit

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$$

H ist ein Hilbertraum, falls $(H, \|\cdot\|)$ vollständig ist, das heißt zu jeder Cauchyfolge $(x_n) \subset H$ gibt es einen Grenzwert $x \in H$,

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \|x - x_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Cauchyfolge :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : \|x_m - x_n\| \leq \varepsilon \quad \text{für } n, m \geq n_0$$

Beispiel

(a)

$$V = C[0, 1], \langle f, g \rangle = \int f(x) \overline{g}(x) \, dx$$

$V, \langle \cdot, \cdot \rangle$ ist kein Hilbertraum.

(b)

$$V = L^2[a, b], \langle f, g \rangle = \int f(x) \overline{g}(x) \, dx$$

ist ein Hilbertraum.

$$\int |f_n(x) - f_m(x)|^2 \, dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\exists f \in L^2[a, b] : f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$$

Wiederholung: Eine Menge $K \subset H$ ist *konvex*, falls für alle $x, y \in K$ und $t \in (0, 1)$ gilt

$$(1 - t)x + ty \in K$$

1.1.6 Satz Existenz des Elementes bester Approximation

Sei $H, \langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Hilbertraum, $K \subset H$ konvex und abgeschlossen. Dann gibt es genau ein $y_0 \in K$ mit

$$\|x - y_0\| = \inf_{y \in K} \|x - y\|$$

**Satz
Existenz
des Ele-
mentes
besten
Approx-
imation**

Beweis: Falls $x \in K$ setze trivialerweise $y_0 = x$. Sei also $x \notin K$. O.B.d.A. sei $x = 0$ (notfalls verschiebe um $-x$). Setze

$$d = \inf_{y \in K} \|x - y\| = \inf_{y \in K} \|y\|$$

Wähle $y_n \in K$ mit $d = \lim \|y_n\|$. Wir müssen zeigen, dass y_n eine Cauchyfolge ist. Betrachte dazu

$$\left\| \frac{y_n + y_m}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{y_n - y_m}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2} \|y_n\|^2 + \frac{1}{2} \|y_m\|^2 = \alpha_n$$

Dann $\alpha_n \rightarrow \frac{1}{2}d + \frac{1}{2}d = d$ und $\left\| \frac{y_n + y_m}{2} \right\|^2 \leq d$, da $\frac{y_n + y_m}{2} \in K$. Daraus folgt

$$\frac{1}{2} \|y_n - y_m\|^2 = \alpha_n - \left\| \frac{y_n + y_m}{2} \right\|^2 \leq \alpha_n - d \rightarrow 0$$

Also ist y_n eine Cauchyfolge. Da H aber vollständig ist, existiert der Limes y_0 . Da K abgeschlossen ist, muss sogar y_0 in K liegen. Für y_0 gilt auch

$$\|y_0\| = \lim \|y_n\| = d$$

Nun müssen wir noch zeigen, dass y_0 eindeutig ist. Seien also y_0 und y_1 zwei verschiedene Punkte, mit

$$\|y_0\| = \|y_1\| = \inf \|y\|$$

Dann gilt

$$d^2 \leq \left\| \frac{y_0 + y_1}{2} \right\|^2 < \left\| \frac{y_0 + y_1}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{y_0 - y_1}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2} \|y_0\|^2 + \frac{1}{2} \|y_1\|^2 = d^2$$

Dies ist aber ein Widerspruch!

1.2 Orthogonalprojektion

1.2.1 Orthogonalität im $\mathbb{R}^n$

(a) Seien $x, y \in \mathbb{R}^2$, $|x|_2 = |y|_2 = 1$ Wir schreiben x und y in Polarkoordinaten

$$x = (\cos \alpha, \sin \alpha) \quad y = (\cos \beta, \sin \beta)$$

Dann ist

$$\langle x, y \rangle = \cos(\alpha - \beta)$$

Vor allem ist

$$\langle x, y \rangle = 0 \iff \cos(\alpha - \beta) = 0 \iff \alpha - \beta = \pi/2 \iff x \perp y$$

(b) Für allgemeine $x, y \in \mathbb{R}^2$ betrachte einfach

$$\left\langle \frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|} \right\rangle = \cos(\alpha - \beta)$$

Daraus lässt sich wieder folgern, dass $\langle x, y \rangle = 0 \iff x \perp y$, da

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cos(\alpha - \beta)$$

(c) Jetzt ein Schritt allgemeiner $x, y \in \mathbb{R}^n$. Setze

$$L = \text{span}(x, y) \hat{=} \mathbb{R}^2$$

mit x, y linear unabhängig. Auch hier gilt

$$\langle x, y \rangle = 0 \iff x \perp y$$

(Wähle eine ONB $u_1, \dots, u_n$ mit $\text{span}(u_1, u_2) = L$)

Daraus wollen wir jetzt die Eigenschaften der Orthogonalität in H ableiten.

1.2.2 Definition

Definition

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Vektorraum mit Skalarprodukt. Wir setzen x, y sind orthogonal genau dann wenn $\langle x, y \rangle = 0$

1.2.3 Proposition (Phytagoras)

Sei V wie oben. Für $x_1, \dots, x_n \in V$ paarweise orthogonal, gilt

$$\|x_1 + \dots + x_n\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2$$

Beweis: Für $x \perp y$:

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Die Behauptung folgt induktiv.

1.2.4 Beispiel

Setze $H = L^2[-1, 1]$ und $f, g \in H$. Dann bedeutet

$$f \perp g \iff \langle f, g \rangle = 0 \iff \int_{-1}^1 f(t) \overline{g(t)} \, dt = 0$$

Sind f ungerade und g gerade, dann ist das Integral Null und f und g sind orthogonal.

1.2.5 Definition

Sei H ein Hilbertraum mit Skalarprodukt und $U \subset H$. Definiere

$$U^\perp = \{x \in H \mid \langle x, y \rangle = 0 \text{ für } y \in U\}$$

$U^\perp$ ist das orthogonale Komplement von U .

Definition

1.2.6 Bemerkung

- (a) $U^\perp$ ist stets ein abgeschlossener linearer Unterraum
- (b) $U \subset (U^\perp)^\perp$
- (c) $U^\perp = (\overline{\text{span}U})^\perp$
- (d) $x \in U \cap U^\perp \implies x = 0$

Die Beweise sind sofort aus der Definition ersichtlich und dem Leser überlassen.

1.2.7 Theorem

Sei $U \subset H$ ein abgeschlossener linearer Teilraum. Dann gilt:

$$H = U \oplus U^\perp$$

d.h. zu $x \in H$ gibt es $y_0 \in U$ und $y_1 \in U^\perp$ mit $x = y_0 + y_1$ und $y_0 \perp y_1$.

Beweis: Sei $x \in H$. Nach §1 gibt es ein Element bester Approximation y_0 zu x in U d.h.

$$\|x - y_0\| = \inf_{y \in U} \|x - y\|$$

Setze $y_1 = x - y_0$. Wir müssen jetzt zeigen, dass $y_1 \perp y_0$. Dazu sei $y \in U, \lambda \in K$ mit $y_0 + \lambda y \in U$

$$\begin{aligned} \|x + y_0\|^2 &\leq \|x + (y_0 + \lambda y)\|^2 = \langle x - y_0 - \lambda y, x - y_0 - \lambda y \rangle \\ &= \|x - y_0\|^2 - 2\Re[\lambda \langle y, x - y_0 \rangle] + \|\lambda y\|^2 \end{aligned}$$

Vor allem

$$2\Re[\lambda \langle y, x - y_0 \rangle] \leq |\lambda|^2 \|y\|^2$$

Falls $\lambda > 0$ dividiere durch 2λ und $\lambda \rightarrow 0$. Dann

$$\Re \langle y, x - y_0 \rangle \leq 0$$

Falls $\lambda < 0$ folgt

$$\Re \langle y, x - y_0 \rangle \geq 0$$

Falls $\lambda = ir$ oder $\lambda = -ir$ ist

$$\Im \langle y, x - y_0 \rangle = 0$$

Insgesamt folgt also

$$\langle y, x - y_0 \rangle = 0 \implies y_1 = x - y_0 \in U^\perp$$

Die Eindeutigkeit folgt direkt: Setze $x = y_0 + y_1$ $x = \tilde{y}_0 + \tilde{y}_1$ Dann ist

$$y_0 - \tilde{y}_0 = \tilde{y}_1 - y_1 \in U^\perp \cap U$$

Daraus folgt aber sofort

$$y_0 = \tilde{y}_0 \quad y_1 = \tilde{y}_1$$

1.2.8 Korollar

Für $U \subset H$ gilt $\overline{\text{span}}U = (U^\perp)^\perp$. Der Beweis wird in der Übung vollbracht.

1.2.9 Definition

Sei $U \subset H$ ein abgeschlossener linearer Teilraum. Die Abbildung $P : H \rightarrow U$ mit $Px = y_0$ mit y_0 dem Element bester Approximation von x in U und $x = y_0 + y_1$, $y_0 \in U$, $y_1 \in U^\perp$ heißt Orthogonalprojektion von H auf U .

Definition

1.2.10 Proposition

- (a) $P_U^2 = P_U$. P_U linear.
- (b) Das Bild von P_U ist ganz U . Der Kern ist $U^\perp$.
- (c) $I - P_U = P_{U^\perp}$
- (d) $\|P_U x\| \leq \|x\|$ für alle $x \in H$
- (e) $\langle y, P_U x \rangle = \langle P_U y, x \rangle$ für $x, y \in H$
- (f) $\langle P_U x, y \rangle \geq 0$ für $x \in H$

Beweis:

- (a) $P_U x = y_0 \in U$, $y_0 = y_0 + 0$, $P_U(P_U x) = y_0 = P_U(x)$ und $x = y_0 + y_1$, $\tilde{x} = \tilde{y}_0 + \tilde{y}_1 \implies x + \tilde{x} = (y_0 + \tilde{y}_0) + (y_1 + \tilde{y}_1)$ und daraus die Linearität.
- (b) Klar
- (c) Klar
- (d) $\|x\|^2 = \|y_0\|^2 + \|y_1\|^2 \geq \|y_0\|^2 = \|P_U x\|^2$
- (e) $\langle y, P_U x \rangle = \langle P_U y + P_{U^\perp} y, P_U x \rangle = \langle P_U y, P_U x \rangle + \underbrace{\langle P_{U^\perp} y, P_U x \rangle}_{=0}$. Analog für $\langle P_U x, y \rangle$.
- (f) Genauso

$$\langle P_U x, x \rangle = \langle P_U x, P_U x \rangle \geq 0$$

1.2.11 Beispiel

- Sei $H = L^2(\Omega, \Sigma, P)$ und (Ω, Σ, P) ein W-Raum. Sei $F \subset \Sigma$ eine Untersigmaalgebra. Dann

$$U = L^2(\Omega, F, P) \subset L^2(\Omega, \Sigma, P)$$

Dann existiert eine Orthogonalprojektion P_U . Wie sieht diese jetzt aus? Betrachte dazu $f \in L^2(\Omega, \Sigma, P)$ und $A \in F$. Dann

$$\int_A P_U f \, dP = \langle \chi_A, P_U f \rangle = \langle P_U \chi_A, f \rangle = \langle \chi_A, f \rangle = \int_A f \, dP$$

Wir sehen

$$P_U f = E[f \mid F]$$

- $\Omega = [0, 1]^2, H = L^2([0, 1]^2, \mu), \mu$ ist Lebesgue Maß.
 $U = \{f \in L^2([0, 1]^2) : f(t, s) = g(t) \text{ mit } g \in L^2([0, 1]^2)\} = L^2([0, 1]^2, \{ \} , \{ = \{B \times [0, 1], B \subset [0, 1], \text{Borel}\} \}$
 $P_U f(t, s) = \int_0^1 f(t, u) \, du$ für alle $s \in [0, 1]$.

1.3 Orthonormalsysteme

1.3.1 Definition

Definition

Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum. Eine Folge $(h_n)_n$ heißt Orthogonalsystem, falls $\langle h_n, h_m \rangle = 0$ für $n \neq m$, und ein Orthonormalsystem falls zusätzlich $\|h_n\| = 1$ gilt. Ein Orthogonalsystem (ONS) heißt vollständig, falls $\overline{\text{span}}(h_n) = H$. Ein vollständiges ONS heißt Orthonormalbasis (ONB) von H .

1.3.2 Beispiel

Sei $H = l_2$ und $e_n = (\delta_{nj})_j, n \in \mathbb{N}$ die Einheitsvektoren.

Für $x = (a_n) \in l_2$ gilt

$$\begin{aligned} x &= \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n e_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x, e_n \rangle e_n \\ \langle x, e_n \rangle &= a_n \\ \|x\|^2 &= \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle x, e_n \rangle|^2 \end{aligned}$$

Sei nun $y = (b_n) \in l_2$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \cdot \bar{b}_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x, e_n \rangle \overline{\langle y, e_n \rangle}$$

1.3.3 Satz

Sei (h_n) ein Orthonormalsystem in H . Für $U = \overline{\text{span}}(h_n) \subset H$ gilt

$$P_U x = \sum_n \langle x, h_n \rangle h_n$$

und

$$\|P_U x\|^2 = \sum_n |\langle x, h_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

Dies wird auch die *Bessel'sche Ungleichung* genannt.

Satz

Beweis:

(a) Sei J endlich.

$$U_J = \overline{\text{span}}\{h_j, j \in J\}$$

Für $x \in H$ setze

$$y_0 := \sum_{j \in J} \langle x, h_j \rangle h_j \quad y_1 := x - y_0$$

Zu Zeigen:

$$y_1 \perp U_J$$

, denn

$$\begin{aligned}
\langle y_1, h_j \rangle &= \langle x, h_j \rangle - \left\langle \sum_{m \in J} \langle x, h_m \rangle h_m, h_j \right\rangle \\
&= \langle x, h_j \rangle - \sum_{m \in J} \langle x, h_m \rangle \underbrace{\langle h_m, h_j \rangle}_{\delta_{mj}} \\
&= \langle x, h_j \rangle - \langle x, h_j \rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

Also: $x = y_0 + y_1$ mit $y_0 \in U_j, y_1 \in U_j^\perp$

Also

$$P_{u_J}(x) = y_0 = \sum_{j \in J} \langle x, h_j \rangle h_j$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in J} |\langle x, h_j \rangle|^2 &\stackrel{\|h_j\|=1}{=} \sum_{j \in J} \|\langle x, h_j \rangle h_j\|^2 \\
&\stackrel{\text{Phytagoras}}{=} \left\| \sum_{j \in J} \langle x, h_j \rangle h_j \right\|^2 \\
&= \|P_{u_J} x\|^2 \\
&\leq \|x\|^2
\end{aligned}$$

Fertig, für J endlich.

(b) J sei nun unendlich.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty} |\langle x, h_j \rangle|^2 &= \sup_m \underbrace{\sum_{j=1}^m |\langle x, h_j \rangle|^2}_{a)} \\
&= \sup_m \|P_{\{h_1, \dots, h_m\}}\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 \\
&< \infty
\end{aligned}$$

$J_m = \{1, \dots, m\}, P_{U_{J_m}} \stackrel{a)}{=} \langle x, h_j \rangle h_j$ ist eine Cauchyfolge in H

Sei nun $n > m$.

$$\begin{aligned}\|P_{U_{J_n}} - P_{U_{J_m}}\|^2 &= \left\| \sum_{j=m+1}^n \langle x, h_j \rangle h_j \right\|^2 \\ &\stackrel{\text{Phytagoras}}{=} \sum_{j=m+1}^n |\langle x, h_j \rangle|^2 \\ &\xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0\end{aligned}$$

Da H vollständig ist

$$\begin{aligned}y &= \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, h_j \rangle h_j \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m \langle x, h_j \rangle h_j \in U\end{aligned}$$

Analog zu a) folgt $y_1 \perp U$.

1.3.4 Korollar

Sei (h_n) eine ONB von H . Dann gilt

$$\overline{\text{span}}(h_n) = H \quad x = \sum_n \langle x, h_n \rangle h_n$$

Die *Parseval'sche Identität* ist

$$\|x\|^2 = \sum_n |\langle x, h_n \rangle|^2$$

Es gilt auch

$$\langle x, y \rangle = \sum_n \langle x, h_n \rangle \overline{\langle y, h_n \rangle}$$

Beweis: Da $\overline{\text{span}}(h_j) = H$, $P_{\overline{\text{span}}} = Id_H$.

$$x = \sum_{j \in J} \langle x, h_j \rangle h_j, y = \sum_{j \in J} \langle y, h_j \rangle h_j, x, y \in H$$

$$\begin{aligned}
\langle x, y \rangle &= \left\langle \sum_j \langle x, h_j \rangle h_j, \sum_k \langle y, h_k \rangle h_k \right\rangle \\
&= \sum_{j,k} \langle x, h_j \rangle \overline{\langle x, h_j \rangle} \underbrace{\langle h_j, h_k \rangle}_{\delta_{jk}} \\
&= \sum_j \langle x, h_j \rangle \overline{\langle y, h_j \rangle}
\end{aligned}$$

1.3.5 Korollar

Sei (h_j) eine ONB von H . Dann $\sum_{j \in J} a_j h_j$ konvergiert in H genau dann wenn

$$\sum_{j \in J} |a_j|^2 < \infty$$

Beweis: $x \in H, x_m = \sum_{j=1}^m a_j h_j, \langle x_m, h_j \rangle = \begin{cases} a_j & j \leq m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$. Da (x_m) eine Cauchyfolge ist gilt

$$\begin{aligned}
\|x_n - x_m\|^2 &= \sum_{j=m+1}^n |a_j|^2 \\
&= \sum_{j=m+1}^n |\langle x, h_j \rangle|^2 \\
&< \infty
\end{aligned}$$

Nach 3.3 folgt x_m konvergiert $\iff \sum |\langle x, h_j \rangle|^2 < \infty \iff \sum |a_j|^2 < \infty$

1.3.6 Korollar

Ein Orthonormalsystem $(h_j)_{j \in J} \subset H$ ist vollständig in H , genau dann wenn

$$x \in H \text{ mit } \langle x, h_j \rangle = 0 \text{ für alle } j \in J \implies x = 0$$

Beweis: Vor:

$$\begin{aligned}
\{h_j, j \in J\}^\perp &= \{0\} \\
\overline{\text{span}}(h_j) &= (\{h_j, j \in J\}^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = H
\end{aligned}$$

1.3.7 Beispiel

$H = L^2(\Omega, \Sigma, P)$ (Ω, Σ, P) – Wahrscheinlichkeitsraum

$\Omega = [0, 1], \Sigma = \text{Lebesgue}, P = \text{Lebesguemaß}$

Nehme eine Partition $U_j, j = 1, \dots, n$ von Ω :

$$\Omega = \bigcup_{j=1}^n U_j, U_j \cap U_k \neq \emptyset, j \neq k, U_j \in \Sigma, P(U_j) > 0$$

$$h_j = \frac{1}{(P(U_j))^{\frac{1}{2}}} \chi_{U_j}, \|h_j\|_{L^2} = 1, G = \overline{\text{span}}\{h_j, j = 1, \dots, n\}$$

h_j ist ein ONS in H .

$$\begin{aligned} P_G f &= \sum_{j=1}^n \langle f, h_j \rangle h_j \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{P(U_j)} \int_{U_j} f(\omega) dP(\omega) \\ &= E[f | \sigma(U_1, \dots, U_n)] \end{aligned}$$

1.3.8 Beispiele

$H = L^2[0, 1]$. Rademacherfunktionen.

TODO: [

Bild 2012-04-23-1 einfügen]

$$r_n(t) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \chi_{\left[\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}\right]}(t)$$

Behauptung: (r_n) ist ein ONS in $L^2[0, 1]$, d.h. nach 3.3,3.5

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n \right\|_{L^2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Beweis: Sei nun $n > m$

$$\begin{aligned}
 \langle r_m, r_n \rangle &= \int_0^1 r_m(t) r_n(t) \, dt \\
 &= \sum_{j=1}^{2^m} \int_{\frac{j-1}{2^m}}^{\frac{j}{2^m}} r_m(t) \underbrace{r_n(t)}_{(-1)^{j-1}} \, dt \\
 &= \sum_{j=1}^{2^m} (-1)^{j-1} \int_{\frac{j-1}{2^m}}^{\frac{j}{2^m}} r_m(t) \, dt \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

1.3.9 Beispiel Fourierreihen

Sei nun $H = L^2([-\pi, \pi]), \mathbb{K} = \mathbb{C}$.

$$h_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(int) \quad n \in \mathbb{Z}$$

Behauptung (h_n) sind ONB von $L^2([-\pi, \pi])$, d.h.

$$f \in L^2([-\pi, \pi]) : f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(int)$$

konvergiert in $L^2([-\pi, \pi])$

$$\|f\|_{L^2}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 \quad \hat{f}(n) = \langle f, h_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \exp(-int) \, dt$$

Zu Zeigen: (h_n) ist eine ONB.

Sei $n \neq m$

$$\begin{aligned}\langle h_n, h_m \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(int) \exp(-imt) \, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(i(n-m)t) \, dt \\ &= \frac{1}{2\pi(n-m)i} [\exp(i(n-m)t)]_{-\pi}^{\pi} = 0\end{aligned}$$

Zu Zeigen (h_n) vollständig, Idee

$$S_n(f) = \sum_{j=-n}^n \hat{f}(j) \exp(ijt) \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

Betrachte $\frac{1}{N} \left(\sum_{n=1}^N S_n \right) \rightarrow f$ in $L_2([-\pi, \pi])$.

Vollständiger Beweis ist zu finden im Analysis 3 Skript von Herrn Weis.

1.3.10 Beispiel Trigonometrische Reihen

$$H = L^2[-\pi, \pi]$$

$$S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{2\pi}}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Behauptung: S ist eine ONB von $L^2[-\pi, \pi]$.

Beweisidee: Orthogonalität:

$$2 \cos(nx) \cdot \cos(mx) = \cos((n+m)x) + \cos((n-m)x)$$

$$2 \sin(nx) \sin(mx) = \cos((n-m)x) - \cos((n+m)x)$$

$$2 \cos(nx) \sin(mx) = \sin((n+m)x) - \sin((n-m)x)$$

Mit

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) \, dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx) \, dx = 2\pi \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx) \, dx$$

Daraus folgt

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) \, dx = 2\pi$$

Für die Vollständigkeit nutze den letzten Fall und

$$\exp(int) = \cos(nt) + i \sin(nt)$$

1.3.11 Gram-Schmidt Verfahren

Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum. Gegeben sei eine linear unabhängige Folge $(y_n) \subset H$ mit

$$y_{n+1} \notin \text{span}(y_1, \dots, y_n)$$

und

$$\overline{\text{span}}(y_n) = H$$

Daraus lässt sich jetzt eine ONB konstruieren:

(i) Setze

$$h_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|}$$

und damit

$$U_1 = \text{spqn}(h_1) = \text{spqn}(y_1)$$

(ii) Setze

$$\tilde{h}_2 = y_2 - P_{U_1}(y_2) = y_2 - \langle y_2, h_1 \rangle h_1$$

Dann ist $\tilde{h}_2 \perp h_1$ und

$$h_2 = \frac{\tilde{h}_2}{\|\tilde{h}_2\|}$$

(iii) Induktiv seien $h_1, \dots, h_n$ bereits gewählt mit

$$\|h_j\| = 1 \quad h_i \perp h_j \quad k \neq j \quad U_n = \text{spn}(h_1, \dots, h_n)$$

Dann setze

$$\tilde{h}_{n+1} = y_{n+1} - P_{U_n}(y_{n+1}) = y_{n+1} - \sum_{j=1}^n \langle y_{n+1}, h_j \rangle h_j$$

und analog h_{n+1} als das normalisierte $\tilde{h}_{n+1}$.

(iv) Da $\overline{\text{span}}(y_n) = H$ folgt $\overline{\text{span}}(h_n) = H$ und damit sind die h_n eine ONB von H .

1.3.12 Beispiel

Setze $H = L^2[-1, 1]$ und $y_i(t) = t^j$ für $j = 0, 1, \dots$. Anwendung von Gram-Schmidt auf diese (y_j) ergibt

$$P_0(x) = 1, L_n(x) = \frac{\sqrt{n + \frac{1}{2}}}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

1.3.13 Satz

Jeder separable, unendlichdimensionaler Hilbertraum $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ besitzt eine ONB $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und diese definiert eine bijektive, lineare Abbildung

Satz

$$\Phi : l_2 \rightarrow H, (a_n) \mapsto \phi(a_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n h_n$$

mit

- $\|\Phi(x)\|_H = \|x\|_{l_2}$
- $\langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle_H = \langle x, y \rangle_{l_2}$
- $\Phi(e_n) = h_n$
- $\Phi^{-1}(h) = (\langle h, h : n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$

Beweis: H separabel heißt: Es gibt eine Folge $(y_n) \subset H$ mit $\overline{\text{span}}(y_j) = H$. oBdA sei y_j linear unabhängig. Nach 3.5 konvergiert $\sum a_n h_n$ in H genau dann, wenn $\sum |a_n|^2 < \infty$. Also ist Φ surjektiv. Isometrie:

$$\langle \Phi(a_n), h_n \rangle = \langle \sum a_j h_j, h_n \rangle = \sum a_j \langle h_j, h_n \rangle = a_n$$

Nach Parseval

$$\|x\|^2 = \sum |\langle \Phi(a_n), h_n \rangle|^2 = \sum |a_n|^2$$

Aus der Isometrie folgt dann direkt auch die Bijektivität. Außerdem ist

$$\langle \Phi(a_n), \Phi(b_n) \rangle = \sum \langle \Phi(a_n), h_n \rangle \overline{\langle \Phi(b_n), h_n \rangle} = \sum a_n \overline{b_n} = \langle (a_n), (b_n) \rangle_{l_2}$$

1.4 Schwache Konvergenz und Kompaktheit

1.4.1 Definition

Definition

Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum. Eine Teilmenge $U \subset H$ heißt relativ kompakt, falls jede Folge $(x_n) \subset U$ eine in H normkompakte Teilfolge (x_{n_k}) besitzt. U ist (norm)kompakt, falls U zusätzlich abgeschlossen ist.

1.4.2 Beispiel

- (a) Falls $\dim H < \infty$, dann ist eine Teilmenge $U \subset H$ genau dann relativ kompakt, wenn U beschränkt ist. (denn $H = \mathbb{K}^n, n = \dim H, U \subset \mathbb{K}^n$ und Bolzano-Weierstraß)
- (b) Aber falls $\dim H = \infty$ und (h_n) sei eine ONB von H dann ist für $n \neq m$:

$$\|h_n - h_m\|^2 = \|h_n\|^2 + \|h_m\|^2 = 2$$

Vor allem ist (h_n) keine Cauchy-Folge und besitzt deshalb auch keine konvergente Teilfolge! Also

$$U_H = \{x \mid \|x\|_H \leq 1\}$$

ist nicht relativ kompakt.

1.4.3 Definition

Definition

Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum. Eine Folge $(x_n) \subset H$ konvergiert schwach gegen $x \in H$, falls

$$\langle x - x_n, y \rangle \rightarrow 0$$

für alle $y \in H$. Wir schreiben

$$x_n \xrightarrow{w} x$$

1.4.4 Bemerkung

- (a) Aus Normkonvergenz folgt schwache Konvergenz aber nicht umgekehrt.

Beweis:

$$|\langle x_n - x, y \rangle| \leq \|x_n - x\| \|y\| \rightarrow 0$$

Aber nach 4.2: (h_n) ONB hat keine normkonvergente Teilfolge. Aber für alle $y \in H$ gilt:

$$\langle h_n, y \rangle \rightarrow 0$$

denn

$$\sum |\langle h_n, y \rangle|^2 < \infty$$

Also konvergieren die (h_n) schwach gegen 0 (beachte: die Normen konvergieren nicht!)

(b) Falls $x_n \xrightarrow{W} x$ dann $\liminf \|x_n\| \geq \|x\|$.

Beweis:

$$\|x_n\| \|x\| \geq |\langle x_n, x \rangle| \rightarrow \langle x, x \rangle = \|x\|^2$$

und damit die Behauptung.

(c) Falls $x_n \xrightarrow{W} x$ und $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ folgt wirklich die Normkonvergenz.

Beweis:

$$\langle x_n, x \rangle \rightarrow \langle x, x \rangle = \|x\|^2$$

und

$$\|x_n - x\|^2 = \|x\|^2 - 2\Re\langle x_n, x \rangle + \|x_n\|^2 \rightarrow \|x\|^2 - 2\|x\|^2 + \|x\|^2 = 0$$

1.4.5 Bemerkung

Der schwache Grenzwert einer Folge ist eindeutig bestimmt und $x_n \xrightarrow{W} x, y_n \xrightarrow{W} y$ dann ist auch $x_n + y_n \xrightarrow{W} x + y$.

Beweis: Seien $x, \tilde{x}$ die schwachen Grenzwerte von x_n . Dann gilt für alle $y \in H$:

$$\lim \langle x_n, y \rangle = \langle x, y \rangle = \langle \tilde{x}, y \rangle$$

Und damit

$$\langle \tilde{x} - x, y \rangle = 0$$

Vor allem für $y = \tilde{x} - x$.

1.4.6 Beispiel

Für $H = l_2$ sei

$$x_n = (a_{n1}, \dots) \quad x = (a_1, \dots)$$

Dann ist $x_n \xrightarrow{W} x$ gleichbedeutend mit koordinatenweiser Konvergenz.

1.4.7 Satz

Satz

Sei H ein Hilbertraum mit ONB (h_n) . Dann gilt für $x_n, x \in H$:

$$x_n \xrightarrow{W} x \iff \langle x_n, h_j \rangle \rightarrow \langle x, h_j \rangle$$

für alle $j \in \mathbb{N}$.

Beweis: Hinrichtung klar mit $y = h_j$. Für die Rückrichtung setze für $y \in H$ $y = \sum a_j h_j$ mit $\sum |a_j|^2 < \infty$. Dann

$$|\langle x - x_n, y \rangle| \leq |\langle x - x_n, \sum_{j=1}^N a_j h_j \rangle| + |\langle x - x_n, \sum_{j=N+1}^{\infty} a_j h_j \rangle|$$

Zu $\varepsilon > 0$ wähle N so groß, dass

$$\left\| \sum_{j=N}^{\infty} a_j h_j \right\| \leq \frac{\varepsilon}{\|x\| + \sup \|x_n\|}$$

Zu N wähle n_0 , so dass für $n \geq n_0$ gilt

$$|\langle x - x_n, h_j \rangle| \leq \frac{\varepsilon}{N\|x\|}$$

Insgesamt für $n \geq n_0$:

$$|\langle x - x_n, y \rangle| \leq \sum_{j=1}^N |a_j| \frac{1}{N\|x\|} \varepsilon + \frac{\|x - x_n\|}{\|x\| + \sup \|x_n\|} \varepsilon \leq 2\varepsilon$$

1.4.8 Definition

Eine Menge $U \subset H$ heißt relativ schwach kompakt, falls jede Folge $(x_n) \subset U$ eine Teilfolge besitzt, die schwach gegen ein $x \in H$ konvergiert.

Definition

1.4.9 Satz

Jede beschränkte Teilmenge $U \subset H$ ist relativ schwach kompakt.

Satz

Martin
einfügen

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^N |\alpha_j|^2 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N |\langle x_{n_k}, h_j \rangle|^2 \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \sum_{j=1}^N \langle x_{n_k}, h_j \rangle h_j \right\|^2 \\ &\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k}\|^2 \\ &\leq C < \infty \\ \implies \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|^2 &\leq C < \infty\end{aligned}$$

Nach Korollar 4.6 konvergiert $x = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j h_j \in H$. Außerdem $\langle x, h_j \rangle$.

1.4.10 Satz

Satz

Sei $(h_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine ONB von H .

Notation:

$$P_n x = \sum_{j=1}^n \langle x, h_j \rangle h_j = P_{[h_1, \dots, h_n]} x$$

Dann ist U relativ kompakt (bzgl Norm) genau dann wenn

$$\sup_{x \in U} \|x - P_n x\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (1)$$

oder

$$\sup_{x \in U} \sum_{j=n}^{\infty} |\langle x, h_j \rangle|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (2)$$

Beweis:

$\Rightarrow$ Sei $(x_n) \subset U$ beschränkt. Nach 4.8 gibt es eine Teilfolge $x_{n_k}, x \in H$ mit $x_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{W} x$,
d.h. $\langle x_{n_k}, h_j \rangle \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \langle x, h_j \rangle$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

Zu Zeigen: $y_k = x_{n_k} \rightarrow x$ in $\|\cdot\|$. Nach Voraussetzung gibt zu $\varepsilon > 0$ ein n mit

$$\sup_k \|y_k - P_n y_k\| \leq \varepsilon \quad \|x - P_n x\| \leq \varepsilon$$

Zu n wähle ein k_0 , so dass

$$\begin{aligned} \|P_n y_k - P_n x\|^2 &= \sum_{j=1}^n |\langle y_k - x, h_j \rangle|^2 \\ &\leq \varepsilon^2 \end{aligned}$$

für $k \geq k_0$. Also

$$\|y_k - x\| \leq \underbrace{\|y_k - P_n y_k\|}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{\|P_n y_k - P_n x\|}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{\|P_n x - x\|}_{\leq \varepsilon}$$

(1) $\iff$ ist nur Definition und Bessel.

$\Leftarrow$ Indirekter Beweis

Annahme: U sei relativ kompakt und (1) sei falsch. Da (1) falsch sein soll, gibt es

$\delta > 0$ und eine Folge $(x_n) \subset U$ mit $\|x_n - P_n x\| \geq \delta$ für $n \in \mathbb{N}$. Da U relativ kompakt ist gibt es $(x_{n_k}) \subset (x_n), x \in H$ mit $x_{n_k} \rightarrow x$ in der Norm.

$$\implies \|x_n - P_n x\| \leq \underbrace{\|x_n - x\|}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\|x - P_n x\|}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\|P_n(x - x_n)\|}_{\rightarrow 0}$$

Dies ist ein Widerspruch

1.4.11 Beispiel

$H = l_2, (\delta_n) \in \mathbb{R}$.

$$U = \{(\delta_n a_n) : \sum_j |a_j|^2 \leq 1\}$$

ist kompakt genau dann wenn $\delta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ Also $H = l^2$

1.5 Darstellungssatz von Riesz

1.5.1 Bemerkung

Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum. Für jedes $x \in H$ kann man ein lineares, stetiges Funktional $x' : H \rightarrow \mathbb{K}$ definieren durch

$$x'(y) := \langle y, x \rangle \quad y \in H$$

mit

$$\|x'\| = \sup\{|\langle y, x \rangle| : y \in H, \|y\| = 1\} = \|x\|$$

Beweis: x' linear und stetig:

$$\begin{aligned} |x'(y) - x'(y_n)| &= |\langle y, x \rangle - \langle y_n, x \rangle| \\ &= \langle y - y_n, x \rangle \\ &\leq \|x\| \cdot \underbrace{\|y - y_n\|}_{\rightarrow 0} \end{aligned}$$

Außerdem

$$\begin{aligned} |x'(y)| &\leq |\langle y, x \rangle| \\ &\leq \|x\| \cdot \underbrace{\|y\|}_{\leq 1} \end{aligned}$$

Mit $y = \frac{x}{\|x\|}$

$$|x' \left(\frac{x}{\|x\|} \right)| = \langle x, x \rangle \cdot \frac{1}{\|x\|} = \|x\|$$

1.5.2 Satz

Satz

Zu jedem stetigen, linearen Funktional $x' : H \rightarrow \mathbb{K}$ gibt es genau ein $x \in H$, so dass $x'(y) = \langle y, x \rangle$ und $\sup\{|x'(y)| : \|y\| \leq 1\} = \|x\|$

Beweis: $U = \text{Kern } x'$ linearer und abgeschlossener Unterraum von H mit $\text{codim } U = \dim H/U = 1$

Es gilt $H = U \oplus U^\perp$, $\dim U^\perp = 1$. Wähle ein $x_0 \in U^\perp$, $x_0 \neq 0$ und $x'(x_0) = 1$.

Für $y \in H$ gilt $y = u + \lambda x_0$ mit $u \in U$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $U^\perp = \text{span}(x_0)$. Dann ist

$$x'(x_0) = \underbrace{x'(u)}_{=0} + \lambda \underbrace{x'(x_0)}_{=1} = \lambda$$

Andererseits

$$\langle y, x_0 \rangle = \underbrace{\langle u, x_0 \rangle}_{=0} + \lambda \langle x_0, x_0 \rangle$$

Setze $x = \frac{x_0}{\|x_0\|^2}$. Dann gilt

$$\langle y, x \rangle = \lambda \frac{1}{\|x_0\|^2} \langle x_0, x_0 \rangle = \lambda$$

Also

$$x'(y) = \lambda = \langle y, x \rangle$$

1.5.3 Bemerkung

Sei $H' = \{x' : H \rightarrow \mathbb{K}, \text{ linear, stetig } \}$. Die Abbildung $\phi : H \rightarrow H'$, $\phi(x)(y) = \langle y, x \rangle$ ist bijektiv und $\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$, $\phi(\lambda x) = \bar{\lambda} \phi(x)$.

$\|x\|_H = \sup\{|\phi(x)(y)| : \|y\| \leq 1\}$ Isometrie.

Kapitel 2

Lineare Operatoren auf Hilberträumen

2.1 Stetige Operatoren

2.1.1 Bezeichnung

$(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|)$ seien normierte Räume. $B(X, Y)$ bezeichne den Raum der stetigen, linearen Abbildungen $T : X \rightarrow Y$. $B(X, Y)$ hat eine Vektorraumstruktur: $S, T \in B(X, Y), \lambda \in \mathbb{K}$

$$(S + T)(x) = S(x) + T(x) \quad (\lambda T)(x) = \lambda T(x)$$

Bezeichnung : Für $X = Y$ setze $B(X) = B(X, X)$

2.1.2 Proposition

Für normierte Räume X, Y und ein linearer Operator $T : X \rightarrow Y$ sind äquivalent

- (a) T stetig
- (b) T ist stetig im Punkte 0
- (c) Es gibt ein $M < \infty$ mit $\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X$
- (d) Das Bild der Einheitskugel $U_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ unter T ist beschränkt in Y , d.h. es gibt $M < \infty$ mit $T(U_X) \subset MU_Y$ $U_Y = \{y \in Y : \|y\| \leq 1\}$

Beweis:

a) $\implies$ b) klar

b) $\implies$ c) indirekt. Andernfalls gäbe es zu $n \in \mathbb{N}$ ein x_n mit $\|Tx_n\| \geq n\|x_n\|$. Setze $y_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|} \in X$. Dann folgt $\|y_n\| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ aber $\|Ty_n\| \geq 1, Ty_n \not\rightarrow 0$. Dies ist ein Widerspruch.

$$c) \implies a) \quad x_n \rightarrow x, \|Tx_n - Tx\| = \|T(x_n - x)\| \leq M \underbrace{\|x_n - x\|}_{\rightarrow 0}$$

$$c) \iff d) \quad \|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\| \leq M \implies T(U_x) \subset MU_Y$$

2.1.3 Definition Operatornorm

Sei $T : (X, \|\cdot\|) \rightarrow (Y, \|\cdot\|)$ stetig und linear. Die Norm von T definiert durch

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\}$$

Also

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

2.1.4 Beispiele

(1) X normierter Raum, $Id_X \in B(X)$, $\|Id_X\| = 1$.

(2) Sei H Hilbertraum, U abgeschlossener Teilraum von H . P_U Orthogonalprojektion $\in B(H)$, $\|P_U x\| \leq \|x\|$. $\|P_U\| = 1$

(3) H, G Hilbertraum, $U : H \rightarrow G$ unitär, falls

$$\langle Ux, Uy \rangle_G = \langle x, y \rangle_H \quad \|Ux\|_G = \|x\|_H$$

d.h.

$$\|U\| = 1 \quad \|U^{-1}\| = 1$$

(4) Der Multiplikationsoperator $X = L^2(U, \mu)$, $U \subset \mathbb{R}^n$, μ Lebesguemaß, $m : U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig.

$$Tf(t) = m(t)f(t), t \in U$$

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_{L^2}^2 &= \int_U |m(t)f(t)|^2 \, dt \\
&\leq \sup_{t \in U} |m(t)|^2 \int_U |f(t)|^2 \, dt \\
&= M^2 \|f\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

T ist beschränkt, $T \in B(L^2(U, \mu))$, falls $m : U \rightarrow \mathbb{C}$ beschränkt ist $\|T\| = M$. Bisher : $\|T\| \leq M$.

Wähle $t_n \in U$ mit $|m(t_n)| \rightarrow M$. Wähle $\varepsilon_n > 0$ mit $|m(t)| \geq M - \frac{1}{n}$ für $U(t_n, \varepsilon_n)$. Wähle

$$f_n(t) = \frac{\chi_{U(t_n, \varepsilon_n)}}{\mu(U(t_n, \varepsilon_n))^{\frac{1}{2}}}$$

Also für $t \in U(t_n, \varepsilon)$

$$\|f_n\|_{L^2} = 1 \quad \|Tf_n(t)\| \geq M - \frac{1}{n}$$

Also

$$\|Tf_n\| \rightarrow M \quad \|T\| \leq M$$

(5) *Integraloperatoren nach Hilbert-Schmidt*

$X = L^2(U, \mu)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, Lebesgue. $k(\cdot, \cdot) : U \times U \rightarrow \mathbb{C}$ meßbar.

Annahme:

$$M^2 := \int_U \int_U |k(t, s)|^2 \, dt ds < \infty$$

Insbesondere (nach Fubini)

$$\tilde{k}(t) = \left(\int_U |k(t, s)|^2 \, ds \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

für fast alle $t \in U$.

Für $f \in L^2(U)$ setze

$$Tf(t) = \int_U k(t, s)f(s) \, ds \quad t \in U$$

Behauptung: $Tf \in L^2(U)$ und $T \in B(L^2(U))$ mit $\|T\| \leq M$

Beweis:

$$|Tf(t)| \leq \left(\int |k(t, s)|^2 \, ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |f(s)|^2 \, ds \right)^{\frac{1}{2}}$$

Für $t \in U$

$$\begin{aligned} |Tf(t)| &\leq \tilde{k}(t) \|f\|_{L^2} \\ \int_U |Tf(t)|^2 \, dt &\leq \int_U |\tilde{k}(t)|^2 \, dt \cdot \|f\|_{L^2}^2 \\ \|Tf\|_{L^2} &\leq M \|f\|_{L^2} \\ \|T\| &\leq M \end{aligned}$$

2.1.5 Proposition

Seien X, Y normierte Räume

(a) $\|T\|$ für $T \in B(X, Y)$ definiert eine Norm auf $B(X, Y)$.

(b) $B(X, Y)$ ein Banachraum, falls Y vollständig ist.

(c) $T \in B(X, Y), S \in B(Y)$ gilt

$$\|ST\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$$

Beweis:

(a) z.B. Δ -ungleichung: Für $x \in X, \|x\| \leq 1$

$$\begin{aligned} \|(T + S)(x)\| &\leq \|Tx\|_Y + \|Sx\|_Y \\ &\leq \|T\| + \|S\| \end{aligned}$$

Supremum über x mit $\|x\| \leq 1$:

$$\|T + S\| \leq \|T\| + \|S\|$$

(b) (T_n) sei Cauchyfolge in $B(X, Y)$ Für jedes $x \in X$ gilt

$$\begin{aligned} \|T_n x - T_m x\| &\leq_Y \| \|T_n - T_m\|_{B(X, Y)} \|x\|_X \\ &\xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Also $(T_n x)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge in Y . Da Y vollständig ist $TX = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x$ existiert in Y . Zu $\varepsilon > 0$ ein n_0 , so dass $\|T_n - T_m\| \leq \varepsilon$ für alle $n, m \geq n_0$. Dies liefert

$$\begin{aligned} \|T_n x - T_m x\| &\leq \|T_n - T_m\| \cdot \|x\| \\ &\leq \varepsilon \|x\| \end{aligned}$$

für $n, m \geq n_0$.

m fest, $n \rightarrow \infty$. Dann

$$\|Tx - T_m x\| \leq \varepsilon \|x\| \quad m \geq n_0$$

Also $\|Tx\| \leq \|T_m x\| + \varepsilon$

Supremum über $x \in X$ mit $\|x\| \leq 1$ bilden:

$$\begin{aligned} \|T - T_m\| &\leq \varepsilon \quad m \geq n_0 \\ \|T\| &\leq \|T_m\| + \varepsilon \end{aligned}$$

Also $T \in B(X, Y)$, $\|T - T_m\| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$

(c) Für $\|x\| \leq 1$:

$$\begin{aligned} \|ST(x)\|_Y &= \|S(T(x))\|_Y \\ &\leq \|S\| \cdot \|Tx\|_Y \\ &\leq \|S\| \cdot \|T\| \cdot \underbrace{\|x\|}_{\leq 1} \\ &= \|S\| \cdot \|T\| \end{aligned}$$

2.1.6 Satz Neumann'sche Reihe

Sei X Banachraum und $T \in B(X)$ mit $\|T\| \leq 1$.

Dann hat $Id - T$ eine stetige Inverse und

$$(Id - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$$

Beweis:

$$\|T\| \leq 1 \xrightarrow{1.5c} \|T^n\| \leq \|T\|^n \rightarrow 0$$

Setze $S_m = \sum_{n=0}^m T^n$, S_m ist eine Cauchyfolge in $B(X, Y)$, denn

$$\left\| \sum_{n=k}^m T^n \right\| \leq \sum_{n=k}^m \|T\|^n \xrightarrow{k, m \rightarrow \infty} 0$$

d.h. $S = \sum_{n=0}^{\infty} T^n \in B(X)$ existiert.

$$\begin{aligned} (Id - T)S_m &= S_m(Id - T) \\ &= Id - T^{m+1} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} Id \end{aligned}$$

2.1.7 Proposition: Proposition der stetigen Fortsetzung

Seien X, Y Banachräume, $D \subset X$ dichter, linearer Teilraum, $\overline{D} = X$. Zu einem stetigen, linearen Operator $T : D \rightarrow Y$ gibt es genau eine stetige Fortsetzung $\tilde{T} : X \rightarrow Y$ mit $\|\tilde{T}\| = \|T\|, \tilde{T}|_D = T$.

Beweis: $\|T\| = \sup\{\|Tx\|_Y : \|x\| \leq 1, x \in D\}$. Zu $x \in X$ gibt es eine Folge $x_n \in D$ mit $\|x - x_n\| \rightarrow 0$. Also ist (x_n) eine Cauchyfolge und $\|Tx_n - Tx_m\|_Y \leq \|T\| \cdot \|x_n - x_m\| \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$, d.h. $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge in Y , Y vollständig. $\tilde{T}x = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n)$ existiert also in Y .

Folgende Fragen treten auf: Wohldefiniert?

$D \ni x_n \rightarrow x, D \ni y_n \rightarrow x \implies \|x_n - y_n\| \leq \|x_n - x\| + \|x - y_n\| \rightarrow 0 \implies \|Tx_n - Ty_n\| \rightarrow 0$
 da $T \in B(X, Y) \implies \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Ty_n$
 $\tilde{T}$ ist linear und $\tilde{T}|_D = T$
 $\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1, x \in D\} \leq \sup\{\|\tilde{T}x\| : \|x\| \leq 1, x \in X\} = \|\tilde{T}\|$. Daraus folgt
 $\|\tilde{T}x_n\| \rightarrow \|\tilde{T}x\|$

2.1.8 Beispiel

$$X = L^2(\mathbb{R}^n), D = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), D = L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$$

$$f \in D$$

$$\mathcal{F}f(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-its) f(s) \, ds$$

Bekannt:

$$\|\mathcal{F}f\|_{L^2} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \|f\|_{L^2} \quad f \in D$$

$\mathcal{F} : D \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ beschränkt, Zu $f \in L^2$ wähle $f_n \in D$ mit $\|f - f_n\|_{L^2} \rightarrow 0$ und setze
 $\tilde{\mathcal{F}}f = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}f_n$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Dann $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n), \|\mathcal{F}f\|_{L^2} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \|f\|_{L^2}$

2.2 Abgeschlossene Operatoren

Notation

$X \supset D(A) \rightarrow Y$ linear, X, Y Banachraum, $D(A)$ definiert Bereich von A . Analog auch

$$R(A) = \{Ax \mid x \in D(A)\}$$

ist das Bild von A .

2.2.1 Beispiel

(a) $H = L^2[0, 1], D = \{f \in L^2[0, 1], \text{supp } f \subset [\varepsilon, 1], \varepsilon > 0\}$

$$Af(t) = \frac{1}{t} f(t) \text{ für } f \in D, Af \in L^2$$

$$\text{Aber } f_n = \chi_{[\frac{1}{n}, 1]}, \|f\|_{L^2} \rightarrow 1, \text{ aber } \|Af_n\|_{L^2} = \left(\int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{t^2} \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

(b) $H = L^2[0, 1], D = C^1[0, 1]$ dicht in $L^2[0, 1]$. $Af = if'$ für $f \in D$.

$$\text{Beispiele : } f_\lambda(t) = \exp(-it\lambda) \in D, \|f_\lambda\|_{L^2} = 1, \lambda \in \mathbb{R}$$

$Af_\lambda = \lambda \exp(-it\lambda)$, $\|Af_\lambda\| = |\lambda| \rightarrow \infty$ für $|\lambda| \rightarrow \infty$. A nicht beschränkt auf D . Es gibt *keine* stetige Fortsetzung.

2.2.2 Definition

Sei X ein Banachraum mit $D(A) \xrightarrow{A} X$ linear.

(a) Die Graphennorm von A ist definiert für $x \in D(A)$:

$$\|x\|_A = \|x\|_X + \|Ax\|_X$$

(b) A heißt abgeschlossen, falls $X_A = (D(A), \|\cdot\|_A)$ vollständig ist.

2.2.3 Bemerkung

Die Norm von Ax ist kleiner, also

$$\|Ax\|_X \leq \|x\|_A$$

Das heißt der Operator A mit

$$A : (X_A, \|\cdot\|_A) \rightarrow (X, \|\cdot\|_X)$$

ist stetig (und einen Operator von einem zum anderen Banachraum).

2.2.4 Proposition

Für $X \supset D(A) \xrightarrow{A} X$ linear ist äquivalent:

- (a) X_A ist ein Banachraum (d.h. A ist abgeschlossen).
- (b) $\text{graph} A = \{(x, Ax) \mid x \in D(A)\} \subset X \times X$ ist abgeschlossen in $X \times X$.
- (c) Sei $x_n \in D(A)$ und $x, y \in X$. Falls $x_n \rightarrow x$ in X und $Ax_n \rightarrow y$ in X , dann gilt

$$x \in D(A) \quad Ax = y$$

Beweis:

$a \iff b$ Sei

$$j : X_A \rightarrow X \times X \quad j(x) = (x, Ax)$$

Dann ist

$$\|x\|_A = \|x\|_X + \|Ax\|_X = \|(x, Ax)\|_{X \times X}$$

d.h. j ist eine isometrische Einbettung. Daraus folgt jedoch

X_A ist vollständig $\iff j(X_A)$ in $X \times X$ vollständig $\iff j(X_A)$ ist abgeschlossen in $X \times X$ (da

$b \implies c$ Wähle $x_n \in D(A)$ mit $x_n \rightarrow x \in X$ und $Ax_n \rightarrow y \in X$. Dann gilt

$$(x_n, Ax_n) \rightarrow (x, y)$$

in $X \times X$. Da der Graph von A abgeschlossen ist, muss auch (x, y) im Graphen liegen.

D.h. es muss ein $x_0 \in D(A)$ geben, mit $(x, y) = (x_0, Ax_0)$. Mit der Eindeutigkeit des Limes folgt aber $x = x_0$ und $y = Ax_0$ und damit die Behauptung.

$c \implies a$ Sei x_n eine CF in X_A . Da

$$\|x_n - x_m\|_A = \|x_n - x_m\|_X + \|Ax_n - Ax_m\|_X$$

folgt, dass sowohl x_n als auch Ax_n CF in X sind. Da X vollständig ist, besitzen diese beiden Folgen jeweils einen Grenzwert mit

$$x_n \rightarrow x \quad Ax_n \rightarrow y$$

Aus c) folgt, dass $x \in D(A)$ und $Ax = y$ und damit die Behauptung.

2.2.5 Beispiel

Zurück zu den Beispielen 2.1.

(a) $H = L^2[0, 1]$ mit $Af(t) = \frac{1}{t}f(t)$. Wir hatten gewählt

$$D(A) = \{f \in L^2 \mid \exists \varepsilon > 0 \text{ supp } f \subset [\varepsilon, 1]\}$$

was nicht abgeschlossen ist. Nun ist mit der neuen Norm

$$\|f\|_A = \left(\int |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} + \left(\int_0^1 \left| \frac{f(t)}{t} \right|^2 dt \right)^{1/2}$$

Wähle $f_n(t) = t^2 \chi_{[1/n, 1]} \in D(A)$. Dann konvergiert dies gegen t^2 in L^2 , aber dies liegt nicht mehr in unserem gewählten Definitionsbereich. Deshalb wählen wir ein neues D mit

$$D(A) = \{f \in L^2 \mid \frac{1}{t^2} f(t) \in L^2[0, 1]\}$$

Dann ist A mit dem neuen $D(A)$ abgeschlossen. Denn für $f_n \in D(A)$ mit

$$f_n \rightarrow f \text{ in } L^2 \quad Af_n \rightarrow g \text{ in } L^2$$

Dann gibt es Teilfolgen n_k mit

$$f_{n_k} \rightarrow f \quad \frac{1}{t} f_{n_k} \rightarrow g$$

fast überall. Das bedeutet $1/t f = g$ fast überall. Vor allem muss also $f \in D(A)$ liegen mit $Af(t) = g(t)$. Damit ist A abgeschlossen bezüglich dem neuen Definitionsbereich.

(b) Wir hatten

$$Af = if'$$

mit dem Definitionsbereich $D = C^1$. Damit war A nicht vollständig. Wählen wir jetzt aber nicht die stetig differenzierbaren, sondern die schwach differenzierbaren Funktion als Definitionsbereich, dann ist A damit abgeschlossen (Beweis siehe Übung).

2.2.6 Definition

Sei $D_1 \xrightarrow{A} X$ ein linearer Operator.

Definition

- (a) (D_1, A) ist dicht definiert, wenn D_1 dicht in X bezüglich $\|\cdot\|_X$ ist.
- (b) Sei $D_2 \subset D_1$ ein linearer Unterraum. Dann heißt (D_2, A) eine Einschränkung von (D_1, A) bzw. (D_1, A) eine Erweiterung von (D_2, A) .
- (c) Sei $D_2 \subset D_1$ und D_2 dicht in D_1 bezüglich der Graphennorm $\|\cdot\|_A$. Dann heißt D_2 ein wesentlicher Definitionsbereich von (D_1, A) (engl. core).
- (d) Ist (D_1, A) ein abgeschlossener Operator und $D_2 \subset D_1$ ein wesentlicher Definitionsbereich von (D_1, A) , dann heißt (D_1, A) der Abschluss von (D_2, A) . Begründung:

$$\overline{\{(x, Ax) \mid x \in D_2\}}^{X \times X} = \{(x, Ax) \mid x \in D_1\}$$

2.3 Spektrum linearer Operatoren

Motivation

Wir wollen Gleichungen lösen der Form

$$\lambda x - Ax = y$$

Diesmal betrachten wir aber X als Banachraum, $\lambda \in \mathbb{C}$ und $A \in B(X)$. Frage: Wann hat die Gleichung für alle $y \in X$ eine eindeutige Lösung $x \in X$? Das bedeutet, der Operator $\lambda I - A$ muss bijektiv sein. Dann können wir schreiben

$$x = (\lambda I - A)^{-1}y$$

Diesmal stellen wir aber noch eine weitere Frage. Ist das Problem wohlgestellt? Führen also kleine Änderungen in y nur zu kleinen Änderungen in x ? D.h. $(\lambda I - A)^{-1}$ stetig?

2.3.1 Definition

Definition

Sei X Banachraum und $X \supset D(A) \xrightarrow{A} X$ linear. Dann bezeichnet

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (\lambda I - A) \text{ ist bijektiv und } (\lambda I - A)^{-1} \in B(X)\}$$

die Resolventenmenge von A . Das Spektrum ist das Komplement davon, also

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$$

2.3.2 Beispiele

(a) Sei $\dim X < \infty$, also $X = \mathbb{K}^n$. Dann ist $B(x) = M(n, n)$. In diesem Fall ist

$$\sigma(A) = \{\lambda \mid \text{Eigenwerte von } A\} = \{\lambda \mid \lambda I - A \text{ nicht injektiv}\} = \{\lambda \mid \lambda I - A \text{ nicht surjektiv}\}$$

Vor allem ist das Spektrum endlich und nicht leer.

(b) $X = l^2$ mit e_n die Einheitsvektoren. Sei A der Operator der Rechtsverschiebung mit $A(e_n) = e_{n+1}$. Dann ist A injektiv, aber nicht surjektiv. Analog auch für B also die Linksverschiebung, welcher surjektiv aber nicht injektiv ist. Außerdem

$$\sigma(B) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq 1\} = U_{\mathbb{C}}$$

Jedes λ mit $|\lambda| < 1$ ist ein Eigenwert von B , denn

$$x_\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} e_n \quad (\lambda - B)x_\lambda = 0$$

Auch ist

$$\sigma(A) = U_{\mathbb{C}}$$

aber A besitzt keine Eigenwerte, denn aus $x \in l_2$ und $|\lambda| < 1$ folgt

$$(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots) - (0, x_1, x_2, \dots) = 0$$

und damit $x_1 = x_2 = \dots = 0$.

- (c) Sei $X = L^2[0, 1]$ mit $Af = if'$ und dem Definitionsbereich der schwach differenzierbaren Funktionen. Dann ist für alle $\lambda \in \mathbb{C}$

$$A(e^{-i\lambda t}) = \lambda e^{-i\lambda t}$$

und damit sind alle λ EW. Also

$$\sigma(A|D_1) = \mathbb{C}$$

Wähle jetzt aber eine kleinere Definitionsmenge D_2 , auf der die Funktionen in der Null auch noch Null sein sollen. Dann ist das Spektrum leer!

2.3.3 Definition

Sei X ein Banachraum und A linear mit $\rho(A)$ nicht leer. Die Abbildung R mit

$$\lambda \in \rho(A) \rightarrow R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1} \in B(X)$$

heißt die Resolventenfunktion von A .

Definition

2.3.4 Proposition

Für $\lambda \in \rho(A)$ gilt sogar:

$$R(\lambda, A) : X \rightarrow X_A = (D(A), \|\cdot\|_A)$$

ist ein Isomorphismus. Insbesondere ist A abgeschlossen, falls $\rho(A) \neq \emptyset$.

Beweis: $R(\lambda, A) : X \rightarrow X_A$ ist bijektiv nach Definition für $\lambda \in \rho(A)$. Sei $y_n, y \in X$ mit $y_n \rightarrow y$ in X .

$x_n := R(\lambda, A)y_n \rightarrow x := R(\lambda, A)y$ in X , da $R(\lambda, A) \in B(X)$. Daraus folgt

$$Ax_n - Ax = (A - \lambda)x_n + \lambda x_n - (A - \lambda)x - \lambda x = y_n - y + \lambda(x - x_n)$$

Also : $Ax_n \rightarrow Ax, x_n \rightarrow x$ in $X \implies x_n \rightarrow x$ in X_A .

2.3.5 Bemerkung

Betrachte $X \xrightarrow[\text{Isomorphismus}]{R(\lambda, A)} X_A \subset X$, stetig.

Aber $R(\lambda, A)$ kann in X ein "kleiner" Operator sein, d.h. $U_{X_A} \subset X$ relativ kompakt in $X \implies R(\lambda, A)(U_{X_A})$ ist relativ kompakt in X .

2.3.6 Satz

Satz

Sei X Banachraum, $X \supset D(A) \xrightarrow{A} X$ linear. Dann ist $\rho(A)$ offen in $\mathbb{C}$, genauer

$$\lambda_0 \in \rho(A) \implies U = \left\{ |\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R(\lambda_0, A)\|} \right\} \subset \rho(A)$$

Für $\lambda \in U$ gilt weiter

$$R(\lambda, A) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n \underbrace{R(\lambda_0, A)^{n+1}}_{\in B(X)}$$

Folgerungen

(a) $\sigma(A)$ ist abgeschlossen

(b) Für jedes stetige lineare Funktional $x' : X \rightarrow \mathbb{C}$ gilt für $x \in X$

$$x'(R(\lambda, A)x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n \underbrace{x'(R(\lambda_0, A)^{n+1}x)}_{\in \mathbb{C}}$$

x' ist also holomorph.

Beweis: Sei $\lambda_0 \in \rho(A)$

$$\lambda - A = (\lambda_0 - A) [I - (\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 - A)^{-1}]$$

Für $S := (\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 - A)^{-1}$ gilt $\|S\| < 1$ für $\lambda \in U$. Nach der Neumann'schen Reihe $(I - S)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} S^n$ in $B(X)$.

$$\begin{aligned} (\lambda - A)^{-1} &= (I - S)^{-1}(\lambda_0 - A)^{-1} \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} S^n \right) (\lambda_0 - A)^{-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n R(\lambda_0, A)^{n+1} \end{aligned}$$

2.3.7 Bemerkung

$\sigma(A)$ kann eine beliebige abgeschlossene Teilmenge $S \subset \mathbb{C}$ sein.

Beweis: $X = l^2$. Sei $\lambda_n \in \mathbb{C}$, die dicht liegt in S : $\overline{\{\lambda_n\}} = S$.

$$D(A) = \left\{ (a_n) \in l^2 : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 |\lambda_n|^2 < \infty \right\} \quad A(a_n) = \lambda_n a_n$$

Da $Ae_n = \lambda_n e_n$, $\lambda_n \in \sigma(A)$ folgt $\overline{\{\lambda_n\}} \subset \sigma(A)$. Für $\mu \notin S$ setze $R(\mu)(a_n) = \frac{1}{\mu - \lambda_n} a_n \implies (\mu - A)R(\mu) = Id$.

$$\|R(\mu)\|_{l^2 \rightarrow l^2} = \sup \left| \frac{1}{\mu - \lambda_n} \right| < \infty \implies \sigma(A) = S.$$

2.3.8 Beispiel

$X = L^2(U, \mu)$, $U \in \mathbb{C}$ abgeschlossen, μ Maß.

$m : U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. $D(A) = \{f \in L^2 : m \cdot f \in L^2\}$, $Af(u) = m(u)f(u)$ für $f \in D(A)$.

Dann

$$\sigma(A) = \overline{\{m(u) : u \in U\}} \quad R(\mu, A)f(u) = \frac{1}{\mu - m(u)} f(u), u \in U$$

2.3.9 Satz

Satz

Sei $A \in B(X)$, X Banachraum. Dann ist $\sigma(A)$ kompakt und nicht leer. Außerdem $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|A\|\}$ und für $|\lambda| > \|A\|$ gilt

$$R(\lambda, A) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} A^n$$

Beweis: $\sigma(A)$ abgeschlossen, siehe Satz 3.6. Zu Zeigen:

$$\lambda \in \mathbb{C} : \|\lambda\| > \|A\| \implies \lambda \in \rho(A)$$

Daraus folgt $\sigma(A)$ abgeschlossen und beschränkt und damit kompakt.

$$\lambda - A = \lambda \left[I - \frac{1}{\lambda} A \right]$$

Setze $S = \frac{1}{\lambda} A$

$$\|S\| < 1$$

da $|\lambda| > \|A\|$. Nach Neumann $(I - S)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} S^n \in B(X)$ Also

$$\begin{aligned} (\lambda - A)^{-1} &= \lambda^{-1} [I - S]^{-1} = \lambda^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} S^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} A^n \end{aligned}$$

Zu Zeigen: $\sigma(A) \neq \emptyset$.

Indirekter Beweis: Annahme $\rho(A) = \mathbb{C}$. Wähle $x \in X, x' : X \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und linear.

Dann ist $r(\lambda) = x'(R(\lambda, A)x)$ holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ nach 3.6.

Nach dem Satz von Cauchy gilt

$$\oint_{|\lambda|=2\|A\|} r(\lambda) \, d\lambda = 0$$

$$\begin{aligned}
\oint_{|\lambda|=2\|A\|} r(\lambda) \, d\lambda &= \oint_{|\lambda|=2\|A\|} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n-1} x' (A^n x) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \oint_{|\lambda|=2\|A\|} \lambda^{-n-1} \, d\lambda x' (A^n x)
\end{aligned}$$

Nutze weiterhin

$$\oint_{|\lambda|=2\|A\|} \lambda^{-n-1} \, d\lambda = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ 2\pi i & n = 0 \end{cases}$$

Also

$$\oint_{|\lambda|=2\|A\|} r(\lambda) \, d\lambda = 2\pi i x'(x)$$

Wähle x und x' so, dass $x'(x) \neq 0$. (Funkana)

Falls X ein Hilbertraum, wähle $x'(y) = \langle y, x \rangle$, $x'(x) = \langle x, x \rangle = \|x\|^2 \neq 0$ falls $x \neq 0$. Es folgt der Widerspruch

$$0 = \oint_{|\lambda|=2\|A\|} r(\lambda) \, d\lambda \neq 0$$

nach der letzten Rechnung.

2.3.10 Beispiel

Sei H Hilbertraum und $U : H \rightarrow H$ unitär, d.h. bijektiv, $\|U\| = 1$, $\|U^{-1}\| = 1$.

Behauptung: $\sigma(U) \subset \{\lambda : |\lambda| = 1\}$

Beweis: $\|U - 1\| \geq 1 \implies \sigma(U) \subset \{\lambda : |\lambda| \leq 1\}$

$\|U^{-1} - 1\| \geq 1 \implies \sigma(U^{-1}) \subset \{\lambda : |\lambda| \leq 1\}$

$\sigma(U^{-1}) = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(U)\} \subset \{\lambda : |\lambda| \geq 1\}$

2.3.11 Satz Resolventengleichung

Für $X \supset D(A) \xrightarrow{A} X$ linear, X Banachraum. Für $\lambda, \mu \in \rho(A)$ gilt

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A)$$

. Insbesondere für $\lambda \in \rho(A) : \frac{d}{d\lambda} R(\lambda, A) = -R(\lambda, A)^2$

Im Sinne der komplexen Diffbarkeit

$$\frac{d}{d\lambda} R(\lambda, A) = \lim_{\mu \rightarrow \lambda} \frac{R(\lambda, A) - R(\mu, A)}{\lambda - \mu} \in B(X)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} R(\lambda, A) - R(\mu, A) &= R(\lambda, A) [I - (\lambda - A)R(\mu, A)] \\ &= R(\lambda, A) [(\mu - A) - (\lambda - A)] R(\mu, A) \\ &= R(\lambda, A)(\mu - \lambda)R(\mu, A) \\ \frac{R(\lambda, A) - R(\mu, A)}{\lambda - \mu} &= -R(\lambda, A)R(\mu, A) \xrightarrow{\mu \rightarrow \lambda} -R(\lambda, A)^2 \end{aligned}$$

denn $R(\mu, \lambda) \rightarrow R(\lambda, A)$ für $\mu \rightarrow \lambda$ da die Resolventenfunktion als lokale Potenzreihe stetig ist.

Bemerkung (ohne Beweis)

$$\begin{aligned} R(\lambda, A) &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} A^n & |\lambda| \geq \|A\| \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mu^{n+1} A^n & \mu = \lambda^{-1}, |\mu| < \frac{1}{\|A\|} \end{aligned}$$

Konvergenzradius: $\left[\limsup_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \right]^{-1}$

Behauptung: $\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|A\|$

2.4 Selbstadjungierte Operatoren

2.4.1 Definition

$T \in B(H), (H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, Hilbertraum. T heißt selbstadjungiert, falls

$$\forall x, y \in H \quad \langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$$

Definition

2.4.2 Beispiele

(a) $H = \mathbb{C}^n, A \in M(n, n)$. A selbstadjungiert $\iff A = A^\dagger, A = (a_{ij}) : a_{ij} = \bar{a}_{ji}$

(b) $H = l^2, A(a_n) = (\delta_n a_n)$ ist selbstadjungiert $\iff \delta_n \in \mathbb{R}$, denn

$$\langle A(a_n), b_n \rangle = \sum_n \delta_n a_n \bar{b}_n \stackrel{!}{=} \langle a_n, A(b_n) \rangle = \sum_n a_n \bar{\delta}_n \bar{b}_n$$

Also folgt $\delta_n = \bar{\delta}_n$. Wir wissen: $\sigma(A) = \overline{\{\delta_n\}}$, δ_n ist Eigenwert.

$\lambda \in \overline{\{\delta_n\}} \setminus \{\delta_n\}$, d.h. $\exists n_k \lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \delta_{n_k}$, e_n = Einheitsvektoren in l^2 .

$$\|Ae_{n_k} - \lambda e_{n_k}\| = |\delta_{n_k} - \lambda| \underbrace{\|e_{n_k}\|}_{=1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

λ ist ein *approximativer Eigenwert* und e_{n_k} heißen eine Folge von *approximativen Eigenvektoren* zu λ .

(c) $H = L^2(U, \mu), U \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, μ Maß auf U , $m : U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und beschränkt.

$Af(u) = m(u)f(u), u \in U$. A ist selbstadjungiert $\iff m$ ist reellwertig.

$$\begin{aligned} \langle Af, g \rangle &= \int m(u) f(u) \overline{g(u)} \, d\mu(u) = \int f(u) \overline{m(u) g(u)} \, d\mu(u) \\ &\iff m(u) = \overline{m(u)} \end{aligned}$$

Spezialfall: $U = [0, 1], m(u) = u$

$\sigma(A) = \overline{\{m(u) : u \in [0, 1]\}} = [0, 1]$. Dieses A hat *keine* Eigenwerte, denn $uf(u) = \lambda f(u), u \in [0, 1] \implies f = 0$.

Aber jedes $\lambda \in [0, 1]$ ist ein approximativer Eigenwert mit der Folge $f_n = \sqrt{\frac{n}{2}} \chi_{[\lambda - \frac{1}{n}, \lambda + \frac{1}{n}]}$

als Folge von approximativen Eigenwerten. Es gilt $\|f_n\|_{L^2} = 1$ und

$$\|Af - \lambda f\|_{L^2}^2 = \frac{n}{2} \int_{\lambda - \frac{1}{n}}^{\frac{1}{n} + \lambda} |u - \lambda|^2 \, du \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

(d) $H = L^2(U, \mu)$ Hilbert-Schmidtoperatoren.

$$k : U \times U \rightarrow \mathbb{C}, \int_U \int_U |k(t, s)|^2 \, d\mu(t) d\mu(s) < \infty.$$

$$(kf)(t) = \int_U k(t, s) f(s) \, d\mu(s)$$

Behauptung: K ist selbstadjungiert $\iff k(t, s) = \overline{k(s, t)}$

Beweis:

$$\begin{aligned} \langle Kf, g \rangle &= \int_U Kf(t) \overline{g(t)} \, dt \\ &= \int_U \left(\int_U k(t, s) f(s) \, ds \right) \overline{g(t)} \, dt \\ &= \int_U f(s) \left(\int_U k(t, s) \overline{g(t)} \, dt \right) \, ds \\ \langle f, Kg \rangle &= \int_U f(s) \left(\int_U \overline{k(s, t)} g(t) \, dt \right) \, ds \\ \implies k(t, s) &= \overline{k(s, t)} \end{aligned}$$

2.4.3 Lemma

Für $A \in B(H)$ selbstadjungiert gilt

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x \rangle|$$

Beweis: $m := \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x \rangle|.$

Zu Zeigen : $m \leq \|A\|$, denn für $\|x\| \leq 1$

$$|\langle Ax, x \rangle| \leq \|Ax\| \cdot \|x\| \leq \|A\| \cdot \underbrace{\|x\|^2}_{=1}$$

Zu Zeigen: $m \geq \|A\|$. Sei $x, y \in H$. Mit $\langle Ay, x \rangle = \langle y, Ax \rangle = \overline{\langle Ax, y \rangle}$ gilt :

$$\begin{aligned} \langle A(x \pm y), x \pm y \rangle &= \langle Ax, x \rangle \pm 2\Re\langle Ax, y \rangle + \langle Ay, y \rangle \\ 4\Re\langle Ax, y \rangle &= \langle A(x+y), x+y \rangle - \langle A(x-y), x-y \rangle \\ &\leq m\|x+y\|^2 + m\|x-y\|^2 \\ &= 2m(\|x\|^2 + \|y\|^2) \end{aligned}$$

Ersetze x durch ein geeignetes λx mit $|\lambda| = 1$ ersetze, folgt

$$4|\langle Ax, y \rangle| \leq \frac{m}{2} (\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \\ &= \sup_{\|x\|, \|y\|=1} |\langle Ax, y \rangle| \\ &\leq \frac{m}{2} (1 + 1) \\ &= m \end{aligned}$$

Mit $y = \frac{Ax}{\|Ax\|}$

2.4.4 Lemma

Sei $T \in B(H)$ selbstadjungiert. Der Teilraum $M \subset H$ sei T -invariant, d.h. $T(M) \subset M$. Dann ist auch $M^\perp T$ -invariant, d.h. $T(M^\perp) \subset M^\perp$.

Beweis: Sei $x \in M^\perp$. Für alle $y \in M$ ist $Ty \in M$ und $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle = 0$ für alle $y \in M \implies Tx \in M^\perp$.

2.4.5 Satz

Satz

Sei $T \in B(H)$ selbstadjungiert. Dann ist $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ und

- (a) Für $\lambda = \alpha + i\beta, \beta \neq 0, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt $\|R(\lambda, T)\| \leq \frac{1}{|\beta|}$
- (b) Für $r \in \mathbb{R}$ ist $H = \text{Kern}(r - T) \oplus \overline{\text{Bild}(r - T)}$
- (c) Falls $\lambda \in \sigma(T)$, so ist entweder λ ein Eigenwert oder ein approximativer Eigenwert, d.h. $\exists x_k : \|x_k\| = 1$ und $\|Tx_k - \lambda x_k\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$.
- (d) $\|T\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$

Beweis:

- (a) $\lambda = \alpha + i\beta, \beta \neq 0$

$$\begin{aligned}
 \|(\lambda - T)\|^2 &= \langle (\lambda - T)x, (\lambda - T)x \rangle \\
 \lambda \bar{\lambda} \langle x, x \rangle + \langle Tx, Tx \rangle - \lambda \langle x, Tx \rangle - \bar{\lambda} \langle Tx, x \rangle \\
 &= \langle Tx, Tx \rangle - 2\Re \alpha \langle Tx, x \rangle + \alpha^2 \langle x, x \rangle + \beta^2 \langle x, x \rangle \\
 &= \|(\alpha - T)x\|^2 + \beta^2 \|x\|^2 \\
 &\geq \beta^2 \|x\|^2
 \end{aligned}$$

Also $\lambda - T$ injektiv. Es gibt keine nicht reellen Eigenwerte.

Sei $Tx = \lambda x \implies 0 = \|Tx - \lambda x\| \geq |\beta| \|x\| \implies \|x\| = 0 \implies x = 0$ Zu Zeigen: $\lambda - T$ hat einen abgeschlossenen Bildraum $R(\lambda - T)$.

Beweis: Sei $x_n \in H$ mit $\underbrace{(\lambda - T)x_n}_{\in R(\lambda - T)} \rightarrow y \in H$ in Norm

$$\|(\lambda - T)x_n - (\lambda - T)x_m\|^2 \geq \beta^2 \|x_n - x_m\|^2$$

Da $(\lambda - T)x_n$ eine Cauchyfolge ist, ist auch (x_n) eine Cauchyfolge in H . $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ existiert. $\implies (\lambda - T)x_n \rightarrow (\lambda - T)x$ und $(\lambda - T)x_n \rightarrow y$ liefert $(\lambda - T)x = y \in R(\lambda - T)$. (Bemerkung: Abgeschlossenheit von T wäre gut genug.)

Zu Zeigen :

$$(\lambda - T)(H) = H$$

Falls $(\lambda - T)(H) = \overline{(\lambda - T)(H)} \subsetneq H$ wähle $y \in H, y \neq 0$ mit $(\lambda - T)(H) \perp y$. Für alle $x \in H : 0 = \langle y, (\lambda - T)x \rangle = \langle (\bar{\lambda} - T)y, x \rangle \implies (\bar{\lambda} - T)y = 0 \implies y = 0$. Dies ist ein Widerspruch.

Bemerkung: $\langle (\bar{\lambda} - T)y, x \rangle = 0$ für x aus einer dichten Teilmenge wäre gut genug.

Also:

$$\begin{aligned} \|(\lambda - T)x\| &\geq |\beta| \|x\| \\ \implies \|y\| &\geq \|(\lambda - T)^{-1}y\| |\beta| \quad y = (\lambda - T)x \end{aligned}$$

$$\lambda \in \rho(T) : \|R(\lambda, T)\| \leq \frac{1}{|\beta|}$$

(b) $z \in \text{Kern}(r - T)$ und $(r - T)x \in \text{R}(r - T), r \in \mathbb{R}$
 $\implies \langle z, (r - T)x \rangle = \langle (r - T)z, x \rangle = 0 \implies z \perp \text{R}(r - T)$. Setze $H_r = \text{Kern}(r - T) \oplus \overline{\text{R}(r - T)} \subset H$.

Zu Zeigen: $H_r = H$. Andernfalls $H_r \subsetneq H$, wähle $y \in H_r^\perp \neq \{0\}$.

Für alle $x \in H$:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle y, (r - T)x \rangle \\ &= \langle (r - T)y, x \rangle \\ (r - T)y &= 0 \quad y \in \text{Kern}(r - T) \perp H_r^\perp \\ \implies \langle y, y \rangle &= \|y\|^2 = 0 \implies y = 0 \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch. Also $H_r^\perp = \{0\} \implies H_r = H$.

(c) $\lambda \in \sigma(T) \subset \mathbb{R}$. Nach b):

$$H = \text{Kern}(\lambda - T) \oplus \overline{\text{R}(\lambda - T)}$$

Falls der Kern nicht nur das Nullelement enthält, dann ist λ ein Eigenwert. Falls es nur das Nullelement enthält, dann ist

$$\overline{\text{R}(\lambda - T)} = H$$

Annahme: Es gibt ein $C > 0$ mit

$$\|(\lambda - T)x\| \geq C \|x\|$$

für alle $x \in H$. Dann folgt wie in a), dass $(\lambda - T)(H)$ abgeschlossen ist und $(\lambda -$

$T)(H) = H$. Damit ist $\lambda - T$ bijektiv und

$$\|(\lambda - T)^{-1}\| \leq C$$

nach Annahme. Damit muss aber $\lambda \in \rho(T)$. Dies ist ein Widerspruch. Also ist die Annahme falsch. Das bedeutet es gibt eine Folge x_n mit

$$\|x_n\| = 1$$

und

$$\|(\lambda - T)x_n\| \frac{1}{n} \|x_n\| \rightarrow 0$$

Also ist x_n eine Folge verallgemeinerter Eigenvektoren zu λ .

(d) Es ist

$$\sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(T)\} \leq \|T\|$$

nach §4. Aber nach Lemma 4.3. ist dies gleich

$$\sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x \rangle|$$

Wähle ein $x_n \in H$ mit $\|x_n\| = 1$ und $\langle Tx, Tx \rangle \rightarrow \|T\|$. Dann folgt

$$\|Tx_n - \|T\|x_n\|^2 = \langle Tx_n, Tx_n \rangle - 2\|T\|\langle Tx_n, x_n \rangle + \|T\|^2\|x_n\|^2 \leq \|T\|^2 - 2\|T\|\langle Tx_n, x_n \rangle + \|T\|^2 \rightarrow 0$$

2.4.6 Definition

Sei $H \supset D(A) \xrightarrow{A} H$ linear, $D(A)$ dicht in H . Dann heißt A symmetrisch falls für alle $x, y \in D(A)$ gilt

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$$

2.4.7 Proposition

Für einen symmetrischen Operator A auf H mit $D(A) \xrightarrow{A} H$ gilt:

(a) Für $\lambda = \alpha + i\beta$ mit $\beta \neq 0$ ist $\lambda - A$ injektiv auf $D(A)$ und $R(\lambda - A)$ ist abgeschlossen

in H und

$$\|(\lambda - A)x\| \geq \frac{1}{|\beta|} \|x\|$$

für alle $x \in D(A)$.

(b) Für $r \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\text{Kern}(r - A) \oplus \overline{R(r - A)}$$

orthogonal

Beweis: Wiederhole die Argumente im Beweis von 4.4.

Was fehlt sind die Surjektivität und dass die Summe genau den Hilbertraum ergibt. Betrachte aber dieses Beispiel, in dem ich viele verschiedene Definitionsbereiche wählen kann:

$$H = L^2[0, 1] \quad A = i \frac{d}{dt} \quad D(A) = C_0^\infty(0, 1) \quad D(A) = \{f \in H^{1,2}(0, 1) \mid f(0) = f(1) = 0\} \dots$$

2.4.8 Definition Adjungierter Operator

Sei A symmetrisch auf H . Sei

$$D^* = \{x \in H \mid \exists y \in H \forall z \in D(A) \langle Az, x \rangle = \langle z, y \rangle\}$$

Dann definiere

$$A^*x = y \quad x \in D^*$$

als den zu A adjungierten Operator A^*

**Definition
Adjun-
gierter
Operator**

Bemerkungen: Es ist $D(A) \subset D^*$, denn für $x \in D(A)$ gilt

$$\langle Ax, z \rangle = \langle x, Az \rangle$$

für alle $z \in D(A)$. Also ist A^* eine symmetrische Erweiterung von A , denn für $x \in D(A)$ gilt

$$Ax = A^*x$$

Man kann D^* auch anders schreiben als

$$D^* = \{x \in H \mid \exists C < \infty \text{ mit } |\langle Az, x \rangle| \leq C \|z\|_H \text{ für alle } z \in D(A)\}$$

denn für $x'(z) = \langle Az, x \rangle$ gilt

$$|x'(z)| \leq C \|z\|_H$$

für $x \in D^*$. Also ist x' ein stetiges und lineares Funktional auf H . Nach dem Rieszschen Darstellungssatz (letzter Paragraph in Kapitel 1) gibt es ein $y \in H$ mit

$$x'(z) = \langle z, y \rangle$$

2.4.9 Definition selbstadjungiert

Der symmetrische Operator A heißt selbstadjungiert, falls $A = A^*$, d.h. $D(A) = D^*$.

Definition
selbstad-
jungiert

2.4.10 Satz

Für einen symmetrischen Operator A sind äquivalent

Satz

- (a) A ist selbstadjungiert
- (b) Es gibt ein $\lambda \in \mathbb{C}$, so dass $\lambda - A$ und $\bar{\lambda} - A$ beide surjektiv (auf H) sind.
- (c) $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$
- (d) Für jedes $r \in \mathbb{R}$ ist

$$\text{Kern } A \oplus \overline{R(\lambda - A)} = H$$

- (e) $\lambda \in \sigma(A)$ ist ein Eigenwert von A (falls $\text{Kern}(\lambda - A) \neq \{0\}$) oder ein verallgemeinerter Eigenwert.

Beweis: Aus 4.7 wissen wir bereits $\lambda - A, \bar{\lambda} - A$ sind injektiv und haben beide ein abgeschlossenes Bild.

a auf c noch z.z.: für $\lambda \notin \mathbb{R}$ hat $\lambda - A$ eine stetige Inverse, also $\lambda - A$ surjektiv. Wähle also $x \in R(\lambda - A)^\perp$. Dann gilt für alle $z \in D(A)$:

$$|\langle x, Az \rangle| = |\langle x, Az - \lambda z \rangle + \langle x, \lambda z \rangle| = 0 + |\langle x, \lambda z \rangle| \leq \|x\| |\lambda| \|z\|$$

Also ist x in D^* . Nach a) ist aber $D^* = D$. Dann gilt weiter für alle $z \in D(A)$:

$$\langle Ax - \bar{\lambda}x - z \rangle = \langle x, (A - \lambda)z \rangle = 0$$

Da $D(A)$ dicht in H folgt

$$Ax - \bar{\lambda}x = 0$$

und damit x im Kern von $A - \bar{\lambda}$, welcher aber nur die Null enthält.

c auf b trivial

b auf a z.z. $D^* \subset D(A)$. Sei $x \in D^*$. Da $\lambda - A$ surjektiv, gibt es ein $x_0 \in D(A)$ mit

$$(\lambda - A)x_0 = (\lambda - A^*)x \in H$$

Für alle $z \in D(A) \subset D^*$ folgt:

$$\begin{aligned} \langle x - x_0, (\bar{\lambda} - A)z \rangle &= \langle x, (\bar{\lambda} - A)z \rangle - \langle x_0, (\bar{\lambda} - A^*)z \rangle \\ &= \langle (\lambda - A^*)x, z \rangle - \langle (\lambda - A^*)x_0, z \rangle = 0 \end{aligned}$$

Da $\lambda - A$ surjektiv folgt dass $x - x_0 = 0$

d,e folgen wie in 4.4.

2.4.11 Bemerkung

Nicht jeder symmetrische, abgeschlossene Operator ist selbstadjungiert. Nicht jeder symmetrische Operator hat eine selbstadjungierte Erweiterung. Andererseits kann ein symmetrischer Operator unendlich viele verschiedene selbstadjungierte Erweiterungen besitzen. Beispiel:

$$H = L^2[0, 1] \quad D = \{f \in C[0, 1] \mid \exists \tilde{f} : f(t) = \int_0^t \tilde{f}(s) \, ds, f(0) = f(1) = 0\}$$

Der Operator $Af = i\tilde{f}$ hat unendlich viele selbstadjungierte Erweiterungen (Übungen).

2.4.12 Definition Punktspektrum

Das Punktspektrum $\sigma_P(A)$ besteht aus den Eigenwerten von A . Der Rest ist σ_C , das kontinuierliche Spektrum.

**Definition
Punkt-
spektrum**

2.4.13 Bemerkung

Wenn A selbstadjungiert, dann ist $\sigma_P \in \mathbb{R}$ und σ_C enthält alle verallgemeinerte Eigenwerte, die nicht Eigenwerte sind.

2.4.14 Proposition

Sei A symmetrisch. Dann sind die Eigenvektoren x_1, x_2 zu zwei verschiedenen Eigenwerten λ_1, λ_2 orthogonal, d.h.

$$\text{Kern}(\lambda_1 - A) \perp \text{Kern}(\lambda_2 - A)$$

Beweis: Es ist

$$\lambda_1 \langle x_1, x_2 \rangle = \langle Ax_1, x_2 \rangle = \langle x_1, Ax_2 \rangle = \lambda_2 \langle x_1, x_2 \rangle$$

und damit die Behauptung.

2.5 Spektralsatz für kompakte selbstadjungierte Operatoren

Definition kompakt

Sei $T \in B(H)$. Dann ist T kompakt, falls $T(U_H)$ relative kompakt in H ist. Das bedeutet, dass es zu jeder Folge x_n mit $\|x_n\| \leq 1$ gibt es eine Teilfolge x_{n_k} , sodass Tx_{n_k} eine $\|\cdot\|$ -konvergente Folge ist in H .

2.5.1 Beispiel

Sei $X = l^2$ und der Operator

$$K(a_n) = (d_n a_n)$$

mit $|d_n| \leq C$. Dann ist K kompakt, wenn $d_n \rightarrow 0$. (Übungen oder 1.4)

2.5.2 Beispiel:

Hille-Tamarkin-Operatoren. $X = L^2(U, \mu)$ und $k : U \times U \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\int_U \int_U |k(t, s)|^2 dt ds < \infty$$

Wir wissen

$$Kf(t) = \int k(t, s)f(s) \, ds$$

ist ein beschränkter Operator. Aber K ist auch kompakt.

Beweis: Wähle $f_n \in U_{L^2}$. Nach 1.4. gibt es eine Teilfolge f_{n_k} und ein $f \in L^2$ sodass f_{n_k} im schwachen Sinne gegen f konvergiert, also für alle $g \in L^2$

$$\langle f_{n_k}, g \rangle \rightarrow \langle f, g \rangle$$

Wir wissen schon, dass $k(t, \cdot) \in L^2$ für fast alle $t \in U$. Dann ist

$$T(f - f_n)(t) = \int k(t, s)(f - f_n)(s) \, d\mu(s) = \langle f - f_n, \underbrace{\overline{k(t, \cdot)}}_{\in L^2} \rangle \rightarrow 0$$

wegen schwacher Konvergenz. Da auch

$$|T(f - f_n)|^2 \leq \int |k(t, s)|^2 \, ds \underbrace{\int |f - f_n|^2 \, ds}_{\leq \|f_n\|^2 + \|f\|^2}$$

Also ist $T(f_n - f)$ durch eine Fkt. in L^1 dominiert und nach dem Satz von Lebesgue gilt

$$\|T(f - f_n)\|^2 \rightarrow 0$$

2.5.3 Satz

Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Hilbertraum und $T \in B(H)$ selbstadjungiert und kompakt.

Falls $\dim H = \infty$, dann ist $0 \in \sigma(T)$ und $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ ist Eigenwert mit $\dim \text{Kern}(T - \lambda) < \infty$. $\sigma(T) \setminus \{0\}$ ist endlich oder besteht aus einer Nullfolge.

Schließlich

$$\|T\| = \sup\{\lambda : \lambda \in \sigma(T)\}$$

Satz

Beweis:

(a) Wäre $0 \in \rho(T)$, dann $Id_H = T \cdot T^{-1}$ kompakt und $\dim H < \infty$ nach Kapitel 1, 4.2.b.

- (b) Sei $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ ein Eigenwert oder ein approximativer Eigenwert mit $x_n \in H$, $\|x_n\| = 1$, $\|Tx_n - \lambda x_n\| \rightarrow 0$ nach 4.5.c.

Da T kompakt ist, hat Tx_n eine konvergente Teilfolge Tx_k . Da Tx_k konvergent, aber $Tx_k - \lambda x_k \rightarrow 0$, $\lambda \neq 0$ folgt $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x \in H$ existiert.

$$Tx - \lambda x = \lim_{k \rightarrow \infty} Tx_k - \lambda x_k = 0$$

$$H_\lambda = \text{Kern}(\lambda - T) \implies T|_{H_\lambda} = \lambda Id_{H_\lambda}$$

Da $T|_{H_\lambda}$ kompakt ist, also U_{H_λ} kompakt und somit nach I.4.2.b $\dim H_\lambda < \infty$

- (c) Sei (λ_k) eine Folge von Eigenwerten mit Eigenvektoren x_k , $\|x_k\| = 1$ und $Tx_k = \lambda_k x_k$, $x_k \perp x_l$ für $k \neq l$. Somit (x_k) ein ONS in H und damit $x_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{W} 0$. Also $Tx_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{W} 0$, in der Norm, da T kompakt ist.

$$|\lambda_k| = \|\lambda_k x_k\| = \|Tx_k\| \rightarrow 0$$

jede Folge aus $\sigma(T) \setminus \{0\}$ ist eine Nullfolge. Also besteht $\sigma(T) \setminus \{0\}$ aus endlich vielen Werten oder einer Nullfolge.

- (d)

$$\|T\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$$

nach I.4.5.d

2.5.4 Satz Spektraldarstellungssatz für kompakte Operatoren

Sei $T \in B(H)$ selbstadjungiert und kompakt. Dann gibt es eine ONB (h_n) von H und eine Nullfolge (λ_n) von Eigenwerten von T , sodass

$$\forall x \in H \quad Tx = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle x, h_j \rangle h_j$$

**Satz
Spekt-
raldar-
stellungs-
satz für
kompakte
Operato-
ren**

Beweis:

- (a) Sei $\mu_n, n = 1, 2, \dots$, die möglicherweise endliche Folge von *verschiedenen* Eigenwerten von T , $\mu_n \rightarrow 0$. Setze $H_n = \text{Kern}(\mu_n - T)$, $m_n = \dim H_n$, $m_n < \infty$ falls $\mu_n \neq 0$.
 $G := \overline{\text{span}} \left(\bigcup_n H_n \right)$, $T(G) \subset G$, $G \subset H \implies T(G^\perp) \subset G^\perp$, $T|_{G^\perp} \in B(G^\perp)$ kompakt
 $\implies T|_{G^\perp}$ hat einen Eigenwert, der unter μ_n vorkommen sollte.

Also $G^\perp = \{0\} \implies G = H$. Außerdem nach 4.14 : $H_n \perp H_m$ für $n \neq m$.

$$H = \sum_n H_n$$

Sei $h_{n,j}, j = 1, \dots, m_n$ eine ONB von H_n . $(h_{n,j}), j = 1, \dots, m_n, n = 1, 2, \dots$ ist eine ONB von H , denn

$$\overline{\text{span}}\{h_{n,j}, j = 1, \dots, m_n, n = 1, 2, \dots\} = G = H$$

Außerdem $h_{n_1,j_1} \perp h_{n_2,j_2}$ falls $(n_1, j_1) \neq (n_2, j_2)$

$$\begin{aligned} Tx &= T \left(\sum_n \sum_{j=1}^{m_n} \langle x, h_{n,j} \rangle h_{n,j} \right) \\ &= \sum_n \sum_{j=1}^{m_n} \langle x, h_{n,j} \rangle T h_{n,j} \\ &= \sum_n \sum_{j=1}^{m_n} \langle x, h_{n,j} \rangle \mu_n h_{n,j} \end{aligned}$$

Sei λ_n eine Folge von Eigenwerten, die μ_n entsprechend seiner Vielfachheit m_n enthält. Sei $\tilde{h}_n$ eine Abzählung der $h_{n,j}$, dann

$$Tx = \sum_n \lambda_n \langle x, \tilde{h}_n \rangle \tilde{h}_n$$

2.5.5 Folgerungen

- (a) Jeder kompakte selbstadjungierte Operator $T \in B(H)$ ist ähnlich zu einem "Diagonaloperator" D auf l^2 .

$$U : l^2 \rightarrow H \quad (U(a_n)) = \sum_n a_n h_n$$

wobei (h_n) eine ONB ist. Dies ist ein unitärer Operator , da

$$\|U(a_n)\|^2 = \sum_n \|a_n\|^2 = \|a_n\|_{l^2}^2$$

$$D : l^2 \rightarrow l^2 : D((a_n)) = (\lambda_n a_n)$$

wobei (λ_n) aus 5.4.

Dann gilt

$$T = UDU^{-1}$$

- (b) Jeder kompakte selbstadjungierte Operator ist "Linearkombination" von Orthogonalprojektionen P_n :

$$Tx = \sum_n \mu_n P_n x$$

konvergent in H und μ_n ist die Folge der verschiedenen Eigenwerte.

$$P_n = P_{H_n}, H_n = \text{Kern}(\mu_n - T)$$

$$(\text{Analog : } t(x) = \sum_n \mu_n \chi_{A_n})$$

2.5.6 Beispiel

$H = L^2[-\pi, \pi]$. Wähle Funktion aus H , periodisch fortgesetzt auf $\mathbb{R}$. Sei $k \in L^2[-\pi, \pi]$ mit $k(x) = k(-x)$, reellwertig.

$$Tf(t) = \int_{-\pi}^{\pi} k(t-s)f(s) \, ds$$

selbstadjungiert (nach 4.2.b) und T ist kompakt Hille Tamarkin Operator,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |k(t-s)|^2 \, dt ds = 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} |k(t)|^2 \, dt < \infty$$

$$h_m(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(imt), m \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} Th_m(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int k(s) \exp(im(t-s)) \, ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(imt) \int k(s) \overline{\exp(ims)} \, ds \\ &= h_m(t) \sqrt{2\pi} \langle k, h_m \rangle \end{aligned}$$

Setze $\lambda_m = \int_{-\pi}^{\pi} \exp(-ims) k(s) \, ds$, dann gilt :

$$Tf(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \lambda_m \langle f(t), h_m(t) \rangle h_m(t)$$

Wobei λ_m die Fourierkoeffizienten sind bzw Eigenwerte.

Bezeichnung $H \supset D(A) \xrightarrow{A} H, x, y \in D(A), H_A$ mit $\langle x, y \rangle_H := \langle x, y \rangle_H + \langle Ax, Ay \rangle_H$.
Graphennorm:

$$\|x\|_A^2 = \|x\|_H^2 + \|Ax\|_H^2$$

2.5.7 Satz

Satz

Sei $H \supset D(A) \xrightarrow{A} H$ sei selbstadjungierter Operator auf separablen Hilbertraum. Außerdem sei die Einbettung $H_A \subset H$ kompakt, d.h. $U_{H_A} = \{x \in H : \|x\|_A \leq 1\}$ soll kompakt sein bezüglich der Norm von H .

Dann gilt

(a) $\sigma(A)$ besteht aus einer Folge reeller Eigenwerte λ_n mit endlichdimensionalen Eigenräumen und $|\lambda_n| \rightarrow \infty$.

(b) Es gibt eine ONB von Eigenvektoren $(h_n) \in D(A)$, ONB von H , so dass

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, h_n \rangle h_n \quad x \in D(A)$$

(c)

$$\tilde{h}_n = (1 + |\lambda_n|)^{-1} h_n$$

ist eine ONB von H_A und

$$\|x\|_A^2 = \sum_n (1 + |\lambda_n|)^2 |\langle x, h_n \rangle|^2$$

$$D(A) = \left\{ \sum_n \alpha_n h_n : \sum_n (1 + |\lambda_n|)^2 |\alpha_n|^2 < \infty \right\}$$

Beweis: Zunächst Annahme: $\rho(A) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$.

$\exists r \in \rho(A) \cap \mathbb{R}$, o.B.d.A sei $r = 0$. (anderfalls $\tilde{A} = A - r$).

Setze $T = A^{-1}$, $T(U_x) \subset CU_x$, da $A^{-1} = T : H \rightarrow H_A$ stetig. Also T kompakt, T ist auch selbstadjungiert, da $x, y \in H$

$$\begin{aligned} \langle Tx, y \rangle &= \langle Tx, ATy \rangle \\ &= \langle ATx, Ty \rangle \\ &= \langle x, Ty \rangle \end{aligned}$$

Nach dem letzten Satz gibt es eine ONB (h_n) von H und Eigenwerte λ_n von T mit

$|\lambda_n| \rightarrow 0$, so dass

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, h_n \rangle h_n \quad x \in H$$

T ist injektiv, $\lambda_n \neq 0$. Setze $\mu_n \frac{1}{\lambda_n}$, $|\mu_n| \rightarrow \infty$.

$$h_m = \lambda_m^{-1} T h_m \in D(A) \quad Ah_m = T^{-1} h_m = \frac{1}{\lambda_m} h_m = \mu_m h_m$$

Für $x \in D(A)$

$$\begin{aligned} \|x\|_A^2 &= \|x\|^2 + \|Ax\|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, h_n \rangle|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |\langle Ax, h_n \rangle|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (1 + |\mu_n|)^2 |\langle x, h_n \rangle|^2 < \infty \end{aligned}$$

denn $\langle Ax, h_m \rangle = \langle x, Ah_m \rangle = \mu_n \langle x, h_m \rangle$. Also für $x \in D(A) : x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, h_n \rangle h_n, y = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \langle x, h_n \rangle h_n$. Nun

$$\begin{aligned} T \left(\sum_{n=1}^m \mu_n \langle x, h_n \rangle h_n \right) &= \sum_n \langle x, h_n \rangle \mu_n T h_n \\ &= \sum_{n=1}^m \langle x, h_n \rangle h_n \rightarrow x \\ A \left(\sum_{n=1}^m \mu_n \langle x, h_n \rangle h_n \right) &= \sum_{n=1}^m \mu_n \langle x, h_n \rangle h_n \end{aligned}$$

A abgeschlossen:

$$Ax = y = \sum_{n=1}^f \mu_n \langle x, h_n \rangle h_n$$

Für Teil a: Übung: $0 \in \rho(A), \sigma(A) = \{\frac{1}{\lambda} : \lambda \in \sigma(A^{-1}) = \sigma(T)\}$.

Für Teil c:

$$\langle h_n, h_m \rangle_A = \langle h_n, h_m \rangle + \mu_n \mu_m \langle h_n, h_m \rangle = 0$$

2.5.8 Beispiel

$H = L^2[-\pi, \pi]$. $D(A) = \{f \in C[-\pi, \pi] : \exists \tilde{f} \in L^2[-\pi, \pi] \text{ mit } f(t) = f(-\pi) + \int_{-\pi}^t \tilde{f}(s) \, ds, f(-\pi) = f(\pi)\}$, $f \in D(A)$ setze $Af = i\tilde{f}$ (Für $f \in C^1[-\pi, \pi] : Af = if'$)
 $h_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(int) \in D(A), n \in \mathbb{Z} \implies Ah_n = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} in \exp(int) = -nh_n$ Also $\{-n : n \in \mathbb{Z}\} \subset \sigma(A)$. Weiterhin (h_n) ONB von H , daraus folgt

$$\{-n : n \in \mathbb{Z}\} = \sigma(A)$$

Nach Satz :

$$Af = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda_n \langle f, h_n \rangle h_n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-n) \hat{f}(n) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(int) \quad \hat{f}(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(-ins) f(s) \, ds$$

$$\|f\|_A = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 + |n|)^2 |\hat{f}|^2$$

Also

$$D(A) = \left\{ f \in L^2[-\pi, \pi] : (1 + |n|) \hat{f} \in l^2 \right\}$$

2.5.9 Beispiel Legendre Differentialoperator

$H = L^2[-1, 1]$, $D(A) = \{f \in C^1[-1, 1] : \exists \tilde{f} \in L^2[-1, 1] \text{ mit } f'(t) = \int_{-1}^t \tilde{f}(s) \, ds, f(-1) = f(1) = 0\}$

$f \in C^2(-1, 1) : Af(t) = [(1 - t^2)f'(t)]' = (1 - t^2)f''(t) - 2tf'(t)$

$f \in D(A) : Af(t) = (1 - t^2)\tilde{f}(t) - 2tf'(t)$

In den Übungen wird gezeigt : $\sigma(A) = \{n(n+1) : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$.

und

$$Af = \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1) \langle f, L_n \rangle L_n$$

wobei L_n die Legendre-Polynome sind mit

$$L_n = \frac{\sqrt{n + \frac{1}{2}}}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

(L_n) bilden eine ONB von H mit

$$AL_n = n(n+1)L_n$$

2.5.10 Harmonische Oszillator

$$H = L^2(\mathbb{R}), D(A) = \{f \in L^2 : f \in W^{2,2}(\mathbb{R}), t^2 f(t) \in L^2(\mathbb{R})\}$$

$$Af(t) = -f''(t) + t^2 f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$$

Dann gilt :

$$\sigma(A) = \{2n + 1 : n \in \mathbb{N}_0\}$$

und $f \in D(A)$

$$Af = \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1) \langle f, h_n \rangle h_n$$

wobei

$$h_n(x) = (-1)^n \left[\frac{d^n}{dx^n} \exp(-x^2) \right] \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) (2^n n! \sqrt{\pi})^{-1}$$

Dies sind hermite Funktionen und

$$Ah_n = (2n + 1)h_n$$

2.6 Funktionalkalkül selbstadjungierter Operatoren

2.6.1 Voraussetzung

H separabler Hilbertraum, $\langle \cdot, \cdot \rangle$. A ist ein "diskreter" selbstadjungierter Operator, d.h. A hat eine Darstellung

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, h_n \rangle h_n$$

wobei (h_n) eine ONB von H ist, λ_n Eigenwerte zum Eigenvektor h_n .

Nach Section 5 hat A eine solche Darstellung, falls z.B. $A \in B(H)$, A kompakt, $D(A) = H$ oder $(D(A), \|\cdot\|) \subset H$ kompakt eingebettet, $D(A) \subsetneq H$, $|\lambda_n| \rightarrow \infty$ nach Satz 5.7. (z.B. A^{-1} kompakt)

2.6.2 Beispiel

für eine "Funktion von A ". Sei zunächst $A \in B(H)$, d.h. $\sup_n |\lambda_n| < \infty$.

$$A^2 x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \langle x, h_n \rangle h_n$$

den $x = h_n$

$$A^2 h_n = A(Ah_n) = A(\lambda_n h_n) = \lambda_n^2 h_n$$

Richtig für Linearkombination der h_n , diese liegen dicht in H . Allgemeiner :

$$A^j x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^j \langle x, h_n \rangle h_n$$

$$p(\lambda) = \sum_{j=1}^m a_j \lambda^j$$

$$p(A)x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j A^j x = \sum_{j=1}^m a_j \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^j \langle x, h_n \rangle h_n = \sum_{n=1}^{\infty} p(\lambda_n) \langle x, h_n \rangle h_n$$

2.6.3 Definition des Funktionalkalküles

Notation: $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ beschränkt} \}$

Für $f \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ setze

$$f(A) := \sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n) \langle x, h_n \rangle h_n$$

wobei A nach (2.6.1) ein diskreter Operator ist.

Die Abbildung

$$\phi_A := \begin{cases} f \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow B(H) \\ f \rightarrow f(A) \end{cases}$$

heißt der Funktionalkalkül von A .

2.6.4 Proposition

Sei A "diskret" wie in (2.6.1), dann gilt

F1 Für $f_\mu(\lambda) = \frac{1}{\mu - \lambda}$, $\mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ gilt $f_\mu(A) = R(\mu, A)$

F2 $\phi_A : \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow B(H)$ ist ein Abgebrenhomomorphismus, dh.

$$(f + g)(A) = f(A) + g(A)$$

$$(f \cdot g)(A) = f(A) \cdot g(A)$$

$$1(A) = Id_H$$

F3

$$\|f(A)\|_{B(H)} = \sup \{|f(\lambda_n)| : n \in \mathbb{N}\}$$

F4 Spektralabbildungssatz

$$\sigma(f(A)) = \overline{\{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}}$$

mit

$$\sigma(A) = \overline{\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}}$$

F5 $f(A)$ selbstadjungiert $\iff f$ reellwertig.

Beweis:

F1 $x \in D(A)$

$$\begin{aligned} f_\mu(A)(\mu - A)x &= \sum_{n=1}^{\infty} f_\mu(\lambda_n) \langle (\mu - A)x, h_n \rangle h_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu - \lambda_n} \langle x, (\bar{\mu} - A)h_n \rangle h_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu - \lambda_n} \langle x, (\bar{\mu} - \lambda_n)h_n \rangle h_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, h_n \rangle h_n \\ &= x \end{aligned}$$

Also

$$f_\mu(A)(\mu - A) = Id \implies f_\mu(A) = (\mu - A)^{-1}$$

F2 z.B. $x = h_m$, $g(A)h_m = \sum_{n=1}^{\infty} g(\lambda_n) \langle x, h_n \rangle h_n = g(\lambda_m)h_m$

$$\begin{aligned} [f(A)g(A)]h_m &= f(A)[g(A)h_m] \\ &= f(A)[g(\lambda_m)h_m] \\ &= g(\lambda_m)(f(A)h_m) \\ &= g(\lambda_m) \cdot f(\lambda_m) \cdot h_m \\ (g \cdot f)(\lambda_m)h_m &= (g \cdot f)(A)h_m \end{aligned}$$

Dann gilt die Identität für die Linearkombination der h_m und diese liegen dicht in H . Genauso $(f + g)(A) = f(A) + g(A)$.

$$\mathbf{F3} \quad U : l^2 \rightarrow H, U(a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n h_n$$

$$\|U(a_n)\|_H = \|(a_n)\|_{l_2}$$

$$A = UDU^{-1}, D(a_n) = (\lambda_n a_n) \text{ Also}$$

$$(U^{-1}f(A)U)(a_n) = (f(\lambda_n))_{n \in \mathbb{N}}$$

$$\|f(A)\|_{B(H)} = \|f(D)\|_{l^2} = \sup_n |f(\lambda_n)| < \infty$$

F4

$$\sigma(D) = \overline{\{f(\lambda_n)\}} = \sigma(f(A))$$

$$\text{da } f(A) = Uf(D)U^{-1}$$

F5 Selbstadjungiertheit von $f(D)$ falls $f(\lambda_n) \in \mathbb{R}$

2.6.5 Korollar

Sei A selbstadjugiert auf H und $A \in B(H)$ und kompakt *oder* $(D(A), \|\cdot\|_A) \subset H$ kompakt eingebettet. Dann hat A einen Funktionalkalkül wie in (2.6.4).

2.6.6 Beispiel

(a)

$$g_t(\lambda) = \exp(it\lambda) \quad \exp(itA)x := g_t(A)x = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(i\lambda_n t) \langle x, h_n \rangle h_n$$

$$\exp(it\lambda) \exp(is\lambda) = \exp(i(t+s)\lambda) \xrightarrow{(F2)} \exp(itA) \exp(isA) = \exp(i(t+s)A)$$

ist Gruppe von Operatoren (löst $y'(t) = iAy(t)$)

(b) Sei $\lambda_n \geq 0 : g_t(\lambda) = \exp(-\lambda t) \chi_{\mathbb{R}_+}(t), t \geq 0$

$$\exp(-tA)x := g_t(A)x$$

und

$$\exp(-t\lambda) \exp(-s\lambda) = \exp(-(s+t)\lambda) \implies \exp(-tA) \quad t \geq 0$$

bilden eine Halbgruppe.

(c) $f(\lambda) = t\lambda \exp(-\lambda t), t \geq 0, f(A) = tA \exp(-tA), \|f(A)\|_\infty = \frac{1}{\exp(1)}$ also

$$\|A \exp(-tA)\|_{B(H)} \leq \frac{1}{\exp(1)t}, t > 0$$

Bedeutung: Rechnen mit Operatoren wird reduziert auf das Rechnen mit Funktionen.

2.7 Spektralsatz für allgemeine selbstadjungierte Operatoren

2.7.1 Beispiel:

Standardbeispiel: Multiplikationsoperator $V \subset \mathbb{R}^2$ abgeschlossen, μ auf V , $m : V \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann soll für ein $x : V \rightarrow \mathbb{C}$ gelten:

$$Mx(u) = m(u) \cdot x(u), u \in V, D(M) = \{x \in L^2(V, \mu) \mid m \cdot x \in L^2\}$$

Davon wissen wir

$$\sigma(M) = \overline{\{m(u) \mid u \in V\}}$$

M ist genau dann selbstadjungiert, wenn m reellwertig ist.

2.7.2 Satz Spektraldarstellung selbstadjungierter Operatoren

Sei A selbstadjungierter Operator auf einem separablen Hilbertraum H . Dann gibt es einen Raum $L^2(V, \mu)$, einen Multiplikationsoperator M auf L^2 wie in Beispiel 6.1. und eine unitäre Abbildung

$$U : L^2 \rightarrow H$$

so dass

$$A = U M U^{-1}$$

auf $D(A) = U(D(M)) = U(\{x \in L^2 \mid mx \in L^2\})$. Weiter ist

$$\sigma(A) = \sigma(M) = \{m(u) \mid u \in V\}$$

**Satz
Spekt-
raldar-
stellung
selbstad-
jungierter
Operato-
ren**

2.7.3 Beispiel (Laplace Operator)

auf

$$H = L^2(\mathbb{R}^n) \quad x \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \quad \Delta x(\cdot) = \sum \frac{\partial^2}{\partial u_j^2} x(\cdot)$$

Außerdem die Fouriertransformation

$$\mathcal{F}x(u) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{iuv} x(v) \, dv$$

und die Rücktransformation

$$\mathcal{F}^{-1}x(u) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iuv} x(v) \, dv$$

Dafür gilt

$$\langle \mathcal{F}x, y \rangle = \langle x, \mathcal{F}^{-1}y \rangle$$

also

$$\|\mathcal{F}x\|^2 = \langle \mathcal{F}x, \mathcal{F}x \rangle = \langle y, y \rangle$$

also ist $\mathcal{F}$ unitär.

Für eine Ableitung gilt

$$\frac{d^2}{du_j^2} \mathcal{F}^{-1}y(u) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} (-iv_j)^2 e^{-iuv} y(v) \, dv$$

und damit

$$\Delta \mathcal{F}^{-1}y(u) = \mathcal{F}^{-1}(|u|^2 y(u))$$

Der Beweis funktioniert also mit

$$H = L^2(\mathbb{R}^n) \quad A = \Delta \quad My = my \quad m(u) = -|u|^2$$

Außerdem ist $U = \mathcal{F}^{-1}$ unitär. Oben wurde gezeigt:

$$\Delta \mathcal{F}^{-1}y = \mathcal{F}^{-1}(My)$$

oder

$$\mathcal{F} \Delta \mathcal{F}^{-1}y = My$$

mit $y \in D(M) = \{y \in L^2 \mid |v|^2 y(v) \in L^2\}$. Nach Satz

$$D(\Delta) = \mathcal{F}^{-1} D(M) = W^{2,2}(\mathbb{R}^n)$$

2.7.4 Vorbereitendes Beispiel

Funktionalkalkül für Multiplikationsoperatoren. Sei $m : V \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $My = my$. Dann

$$M^2 y = M(my) = m^2 y$$

Analog auch für Polynome.

$$p(\lambda) = \sum a_j \lambda^j \quad p(M)y = \left(\sum a_j M^j \right) y = \sum a_j m^j y = p(m)y$$

Allgemein: für ein stetiges f

$$f(M)y = (f(m))y \quad (f(M)y)(u) = f(m(u))y(u)$$

Definition

$\phi_M(f) = f(M)$ wie oben.

$$\phi_M : C_b(\mathbb{R}) \rightarrow B(L^2)$$

besitzt die Eigenschaften:

F1 $f_\mu(\lambda) = \frac{1}{\mu - \lambda}$ mit $y \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ fest. Dann

$$f_\mu(M) = (\mu - m)^{-1} = R(\mu, M)$$

F2 ϕ_M ist ein Algebrenhomomorphismus, d.h.

$$(f + g)(M) = f(M) + g(M) \quad (f \circ g)(M) = f(M)g(M)$$

F3

$$\|f(M)\| = \sup |f(\lambda)|$$

F4

$$\sigma(f(M)) = \overline{\{f(u) \mid u \in \sigma(M)\}}$$

F4 $f(M)$ ist genau dann selbstadjungiert, wenn f reellwertig ist.

2.7.5 Korollar

Sei A selbstadjungiert auf H . Dann besitzt A einen Funktionalkalkül ϕ_M mit den genannten Eigenschaften.

Beweis: Übertrage A auf einen Multiplikationsoperator M (mit Wechselfunktion U) und definiere

$$\phi_A = U\phi_M U^{-1}$$

Verallgemeinerung ν ein Maß auf $\sigma(A) = \sigma(M)$ definiert durch $B \subset \sigma(A)$ Borel.

$$\nu(B) = \mu(m^{-1}(B))$$

Dann gelten alle Eigenschaften auch, nur dass wesentliches Supremum und wesentlicher Bildbereich betrachtet werden müssen.

2.8 Formen und Operatoren

Zur Erinnerung : Vektorraum V über $\mathbb{K}$. $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ heißt *Sesquilinearform*, falls für $x, y, z \in V$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ gilt

$$\begin{aligned} a(\alpha x + \beta y, z) &= \alpha a(x, z) + \beta a(y, z) \\ a(z, \alpha x + \beta y) &= \overline{\alpha} a(z, x) + \overline{\beta} a(z, y) \end{aligned}$$

2.8.1 Definition

$(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum, $a(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{K}$, eine Sesquilinearform, heißt

Definition

(a) beschränkt, falls es ein $C < \infty$ gibt, so dass für alle $x, y \in H$

$$|a(x, y)| \leq C \|x\| \cdot \|y\|$$

(b) halbbeschränkt (nach unten) auf H , falls es ein $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$a(x, x) \geq \alpha \|x\|^2$$

für alle $x \in H$. a heißt positiv, falls $\alpha = 0$ und koerziv, falls $\alpha > 0$.

(c) symmetrisch, falls

$$\forall x, y \in H \quad a(x, y) = \overline{a(y, x)}$$

2.8.2 Satz Lax-Milgram

Sei $a(\cdot, \cdot)$ eine Sesquilinearform auf dem Hilbertraum H .

(a) $a(\cdot, \cdot)$ ist beschränkt auf H genau dann wenn $T \in B(H)$ existiert mit

$$\forall x, y \in H \quad a(x, y) = \langle x, Ty \rangle_H$$

(b) Ist a beschränkt und koerziv, dann gibt es einen invertierbaren Operator $T \in B(H)$ mit

$$\forall x, y \in H \quad a(x, y) = \langle x, Ty \rangle_H$$

und

$$\|T^{-1}\| \leq \frac{1}{\alpha}$$

wobei α die Konstante aus $a(x, x) > \alpha \|x\|^2$ ist.

(c) Eine beschränkte Sesquilinearform a ist genau dann symmetrisch, falls es einen selbstadjungierten Operator $T \in B(H)$ gibt

$$\forall x, y \in H \quad a(x, y) = \langle x, Ty \rangle_H$$

Beweis: Sei $a(\cdot, \cdot)$ eine beschränkte Form auf H .

(a) Konstruktion von T :

- Zu $y \in H$ fest, definiere $l_y \in H'$ durch

$$l_y(x) = a(x, y)$$

Dann ist $l_y : H \rightarrow \mathbb{K}$ linear, $|l_y(x)| = |a(x, y)| \leq (C\|y\|) \|x\|$. Also $l_y \in H'$. Nach dem Darstellungssatz von Riesz gibt es $\tilde{y} \in H$, so dass

$$l_y(x) = \langle x, \tilde{y} \rangle$$

Definiere eine Abbildung $T : y \in H \rightarrow \tilde{y} =: T(y)$.

Dieses T ist linear, da für alle $x \in H$

$$\begin{aligned}
 \langle x, Ty_1 + Ty_2 \rangle &= \langle x, Ty_1 \rangle + \langle x, Ty_2 \rangle \\
 &= a(x, Ty_1) + a(x, Ty_2) \\
 &= a(x, Ty_1 + Ty_2) \\
 &= \langle x, T(y_1 + y_2) \rangle \\
 \implies Ty_1 + Ty_2 &= T(y_1 + y_2)
 \end{aligned}$$

- T beschränkt, da

$$\begin{aligned}
 |\langle x, Ty \rangle| &= |a(x, y)| \\
 &\leq C\|x\|\|y\|
 \end{aligned}$$

für alle $x \in H \implies$

$$\|Ty\| \leq C\|y\|$$

und somit

$$\|T\| \leq C$$

Umgekehrt : Sei $T \in B(H)$, dann ist $a(x, y) := \langle x, Ty \rangle$ beschränkt, denn

$$|a(x, y)| = |\langle x, Ty \rangle| \leq \|x\|\|Ty\| \leq \|T\|\|x\|\|y\| = C\|x\|\|y\|$$

(b) Koerziv:

$$a(x, x) \geq \alpha\|x\|^2 \quad \alpha > 0$$

Wähle nach a) ein $T \in B(H)$ mit

$$a(x, y) = \langle x, Ty \rangle$$

Zu Zeigen: T ist invertierbar

Aus der koerzivitt folgt

$$\begin{aligned}
 \alpha\|x\|^2 &\leq a(x, x) = \langle x, Tx \rangle \leq \|x\| \cdot \|Tx\| \\
 \implies \alpha\|x\| &\leq \|Tx\|
 \end{aligned}$$

Daraus folgt $R(T) = \{Tx, x \in H\}$ ist abgeschlossen in H , denn $x_n \in H$, so dass $Tx_n \rightarrow y \in H$ in H . Da $\alpha\|x_n - x_m\| \leq \|Tx_n - Tx_m\|$ und (Tx_n) eine Cauchyfolge in

H ist, ist auch (x_n) eine Cauchyfolge in H . Setze $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Dann

$$Tx = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = y \in R(T)$$

Zu Zeigen: Der Bildraum ist dicht in H .

$$y \in R(T)^\perp \implies 0 \langle y, Ty \rangle \geq \|y\|^2 \alpha \implies \|y\| = 0 \implies y = 0$$

$$R(T)^\perp = \{0\}$$

und somit ist

$$\overline{R(T)} = H$$

Zusammen $T : H \rightarrow H$ surjektiv. T injektiv, wegen $\langle x, Tx \rangle \geq \alpha \|x\|^2$ folgt $Tx = 0$ folgt $\|x\| = 0, x = 0$. Damit $T^{-1} : H \rightarrow H$ existiert. Für $y = Tx$ in $\alpha \|x\| \leq \|Tx\|$ (siehe oben)

$$\|T^{-1}y\| \leq \frac{1}{\alpha} \|y\| \implies \|T^{-1}\| \leq \frac{1}{\alpha}$$

(c)

$$\langle x, Ty \rangle = a(x, y) = \overline{a(y, x)} = \overline{\langle y, Tx \rangle} = \langle Tx, y \rangle$$

a symmetrisch heißt T ist selbstadjungiert und umgekehrt.

2.8.3 Korollar (Lax-Milgram)

Sei $a(\cdot, \cdot) : H \rightarrow H$ stetig, koerziv auf H . Zu jeder stetigen, linearen Abbildung $l : H \rightarrow \mathbb{K}$ ($l \in H'$) gibt es genau ein $y \in H$, so dass

$$\forall x \in H \quad a(x, y) = l(x)$$

Beweis: Sei $T \in B(H)$ invertierbar und $a(x, y) = \langle x, Ty \rangle$ für alle $x, y \in H$. Nach dem Darstellungssatz von Riesz gibt es $\tilde{y} \in H$ mit $l(x) = \langle x, \tilde{y} \rangle$

Setze $y = T^{-1}\tilde{y}$. Dann

$$\begin{aligned} a(x, y) &= \langle x, Ty \rangle \\ &= \langle x, \tilde{y} \rangle \\ &= l(x) \end{aligned}$$

2.8.4 Bezeichnung

H Hilbertraum bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$, $V \subset H$, V sei linear, dichter Teilraum von H . V sei selbst ein Hilbertraum mit $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$. V ist stetig eingebettet in H , falls es ein $C < \infty$ gibt mit

$$\langle x, y \rangle_H \leq C \langle x, y \rangle_V \quad \|x\|_H \leq \sqrt{C} \|x\|_V$$

Sei $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ eine Sesquilinearform auf V . Wir ordnen der Form a auf V einen Operator A auf H zu.

$$D(A) = \{y \in V : \exists \tilde{y} \in H \forall x \in H : a(x, y) = \langle x, \tilde{y} \rangle_H\}$$

$Ay = \tilde{y}$ für $y \in D(A)$.

2.8.5 Satz

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$ sei stetig eingebettet in $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$. Sei $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ eine beschränkte, koerzive und symmetrische Sesquilinearform auf V . Dann ist A in $D(A) = \{y \in V : \exists \tilde{y} \in H \forall x \in H : a(x, y) = \langle x, \tilde{y} \rangle_H\}$ ein selbstadjungierter Operator auf H mit

$$\langle y, Ay \rangle \geq \frac{\alpha}{c} \|y\|_V^2$$

für $y \in D(A)$

Satz

Beweis: Nach Satz 4.10b):

- A ist abgeschlossen
- A ist symmetrisch
- $\exists \lambda : \lambda - A, \bar{\lambda} - A : D(A) \rightarrow H$ ist surjektiv.

folgt damit A ist selbstadjungiert. Zu Zeigen : A ist surjektiv

Zu $\tilde{y} \in H$ setze $l(x) = \langle x, \tilde{y} \rangle_H$ für alle $x \in V$.

$$l(x) \leq \|\tilde{y}\|_H \|x\|_H \leq \sqrt{C} \|\tilde{y}\|_H \|x\|_V$$

Also $l \in V'$, $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ ist beschränkt und koerziv. Dann gibt es nach (2.8.3) ein $y \in V$ mit $a(x, y) = l(x) = \langle x, \tilde{y} \rangle_H$ für $x \in V$. D.h. nach $D(A) : y \in D(A) : Ay = \tilde{y}$

Zu Zeigen: A ist injektiv: für $x \in D(A)$

$$\begin{aligned} Ax = 0 &\implies a(x, x) = \langle x, Ax \rangle = 0 \\ \implies 0 &= a(x, x) \geq \alpha \|x\|_V^2 \\ \implies x &= 0 \end{aligned}$$

Zu Zeigen: $A^{-1} : H \rightarrow D(A)$ existiert und ist stetig.

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \|x\|_H^2 &\leq \|x\|_H^2 \\ &\leq \frac{1}{\alpha} a(x, x) \\ &= \frac{1}{\alpha} \langle x, Ax \rangle_H \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \|x\|_H \|Ax\|_H \end{aligned}$$

Mit $Ax = y$:

$$\|A^{-1}y\|_H \leq \frac{c}{\alpha} \|y\|_H$$

Also $0 \in \rho(A)$, A abgeschlossen. Für $\lambda = 0 : \lambda - A, \bar{\lambda} - A : D(A) \rightarrow H$ surjektiv. A ist also selbstadjungiert nach Satz 4.10b.

2.8.6 Korollar

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$ sei stetig eingebettet in $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$. Sei $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ eine beschränkte, koerzive und symmetrische Sesquilinearform auf V .

Zusätzlich sei die Einbettung $V \subset H$ kompakt, d.h. U_V ist kompakt in $(H, \|\cdot\|_H)$. Dann gibt es eine ONB (h_n) von H und $\lambda_n > 0$ mit $\lambda_n \rightarrow \infty$, so dass

$$V = \{x \in H : \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |\langle x, h_n \rangle|^2 < \infty\}$$

$$\text{Für } x, y \in V \quad a(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, h_n \rangle \langle y, h_n \rangle$$

Beweis:

- A ist abgeschlossen
- A ist symmetrisch
- $\exists \lambda : \lambda - A, \bar{\lambda} - A : D(A) \rightarrow H$ ist surjektiv.

folgt damit A ist selbstadjungiert. Weiterhin $U_{D(A)} \subset U_V$ kompakt in H . Nach Section 6 gibt es eine ONB $(h_n), \lambda_n \in \mathbb{R}$

$$Ay = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle y, h_n \rangle h_n$$

Damit

$$\langle x, Ay \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \overline{\langle y, h_n \rangle} \langle x, h_n \rangle \quad x, y \in D(A)$$

Also

$$a(x, x)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |\langle x, h_n \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Da a beschränkt und koerziv auf V ist, folgt

$$\alpha^{\frac{1}{2}} \|x\|_V \leq a(x, x)^{\frac{1}{2}} \leq C \|x\|_V$$

Somit $\|x\|_V \propto a(x, x)^{\frac{1}{2}}$. Da V vollständig ist und $D(A) \subset V$ dicht folgt mit $a(x, x)^{\frac{1}{2}}$ die Identität $V = \{x \in H : \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |\langle x, h_n \rangle|^2 < \infty\}$.

Bemerkung

$$\begin{aligned} D\left(A^{\frac{1}{2}}\right) &= \left\{ x \in H : \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n |\langle x, h_n \rangle|)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\} \\ &= V \end{aligned}$$

$$A^{\frac{1}{2}}x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{\frac{1}{2}} \langle x, h_n \rangle h_n$$

$$\begin{aligned} a(x, y) &= \langle x, Ay \rangle \\ &= \langle x, A^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} y \rangle \\ &= \langle A^{\frac{1}{2}} x, A^{\frac{1}{2}} y \rangle \\ x = y \quad a(x, x) &= \|A^{\frac{1}{2}} x\|_H^2 \propto \|x\|_V^2 \\ V &= D\left(A^{\frac{1}{2}}\right) \end{aligned}$$

Kapitel 3

Rand und Eigenwertprobleme

3.1 Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = g(t) \quad t \in J \quad (1)$$

Generalvoraussetzung für die komplette Section:

$$a, b, g \in C(J)$$

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0 \quad (2)$$

Dies ist die homogene Gleichung zu (1).

3.1.1 Proposition

- (a) Die Lösung von (2) bilden einen linearen Unterraum $\mathcal{L}$ von $C^2(J)$.
- (b) Die Lösungsmenge $\mathcal{L}_g$ von (1) ist leer oder von der Form

$$\mathcal{L}_g = y_0 + \mathcal{L}$$

wobei y_0 eine spezielle Lösung von (1) ist.

Beweis:

$$(a) \quad y_1, y_2 \in \mathcal{L}, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C} \implies y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in \mathcal{L}$$

$$y'' + ay' + by = \alpha_1 \underbrace{(y_1'' + ay_1' + by_1)}_{=0} + \alpha_2 \underbrace{(y_2'' + ay_2' + by_2)}_{=0}$$

$$(b) \quad y_0, y_1 \in \mathcal{L}_g \text{ Lösung von (1).}$$

$$y = y_1 - y_0, y'' + ay' + by = 0$$

, d.h. $y \in \mathcal{L}$. Also

$$y_1 = y_0 + y \in y_0 + \mathcal{L}$$

$$y = y_1 + y_0, y_0 \in \mathcal{L} \implies y \text{ löst (1).}$$

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = g(t) \quad y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_0' \quad (3)$$

3.1.2 Proposition

Das AWP (3) hat eine eindeutig bestimmte Lösung $y \in C^2(J)$

Beweis: (3) lässt sich als System erster Ordnung schreiben Mit

$$z_1 = y \quad z_2 = y'$$

$$\begin{aligned} z_1' &= z_2 & z_1(t_0) &= y_0 \\ z_2' &= -b(t)z_1 - a(t)z_2 + g(t) & z_2(t_0) &= y_0' \end{aligned}$$

Mit $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$

$$z'(t) = F(z(t)) \quad z(t_0) = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0' \end{pmatrix}$$

wobei $F : J \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$

$$F(t, z) = \begin{pmatrix} z_2 \\ -b(t)z_1 - a(t)z_2 + g(t) \end{pmatrix}$$

Nach Picard-Lindelöf gibt es eine eindeutig bestimmte Lösung von $z'(t) = F(z(t))$ und damit von (3).

3.1.3 Satz

(3) hat eine eindeutig bestimmte Lösung $y \in C^2(J)$ die gegeben ist durch

Satz

$$y(t) = y_0 + y_1(t - t_0) + \int_{t_0}^t (t - s)v(s) \, ds \quad (4)$$

wobei $v \in C(J)$ die Lösung der Integralgleichung

$$v(t) - \int_{t_0}^t k(t, s)v(s) \, ds = f(t) \quad (5)$$

mit

$$\begin{aligned} k(t, s) &= -a(t) - b(t)(t - s) \\ f(t) &= g(t) - a(t)y_1 - b(t)(y_0 + y_1(t - t_0)) \end{aligned} \quad (6)$$

Beweis:

(a) Zu Zeigen: die Äquivalenz von (5) und (3). Sei $y \in C^2(J)$ eine Lösung von (3). Dann ist

$$\begin{aligned} y'(t) &= \underbrace{y'(t_0)}_{=y_1} + \int_{t_0}^t y''(s) \, ds \\ y(t) &= y(t_0) + \int_{t_0}^t y_1 \, ds + \int_{t_0}^t \int_0^s y''(u) \, du \, ds \\ y(t) &= y_0 + y_1(t - t_0) + \int_{t_0}^t (t - s)y''(s) \, ds \end{aligned} \quad (7)$$

Einsetzen in (3) liefert

$$\begin{aligned} y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) &= y''(t) + \int_{t_0}^t (a(t) + b(t)(t - s)) y''(s) \, ds + a(t)y_1 + b(t)y_0 + y_0(t - t_0) \\ &= g(t) \end{aligned}$$

Mit den Notationen in (6) :

$$\begin{aligned} y''(t) - \int_{t_0}^t k(t, s) y''(s) \, ds &= g(t) - \int_{t_0}^t (a(t) + b(t)(t - s)) y''(s) \, ds \\ &= f(t) \end{aligned}$$

$v = y''$ löst (5).

Sei umgekehrt $v \in C(J)$ eine Lösung von (5). Definiere

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 + y_1(t - t_0) + \int_{t_0}^t (t - s)v(s) \, ds & y(t_0) &= y_0 \\ y'(t) &= y_1 + \int_{t_0}^t v(s) \, ds \\ y''(t) &= v(t) \in C(J) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) &= v(t) + a(t)y_1 + \int_{t_0}^t a(t)v(s) \, ds + y_0b(t) + y_1(t - t_0)b(t) \\ &\quad + \int_{t_0}^t b(t)(t - s)v(s) \, ds \\ &= v(t) - \underbrace{\int_{t_0}^t k(t, s)v(s) \, ds}_{=0} + g(t) \\ &= g(t) \end{aligned}$$

Also ist $y(t)$ eine Lösung von (3).

(b) Annahme:

$$C_J = |J| \sup_{t \in J} (|a(t)| + |b(t)||J|) < 1 \quad (8)$$

Zu Zeigen: (5) hat genau eine Lösung $v \in C(J)$. Definiere $Kv(t) = \int_{t_0}^t k(t, s)v(s) \, ds$

als einen Integraloperator. Dann $K : C(J) \rightarrow C(J)$ linear.

$$Idv - Kv = f \quad (9)$$

und damit (5) $\iff$ (9). (5) eindeutig lösbar $\iff Id - K$ invertierbar in $B(C(J))$, dann $v = (Id - K)^{-1}f$.

Nach der Neumannschen Reihe aus Kapitel II, 1.7 genügt es zu zeigen

$$\|K\|_{C(J) \rightarrow C(J)} < 1$$

Beweis: $t \in J$

$$\begin{aligned} |Kv(t)| &\leq \int_{t_0}^t |k(t, s)| \cdot |v(s)| \, ds \\ &\leq |t - t_0| \sup_{s \in J} |k(t, s)| \sup_{s \in J} |v(s)| \\ &\leq |J| \underbrace{\left(\sup_{s \in J} |a(s)| + |J| |b(s)| \right)}_{C_j < 1} \|v\|_{C(J)} \\ &\leq C_j \|v\|_{C(J)} \\ \implies \|Kv\|_{C(J)} &\leq \underbrace{C_j}_{< 1} \|v\|_{C(J)} \end{aligned}$$

- (c) Im allgemeinen unterteile $J = J_1 \cup \dots \cup J_m$ in Teilintervalle die so klein sind, dass $C_{j_1}, \dots, C_{j_m} < 1$.

3.1.4 Definition

Seien y_1, y_2 beliebige Lösungen von (2), $y_1, y_2 \in \mathcal{L}$

$$W(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} \quad t \in J$$

Dies ist die Wronski-Determinante

Definition

3.1.5 Satz

Satz

Für zwei Lösungen $y_1, y_2 \in \mathcal{L}$ von (2) sind äquivalent

- (1) y_1, y_2 sind eine Basis von $\mathcal{L}$, d.h. es gibt zu jeder Lösung $y \in \mathcal{L}$ von (2) Konstanten $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, so dass

$$y(t) = \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) \quad t \in J$$

- (2) y_1, y_2 sind linear unabhängige Funktionen in $C^2(J)$.

- (3) $W(y_1, y_2)(t) \neq 0$ für alle $t \in J$.

- (4) $W(y_1, y_2)(s) \neq 0$ für ein $s \in J$

Beweis:

1) $\implies$ 2) Klar

2) $\implies$ 3) Indirekt:

Sei $W(y_1, y_2)(s) = 0$ für ein $s \in J$, d.h. $\begin{pmatrix} y_1(s) & y_2(s) \\ y_1'(s) & y_2'(s) \end{pmatrix}$ hat linear abhängige Spalten. Also existiert $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ mit

$$\alpha_1 y_1(s) + \alpha_2 y_2(s) = y(s)$$

$$\alpha_1 y_1'(s) + \alpha_2 y_2'(s) = y'(s)$$

Betrachte AWP (3) mit $y(s) = 0, y'(s) = 0$. $y(t) = \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)$ löst dieses AWP. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung : $y(t) = 0, t \in J \implies y_1, y_2$ linear abhängig. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme.

3) $\implies$ 4) Klar

4) $\implies$ 1) Sei $W(y_1, y_2)(s) \neq 0$ für ein $s \in J$. Sei $y : J \rightarrow \mathbb{C}$ eine Lösung von (2). Betrachte

$$\alpha_1 y_1(s) + \alpha_2 y_2(s) = 0$$

$$\alpha_1 y_1'(s) + \alpha_2 y_2'(s) = 0$$

LGS für α_1, α_2 . Die Matrix dieses LGS hat $W(y_1, y_2)$ als Determinante. Da $W(y_1, y_2)(s) \neq 0$ hat das LGS eine eindeutige Lösung α_1, α_2 . Setze $\tilde{y}(t) = \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)$. Dann ist $\tilde{y}$ eine Lösung von (2) mit $\tilde{y}(s) = y(s), \tilde{y}'(s) = y'(s)$ nach dem LGS. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung des AWP (3) folgt $\tilde{y}(t) = y(t)$ für alle $t \in J$

3.1.6 Beispiel

Wiederholung:

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0 \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Ansatz $y(t) = \exp(\lambda t)$.

$$(\lambda^2 + a\lambda + b) \exp(\lambda t) = p(\lambda) \exp(\lambda t) = 0$$

mit

$$p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$$

Dies ist das *charakteristische Polynom*. Kandidaten für Lösungen die Nullstellen von $p(\lambda)$.

1. Fall : Kriechfall Es gibt Nullstellen $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$: $y_1(t) = \exp(\lambda_1 t), y_2(t) = \exp(\lambda_2 t)$

2. Fall : Schwingfall Es gibt $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ mit $\lambda, \bar{\lambda}$ sind Lösungen, d.h. für $\lambda = \alpha + i\beta, \beta \neq 0$
Damit ergibt sich als Lösung

$$\exp(\lambda t) = \exp(\alpha t) (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)) \quad \exp(\bar{\lambda} t) = \exp(\alpha t) (\cos(\beta t) - i \sin(\beta t))$$

d.h. $\cos(\beta t) \exp(\alpha t), \sin(\beta t) \exp(\alpha t)$ sind eine Basis von $\mathcal{L}$

3. Fall: Aperiodischer Grenzfall Es gibt eine zweifache reelle Nullstelle λ

$$y_1(t) = \exp(\lambda t) \quad y_2(t) = t \exp(\lambda t)$$

3.1.7 Reduktionsverfahren von d'Alembert

Annahme: Wir kennen eine Lösung y_1 von (2). Ansatz für eine zweite linear unabhängige Lösung von 2.

$$y(t) = v(t)y_1(t) \tag{10}$$

Gesucht ist $v(t)$.

$$\begin{aligned}y'(t) &= v'(t)y_1(t) + v(t)y_1'(t) \\y''(t) &= v''(t)y_1(t) + 2v'(t)y_1'(t) + v(t)y_1''(t)\end{aligned}$$

Einsetzen in (2).

$$y_1(t)v''(t) + [2y_1'(t) + a(t)y_1(t)]v'(t) + \underbrace{[y_1''(t) + a(t)y_1'(t) + b(t)y_1(t)]}_{=0}v(t) = 0$$

Mit $v' = u$ muss gelten

$$y_1(t)u'(t) + [2y_1'(t) + a(t)y_1(t)]u(t) = 0 \quad (11)$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung, die im Prinzip lösbar ist. Dann ist $v = \int u$ und $y_2(t) = u \cdot y_1$, die zweite Lösung von 2.

Beispiel Legendre Dgl

$$(1 - t^2)y''(t) - 2ty'(t) + 2y(t) = 0 \quad -1 < t < 1$$

Einsetzen zeigt $y_1(t) = t$ eine Lösung ist.

Ansatz für zweite Lösung nach (10) $y(t) = v(t)t$.

$$\begin{aligned}y'(t) &= v(t) + v'(t)t \\y''(t) &= 2v'(t) + tv''(t)\end{aligned}$$

Einsetzen in die DGL:

$$\begin{aligned}0 &= (1 - t^2)(2v'(t) + tv''(t)) - 2t(v(t) + tv'(t)) + 2tv(t) \\&= ((1 - t^2)t)v''(t) + (2(1 - t^2) - 2t^2)v'(t) \\&= (t - t^3)v''(t) + (2 - 4t^2)v'(t)\end{aligned}$$

Mit $u = v'$ folgt

$$\frac{u'}{u} = \frac{2 - 4t^2}{4t(1 - t^2)} = -\frac{2}{t} - \frac{2t}{1 - t^2}$$

Also

$$\ln|u| = -\ln t^2 - \ln(1 - t^2) + C = \ln \frac{d}{t^2(1 - t^2)}$$

Damit

$$u(t) = \frac{d}{t^2(1-t^2)}$$

Damit

$$v(t) = \int u(t) \, dt = d \left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+t}{1-t} \right) \right)$$

Nach (10)

$$y_2(t) = -1 + \frac{t}{2} \ln \left(\frac{1+t}{1-t} \right)$$

Zur Lösung von (3) . Wie findet man eine spezielle Lösung y_p ?

3.1.8 Methode der Variation der Konstanten

Annahme: Wir kennen eine Basis y_1, y_2 der Lösungen des homogenen Systemes, d.h.

$$y(t) = u_1 y_1(t) + u_2 y_2(t) \quad u_1, u_2 \in \mathbb{C}$$

allgemeine Lösung (2).

Ansatz:

$$y(t) = u_1(t) y_1(t) + u_2(t) y_2(t) \tag{12}$$

Ersetze Konstanten u_1, u_2 durch $u_1(t), u_2(t)$ die noch zu bestimmen sind.

$$y'(t) = u_1'(t) y_1(t) + u_1(t) y_1'(t) + u_2'(t) y_2(t) + u_2(t) y_2'(t)$$

Annahme:

$$u_1'(t) y_1(t) + u_2'(t) y_2(t) = 0 \tag{13}$$

$$y'(t) = u_1(t) y_1'(t) + u_2(t) y_2'(t)$$

$$y''(t) = u_1'(t) y_1'(t) + u_1(t) y_1''(t) + u_2'(t) y_2'(t) + u_2(t) y_2''(t)$$

Einsetzen in (1) liefert

$$u_1 \underbrace{[y_1'' + a y_1' + b y_1]}_{=0} + u_2 \underbrace{[y_2'' + a y_2' + b y_2]}_{=0} + u_1' y_1' + u_2' y_2' = g$$

Da $y_1, y_2 \in \mathcal{L}$ folgt

$$u_1' y_1' + u_2' y_2 = g \quad (14)$$

(13),(14) sind zwei Gleichungen für zwei unbekannte Funktionen u_1', u_2' . Dies lässt sich schreiben zu

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}$$

Die Determinante ist die Wronski-Determinante mit $W(y_1, y_2)(t) \neq 0$ auf J .

Nach Cramer'scher Regel für $t \in J$

$$u_1'(t) = -\frac{y_2(t)g(t)}{W(y_1, y_2)(t)}$$

$$u_2'(t) = \frac{y_1(t)g(t)}{W(y_1, y_2)(t)}$$

Zusammenfassung Nach (12) ist eine spezielle Lösung von (3) gegeben durch

$$y_p(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t)$$

wobei

$$u_1(t) = -\int \frac{y_2(t)g(t)}{W(y_1, y_2)(t)} dt \quad u_2(t) = \int \frac{y_1(t)g(t)}{W(y_1, y_2)(t)} dt$$

Die allgemeine Lösung von (13) hat dann die Form

$$y(t) = y_p(t) + c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

3.1.9 Beispiel

$$t^2 y'' + t y' - y = t \ln t$$

Sei $J \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(a)

$$y_1(t) = t \quad y_2(t) = \frac{1}{t}$$

sind linear unabhängige Lösungen von $t^2 y'' + t y' - y = 0$

(b)

$$y'' + \frac{1}{t} y' - \frac{1}{t^2} = \frac{\ln t}{t} = g(t)$$

Ansatz :

$$y_p(t) = tu_1(t) + \frac{1}{t}u_2(t)$$

Nach (13) und (14)

$$\begin{aligned} tu_1'(t) + \frac{1}{t}u_2'(t) &= 0 \\ u_1'(t) - \frac{1}{t^2}u_2'(t) &= \frac{\ln t}{t} \end{aligned}$$

Lösung

$$u_1'(t) = \frac{\ln t}{2t} \quad u_2'(t) = -\frac{t \ln t}{2}$$

Dann

$$u_1(t) = \frac{\ln^2(t)}{4} \quad u_2(t) = -\frac{1}{8}t^2(2 \ln t - 1)$$

Allgemeine Lösung

$$y(t) = \frac{1}{4}t \ln^2(t) - \frac{1}{4} \ln t + c_1 t + \frac{c_2}{t}$$

3.1.10 Definition

Ein lineares Randwertproblem 2. Ordnung auf einem Intervall $J = [t_1, t_2]$ hat die Form

$$Ay = y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = g(t)$$

und die Randbedingungen

$$R_1 y = \alpha_1 y(t_1) + \alpha_2 y'(t_1) = \rho_1 \quad R_2 y = \beta_1 y(t_2) + \beta_2 y'(t_2) = \rho_2$$

wobei $a, b, g \in C[t_1, t_2]$ und $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \rho_1, \rho_2$ konst. mit $(\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2) \neq (0, 0)$.

Definition

3.1.11 Proposition

Seien y_1, y_2 linear unabhängige Lösungen von $Ay = 0$. Dann sind äquivalent:

- (a) $Ay = g, R_j y = \rho_j, j = 1, 2$ hat eine eindeutige Lösung
- (b) $Ay = g, R_j y = 0, j = 1, 2$ hat eine eindeutige Lösung
- (c) $Ay = 0, R_j y = 0, j = 1, 2$ hat nur die Lsg $y = 0$

(d)

$$\begin{vmatrix} R_1 y_1 & R_1 y_2 \\ R_2 y_1 & R_2 y_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Beweis: Speziell a äquivalent d: Sei y_p eine spezielle Lösung von $Ay = g$. Die allgemeine Lösung von $Ay = g$ ist dann

$$y = y_p + c_1 y_1 + c_2 y_2$$

Dann ist für $k = 1, 2$:

$$R_k y - R_k y_p = c_1 R_k y_1 + c_2 R_k y_2$$

Also 2 Gleichungen für 2 Unbekannte was genau dann lösbar ist, wenn die Bedingung d erfüllt ist. Die Äquivalenzen zwischen b und b bzw. c und d folgen dann sofort, da die ρ_j und g in d nicht auftauchen.

3.1.12 Beispiel

$$u'' + u = 0$$

mit

$$u(0) = 1, u(\pi) = 1$$

ist nicht lösbar. Aber mit

$$u(0) = 1, u(\pi) = -1$$

hat unendlich viele Lösungen.

3.2 Das Sturm'sche Randwertproblem und seine Green'sche Funktion

3.2.1 Bemerkung

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = g(t)$$

Multiplikation mit $p(t) = \exp[\int a(t) dt]$ führt auf die Form:

$$L(y) = (p(x)y'(x))' + q(t)y(t) = f(t) \quad ((1) = (3))$$

$$\begin{aligned} R_1(y) &= \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0 \\ R_2(y) &= \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

3.2.2 Definition

Sei $j = [a, b]$ und $p \in C^1([a, b], \mathbb{R})$, $q, f \in C([a, b], \mathbb{R})$. Sei $(\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$. Die obige Differentialgleichung $L(y) = f(t)$ mit den homogenen Randbedingungen R_1 und R_2 heißt Sturm'sches Randwertproblem. Ist $p > 0$ auf $[a, b]$ dann heißt dieses Sturm'sche Randwertproblem regulär.

Definition

Beispiel

Die DGLs

(a) $y'' + y = 0$

(b) $y'' - ty = 0$ (Airy'sche DGL)

sind regulär. Die Legendre'sche DGL

$$((1 - t^2)y')' + \lambda y = (1 - t^2)y'' - 2ty' + \lambda y = 0$$

ist nicht regulär auf $[-1, 1]$.

Das Ziel ist das Finden einer Green'schen Funktion G mit

$$y(x) = \int_a^b G(x, t) f(t) \, dt$$

3.2.3 Lemma (Lagrange'sche Identität)

Für $L(y) = (py')' + qy$ und $y_1, y_2 \in C^2(J)$ gilt

$$y_1 L(y_2) - y_2 L(y_1) = \frac{d}{dt} p(y_1 y_2' - y_2 y_1') = \frac{d}{dt} pW(y_1, y_2)$$

3.2.4 Proposition

Seien y_1, y_2 zwei linear unabhängige Lösungen von $L(y) = 0$ und das Sturm'sche RWP ist lösbar. Dann sind auch die folgenden beiden Funktionen

$$v_1(t) = (R_1 y_2) y_1(t) - (R_1 y_1) y_2(t) \quad v_2(t) = (R_2 y_2) y_1(t) - (R_2 y_1) y_2(t) \quad ((4))$$

linear unabhängige Lösungen von $L(y) = 0$ und außerdem gilt:

$$R_1 v_1 = 0 \quad R_2 v_2 = 0 \quad ((5))$$

$$\int_a^b v_1 L(v_2) - v_2 L(v_1) dt = 0 \quad ((6))$$

Beweis:

$$R_1 v_1 = (R_1 y_2) R_1 y_1 - (R_1 y_1) R_1 y_2 = 0$$

Weiter z.z. genau dann v_1, v_2 linear unabhängig, wenn

$$\begin{vmatrix} R_1 y_2 & -R_1 y_1 \\ R_2 y_2 & -R_2 y_1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} R_1 y_2 & R_1 y_1 \\ R_2 y_2 & R_2 y_1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{aligned} \int_a^b [v_1 L(v_2) - v_2 L(v_1)] &= [p(v_1 v_2' - v_2 v_1')]_a^b \\ &= p(b) \underbrace{(v_1(b) v_2'(b) - v_2(b) v_1'(b))}_{=0} - p(a) \underbrace{(v_1(a) v_2'(a) - v_2(a) v_1'(a))}_{=0} \end{aligned}$$

Denn für $\alpha_2 = 0$ ist $v_1(a) = v_2(a) = 0$ und für $\alpha_a \neq 0$ ist $v_1'(a) = \alpha_1/\alpha_2 v_1(a)$

3.2.5 Definition

Definition

Seien v_1, v_2 linear unabhängige Lösungen von $L(y) = 0$ mit $R_1 v_1 = 0 = R_2 v_2$. Die Funktion $G : y^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Setze $W(a) = W(v_1, v_2)(a)$.

$$G(x, t) = \begin{cases} \frac{v_1(x) v_2(t)}{p(a) W(a)} & \text{für } a \leq x \leq t \leq b \\ \frac{v_1(t) v_2(x)}{p(a) W(a)} & \text{für } a \leq t \leq x \leq b \end{cases}$$

Diese Funktion heißt Green'sche Funktion von $l(y) = 0$, $R_1 y = R_2 y = 0$.

3.2.6 Bemerkung

Die Green'sche Funktion hat die Eigenschaften:

- (a) G ist stetig auf J^2
- (b) $G_x(x * 0, x) - G_x(x - 0, x) = 1/p(x)$ für $a \leq x \leq b$ (Sprungrelation)
- (c) Für jedes $t \in J$ fest ist $x \rightarrow y(x) = G(x, t)$ eine Lösung von $Ly = 0$ für $x \in J \setminus \{t\}$ mit $y \in C^2(J \setminus \{t\})$

Beweis: Die Punkte a) und c) sind nach der Definition von oben richtig. Damit muss man noch b) zeigen:

$$\lim_{0 < \delta \rightarrow 0} G_x(x + \delta, x) = \frac{v_1(x)v_2'(x)}{p(a)W(a)}$$

$$\lim_{0 < \delta \rightarrow 0} G_x(x - \delta, x) = \frac{v_1'(x)v_2(x)}{p(a)W(a)}$$

Daraus folgt

$$G_x(x + 0, x) - G_x(x - 0, x) = \frac{1}{p(x)} \underbrace{\frac{p(x)W(x)}{p(a)W(a)}}_{=\text{const}}$$

da $W(x) = v_1v_2' - v_1'v_2$ Es muss noch gezeigt werden, dass $p(x)W(x) = p(a)W(a)$ für $x \in [a, b]$. Dies gilt jedoch nach 2.3 (Lagrange Identität), da $L(v_1) = 0 = L(v_2)$

3.2.7 Satz

Sei $G : J^2 \rightarrow \mathbb{R}$ die Green'sche Funktion des regulären Sturm'schen Randwertproblems $L(u) = 0, R_1u = r_2u = 0$ habe nur die Lösung $u = 0$. Dann hat $L(u) = f, R_1u = 0, R_2u = 0$ die eindeutig bestimmte Lösung

$$u(x) = \int_a^b G(x, t)f(t)dt \quad x \in [a, b]$$

Satz

Beweis:

$$u(x) = \int_a^x G(x, t)f(t)dt + \int_x^b G(x, t)f(t)dt$$

Ableiten für $x \in (a, b)$:

$$\begin{aligned}
 u'(x) &= G(x, x)f(x) + \int_a^x g_x(x, t)f(t)dt - G(x, x)f(x) + \int_x^b G_x(x, t)f(t)dt \\
 &= \int_a^b G_x(x, t)f(t)dt \\
 u''(x) &= G_x(x+0, x)f(x) + \int_a^x G_{xx}(x, t)f(t)dt - G_x(x-0, x)f(x) + \int_x^b G_{xx}(x, t)f(t)dt \\
 &= \int_a^b G_{xx}(x, t)f(t)dt + \frac{f(x)}{p(x)}
 \end{aligned}$$

Einsetzen in

$$\begin{aligned}
 Lu &= pu'' + pu' + qu \\
 &= f(x) + \int_a^b \underbrace{[p(x)G_{xx}(x, t) + p'G_x(x, t) + q(x)G(x, t)]}_{G(x, t)=0, \quad x \neq 0} f(t)dt \\
 &= f(x)
 \end{aligned}$$

Randbedingungen:

$$\begin{aligned}
 R_1 u &= \int_a^b G(a, t) + \alpha_2 G_x(a, t)f(t)dt \\
 &= \frac{1}{p(a)W(a)} \int_a^b \underbrace{(R_1 v_1)}_{=0} v_2(t)f(t)dt \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Genauso gilt $R_2 u = 0$.

3.3 Sturm-Liouville Eigenwertproblem

3.3.1 Einführung

$$Ly = \lambda y \quad R_1(y) = R_2(y) = 0 \quad (\text{SLE})$$

Gesucht ist dann ein $y \in C^2(J)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ sodass SLE gilt (was nicht für alle λ der Fall ist, vgl. Obertöne). Eine Umformung führt auf

$$(py')' + (q + \lambda)y = 0$$

In Kapitel 2 hatten wir genau solche Gleichungen (mit Spektren) betrachtet, denn

$$Ly = \lambda y \iff (L - \lambda E)y = 0$$

Fasse also L als Operator auf mit

$$L^2(J) \supset D(L) \xrightarrow{L} L^2(J)$$

und wende auf L die Theorie aus Kapitel 2 an.

3.3.2 Wo???

3.3.3 Definition

Benutze

$$D(L) = \{y \in C^1(J) \mid \exists \tilde{y} \in L^2(J) : y'(t) = y'(a) + \int_a^t \tilde{y}(s) \, ds, R_1(y) = R_2(y) = 0\}$$

als Definitionsbereich.

Definition

Die Randwertbedingungen werden also direkt in den Definitionsbereich eingebaut. Dann für $y \in D(L)$ ist

$$Ly = p\tilde{y} + p'y' + qy$$

Das Ziel ist jetzt zu zeigen, dass L selbstadjungiert in $L^2(J)$ ist.

3.3.4 Proposition

Betrachte auf $D(L)$ die Norm

$$\|y\|_{2,2}^2 = \|y\|_{L^2}^2 + \|y'\|_{L^2}^2 + \|\tilde{y}\|_{L^2}^2$$

(welche äquivalent zur Graphennorm ist. Siehe unten). Dann ist

(a)

$$J : (D(L), \|\cdot\|_{L^2}) \rightarrow C^1(J), J(y) = y$$

ist stetig bezüglich Supremumsnorm.

- (b) Jede beschränkte Folge y_n in $D(L)$ hat eine Teilfolge y_{n_k} , so dass $y_{n_k}(t), y'_{n_k}(t)$ CF in $\mathbb{R}$ für alle $t \in J$ und y_{n_k} CF in $L^2(J)$.

Beweis: Sei $(y_n) \subset D(L)$ beschränkt (z.B. $\|\tilde{y}\|_{L^2} \leq 1$). Dann gibt es nach dem Satz über die schwache Kompaktheit $U_{L^2(J)}$ eine Teilfolge y_n (Achtung: Selbe Notation), die schwach konvergiert. Dann

(a) Da

$$\|y'_n\|_{L^2[a,b]} = \left(\int |y'_n|^2 dt \right)^{1/2} \leq 1$$

gibt es ein $t_n \in [a, b]$ mit

$$|y'_n(t_n)| \leq \frac{1}{(b-a)^{1/2}}$$

Dann gilt für alle $t \in [a, b]$:

$$|y'_n(t)| \leq |y_n(t_n)| + \left| \int_{t_n}^t \tilde{y}(s) ds \right| \leq \frac{1}{(b-a)^{(1/2)}} + |b-a|^{1/2} \|\tilde{y}\|_{L^2(J)} \leq \frac{1}{(b-a)^{(1/2)}} + (b-a)^{1/2} =: C$$

Also ist Das Supremum von y' abschätzbar durch C . Analog lässt sich das y_n durch ein weiteres C gegen die Ableitung abschätzen, also

$$\|y_n\|_{C(J)} \leq C^2$$

und daraus die Behauptung.

- (b) Da $y_n(a), y'_n(a)$ beschränkt durch C^2 mache die Annahme, dass sie CF in $\mathbb{R}$ sind (Eigentlich nur Teilfolgen, aber wir wechseln die Notation). Dann betrachte

$$y'_n(t) - y'_m(t) = y'_n(a) - y'_m(a) + \int_a^t \tilde{y}_n(s) - \tilde{y}_m(s) ds = y'_n(a) - y'_m(a) + \int_a^b \tilde{y}_n(s) - \tilde{y}_m(s) \chi_{[0,t]}(s) ds$$

Da $\chi_{[0,t]}(s)$ ein Element in L^2 ist, geht das ganze Integral gegen Null, da die $\tilde{y}$ eine CF in L^2 ist. Also sind die $y'_n(t)$ für jedes feste $t \in J$ eine CF in $\mathbb{R}$. Setze dann

$$\tilde{y}(t) = \lim y'_n(t) \quad |y'_n(t)| \leq C$$

Nach dem Konvergenzsatz von Lebesgue ist dann

$$\|\tilde{y} - y'_n\|_{L^2} \rightarrow 0$$

Genauso für die $y_n(t)$.

3.3.5 Proposition

- (a) $(D(L), \|\cdot\|_{2,2})$ ist ein Hilbertraum
- (b) $D = \{y \in C^2(J) \mid R_1(y) = R_2(y) = 0\}$ liegt dicht in $D(L)$

Beweis:

- (a) Für $y_1, y_2 \in D(L)$ setze

$$\langle\langle y_1, y_2 \rangle\rangle = \langle \tilde{y}_1, \tilde{y}_2 \rangle_{L^2} + \langle y'_1, y'_2 \rangle_{L^2} + \langle y_1, y_2 \rangle_{L^2}$$

Dann ist das ein Skalarprodukt, welches die gesuchte Norm erzeugt. Wir wissen, dass der Raum

$$H^2(J) = \{y \in C^1(J) \mid \exists \tilde{y} \in L^2(J) : y'(t) = y'(a) + \int_a^t \tilde{y}(s) \, ds\}$$

ein Hilbertraum ist. z.z. ist, dass $D(L)$ ein abgeschlossener Unterraum davon ist. Da die Abbildung i von H^2 auf $C^1(J)$ stetig ist (gleiche Argumentation wie in 3.4) und die Abbildungen R_j linear und stetig von $C_1(J)$ auf $\mathbb{R}$ abbilden, ist die Komposition auch stetig und linear. Davon muss der Kern jedoch abgeschlossen sein. Nach Definition ist $D(L)$ jedoch der Durchschnitt dieser beiden Kerne und damit auch abgeschlossen.

- (b) oBdA setze $[a, b] = [0, 1]$. Gegeben ist $y \in D(L)$. Da $C^2(J)$ dicht in $H^2(J)$ gibt es eine Folge $\tilde{z}_n \in C^2(J)$ mit

$$\|\tilde{y} - \tilde{z}_n\|_{L^2(J)} \rightarrow 0$$

nach 3.4.b können wir nach Auswahl einer weiteren Teilfolge annehmen, dass $z_n(1) \rightarrow y(1)$ und $z'_n(1) \rightarrow y'(1)$ wobei

$$\tilde{z}_n = y'(0) + \int_0^t \tilde{z}_n(s) \, ds \quad z_n = y(0) + \int_0^t \tilde{z}_n(s) \, ds$$

Setze $y_n(t) = z_n(t) + c_n t + d_n t^2$ mit

$$c_n = 2y(1) - 2z_n(1) - y'(1) + \tilde{z}_n(1) \quad d_n = y'(1) - \tilde{z}_n(1) - y(1) + z_n(1)$$

Also $y_n \in C^2(J)$ und $R_1(y_n) = R_1(y) = R_2(y_n) = R_2(y) = 0$. Offensichtlich ist auch

$$\|y_n - z_n\|_{L^2} \rightarrow 0 \quad \|y'_n - z'_n\|_{L^2} \quad \|\tilde{y}_n - \tilde{z}_n\|_{L^2} \rightarrow 0$$

da d_n und c_n gegen Null gehen.

3.3.6 Proposition

- (a) Auf $D(L)$ sind $\|\cdot\|_{2,2}$ und $\|\cdot\|_L$ (die Graphennorm) äquivalent.
- (b) L ist ein abgeschlossener Operator und $D(L)$ ist kompakt eingebettet in $L^2(J)$.

Beweis:

- (a) Nach 3.5.b genügt es $y_n, y \in D$ zu betrachten. Annahme:

$$\|y - y_n\|_{2,2} \rightarrow 0$$

Dann gehen auch $\|y - y_n\|_{L^2}$, $\|y' - y'_n\|_{L^2}$ und $\|y'' - y''_n\|_{L^2}$ gegen Null. Außerdem

$$\|L(y_n - y)\| \leq \|p(y''_n - y'')\|_{L^2} + \|p'(y'_n - y')\|_{L^2} + \|q(y_n - y)\|_{L^2} \leq \|p\|_\infty \|y''_n - y''\|_{L^2} + \|p'\|_\infty \|y'_n - y'\|_{L^2} + \|q\|_\infty \|y_n - y\|_{L^2} \rightarrow 0$$

Also

$$\|y - y_n\|_L \rightarrow 0$$

Umgekehrte Annahme:

$$\|y - y_n\|_L \rightarrow 0$$

d.h.

$$\|y - y_n\|_{L^2} \rightarrow 0 \quad \|L(y - y_n)\|_{L^2} \rightarrow 0$$

Da aber

$$(py')' = L(y) - q(y)$$

muss auch

$$\|(p(y' - y'_n))'\|_{L^2} \rightarrow 0$$

Wie in 3.4.b. muss auch

$$\|py' - py'_n\|_{L^2} \rightarrow 0$$

Da mit p auch $1/p$ stetig ist, ist

$$\|y' - y'_n\|_{L^2} \leq \left\| \frac{1}{p} \right\|_\infty \|p(y' - y'_n)\|_{L^2} \rightarrow 0$$

Mit

$$py'' - L(y) - q(y) - p'y'$$

folgt analog auch

$$\|y'' - y_n''\|_{L^2} \rightarrow 0$$

- (b) Dann muss auch $(D(L), \|\cdot\|_L)$ vollständig sein. Die kompakte Einbettung folgt aus 3.4.b.

3.3.7 Lemma

Sei $h \in C^1(J)$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $\gamma(\varepsilon) < \infty$ mit $\forall x \in J$:

$$h(x)^2 \leq \varepsilon \int_a^b h'(t)^2 \, dt + \gamma(\varepsilon) \int_a^b h(t)^2 \, dt$$

Beweis: Wähle $x_0 \in J$ mit

$$h(x_0)^2 = \min h(x)^2$$

Für $x \in J$ ist dann

$$h(x)^2 = h(x_0)^2 + \int_{x_0}^x [h(t)^2]' \, dt = h(x_0)^2 + \int_{x_0}^x 2h(t)h'(t) \, dt$$

Mit Hölder:

$$\leq h(x_0)^2 + 2 \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{x_0}^x h(t)^2 \, dt \right)^{1/2} \left(\varepsilon \int_{x_0}^x h'(t)^2 \, dt \right)^{1/2}$$

Mit $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ ist

$$\leq h(x_0)^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_{x_0}^x h(t)^2 \, dt + \varepsilon \int_{x_0}^x h'(t)^2 \, dt$$

Den ersten Teil können wir durch das Integral abschätzen:

$$\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b h(t)^2 \, dt + \frac{1}{\varepsilon} \int_a^b h(t)^2 \, dt + \varepsilon \int_a^b h'(t)^2 \, dt$$

mit

$$\gamma(\varepsilon) = \frac{1}{b-a} + \frac{1}{\varepsilon}$$

folgt die Behauptung.

3.3.8 Satz

Satz

Der Operator L aus 3.3. ist ein Operator in $L^2(J) \supset D(L) \rightarrow L^2(J)$ selbstadjungiert. Es gibt Eigenvektoren (h_n) von L , die eine ONB in $L^2(J)$ bilden mit $h_n \in D(L) \subset C^1(J)$ und deren EW eine streng monoton steigende Folge λ_n mit $\lambda_n \rightarrow \infty$ bilden, so dass für $y \in D(L)$:

$$Ly = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle y, h_n \rangle_{L^2(J)} h_n$$

Außerdem

$$D(L) = \{y \in L^2(J) \mid \sum |\lambda_n|^2 |\langle y, h_n \rangle|^2 < \infty\}$$

Beweis: In 3.5 b wurde gezeigt: $D(L)$ dicht in L^2 , kompakt eingebettet und L ist abgeschlossen. In 2.4: L ist symmetrisch und $\langle Ly, z \rangle = \langle y, Lz \rangle$. Nach Übung: $\exists \mu \in \mathbb{R}$, das nicht Eigenwert von L ist. Setze $L_\mu(y) = (py')' + (q - \mu)y$. L_μ hat nicht den Eigenwert 0. Da L_μ nicht den EW 0 hat, gibt es zu jedem $g \in C(J)$ ein $y \in D(L)$ mit

$$L_\mu(y) = g$$

d.h. L_μ hat ein dichtes Bild in $L^2(J)$. Nach Kap II Satz 4.10. ist L selbstadjungiert. Nach Kap II § 5 gibt es Eigenwerte (λ_n) mit $|\lambda_n| \rightarrow \infty$ mit Eigenvektoren $h_n \in D(L)$, so dass die h_n eine ONB in $L^2(J)$ bilden und die verlangte Darstellung

$$Ly = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle y, h_n \rangle_{L^2(J)} h_n$$

gilt.

z.z. die Eigenwerte sind einfach (aus $\lambda_n = \lambda_m$ folgt $n = m$). Sei also $\lambda_n = \lambda_m$ aber $n \neq m$ d.h. $h_n \perp h_m$. Dann sind h_n, h_m Lösungen zu

$$Ly + (q - \lambda_n)y = 0, R_1(y) = R_2(y) = 0$$

Aus den Randbedingungen folgt

$$\alpha_1 h_n(a) + \alpha_2 h_n'(a) = 0 \quad \alpha_1 h_m(a) + \alpha_2 h_m'(a) = 0$$

Also ist vor allem die Wronski-Determinante Null und damit nach Prop 1.12. h_n und h_m linear abhängig. Widerspruch. Wenn es ein M gäbe mit $\lambda_n \geq M$ ist die Behauptung, dass die λ_n streng monoton wachsen bewiesen. Sei dazu $-\lambda$ ein EW mit normiertem EV h . Dann gilt

$$\lambda = \lambda \int_a^b h^2(t) \, dt = \int_a^b -(-\lambda h)h \, dt = - \int_a^b (Lh)h \, dt$$

L eingesetzt ergibt

$$= - \int_a^b [(ph')' + qh]h \, dt = - \int_a^b (ph')'h \, dt - \int_a^b qh^2 \, dt = -[ph'h]_a^b + \int_a^b p(h')^2 \, dt - \int_a^b qh^2 \, dt$$

Aus den Randbedingungen folgt, dass es $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ gibt, mit

$$-[ph'h]_a^b = c_1 h^2(a) + c_2 h^2(b)$$

Denn für $\alpha_1 = 0$ oder $\beta_1 = 0$ wähle $c_a = 0$ oder $c_2 = 0$. Falls $\alpha_1 \neq 0$ oder $\beta_1 \neq 0$ wähle $c_1 = -\alpha_1/\alpha_2$ und $c_1 = -\beta_1/\beta_2$. Insgesamt folgt, dass

$$\lambda = c_1 h(a)^2 + c_2 h(b)^2 + \int_a^b p(h')^2 \, dt - \int_a^b qh^2 \, dt \geq ?$$

1. Fall: $c_1, c_2 < 0$ Nach 3.7. gilt

$$\begin{aligned} &\geq (c_1 + c_2) \left[\varepsilon \int_a^b (h')^2 + \gamma(\varepsilon) \int_a^b h^2 \right] + \int_a^b p(h')^2 \, dt - \int_a^b qh^2 \, dt \\ &= \int_a^b [(c_1 + c_2)\varepsilon + p](h')^2 \, dt + (c_1 + c_2)\gamma(\varepsilon) \int_a^b h^2 \, dt - \int_a^b qh^2 \, dt \geq (c_1 + c_2)\gamma(\varepsilon) - \sup |q(t)| = M \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

2. Fall: $c_1 < 0, c_2 \geq 0$. Benutze $c_2 h(b)^2 \geq 0$ und $h(a)^2$ abschätzen wie oben.

3. Fall: $c_1 \geq 0, c_2 < 0$. Benutze $c_1 h(a)^2 \geq 0$ und $h(b)^2$ abschätzen wie oben.

4. Fall: $c_1 \geq 0, c_2 \geq 0$.

$$\lambda \geq - \int_a^b qh^2 \, dt \geq \sup |q(t)| = M$$

Zur Lösungstheorie von

$$Ly - \lambda y = f \quad R_1(y) = R_2(y) = 0$$

Formale Lösung:

$$y = (L - \lambda)^{-1} f$$

falls $(L - \lambda)^{-1}$ existiert.

3.3.9 Korollar

- (a) Falls λ kein Eigenwert von L ist, so hat $Ly - \lambda y = f$ für alle $f \in L^2(J)$ genau eine Lösung mit

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n - \lambda} \left(\int_a^b f(s) h_n(s) \, ds \right) h_n$$

- (b) Falls $\lambda = \lambda_M$ ein EW von L ist, dann ist die Gleichung lösbar, genau dann wenn

$$\int_a^b h_M(t) f(t) \, dt = 0$$

und die Lösungsmenge ist

$$y(t) = \sum_{n=1, n \neq m}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n - \lambda} \left(\int_a^b f(s) h_n(s) \, ds \right) h_n + C h_m$$

mit C beliebig.

Beweis:

- (a)

$$(L - \lambda) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n - \lambda} \left(\int_a^b f(s) h_n(s) \, ds \right) h_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n - \lambda} \left(\int_a^b f(s) h_n(s) \, ds \right) (L - \lambda) h_n = f$$

- (b) Kapitel II, 4.10:

$$L^2(J) = \text{Kern}(\lambda - L) \oplus R(\lambda - L)$$

Da

$$\text{Kern}(\lambda - L) = \text{span}(h_m)$$

folgt die Behauptung.

3.4 Sobolevräume

3.4.1 Wiederholung

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet

(a)

$$L^1_{loc}(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ Lebesgue- meßbar und } \int_K |f| \, dx < \infty \text{ für } K \subset \Omega \text{ kompakt} \}$$

z.B.

$$p(x) = \sum_{k=1}^N a_k x^{\alpha_k} \quad a_n \in \mathbb{C}, \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$$

$$p \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$$

(b) $\alpha \in \mathbb{N}_0^n, D^\alpha f = (\partial_{x_1})^{\alpha_1} (\partial_{x_2})^{\alpha_2} \dots (\partial_{x_n})^{\alpha_n} f(x), g, f \in C^\infty(\mathbb{R}^n), |\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$

Partielle Differentiation

$$\int_{\Omega} (D^\alpha f) g \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f (D^\alpha g) \, dx \quad (3.1)$$

Beispiel: $\alpha_j = \delta_{ij}$

$$\int_{\Omega} (\partial_{x_i} f) g \, dx = (-1) \int_{\Omega} f (\partial_{x_i} g) \, dx$$

3.4.2 Definition

Sei $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ und $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$. Dann heißt $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ eine schwache Ableitung von f der Ordnung α , falls für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt

$$\int_{\Omega} f (D^\alpha \varphi) \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} g \varphi \, dx \quad (3.2)$$

Notation:

$$g = D^\alpha f = f^{(\alpha)}$$

Definition

Bemerkung

Nach 4.1, 4.2 gilt

- Falls die klassische Ableitung $D^\alpha f$ existiert, so ist sie auch eine schwache Ableitung.
- Zwei schwache Ableitungen sind fast überall gleich, wir definieren also *eine* Äquivalenzklasse von Funktionen.

3.4.3 Proposition

Sei $f \in C[a, b]$. Dann sind äquivalent

- (a) $\tilde{f}$ ist eine schwache Ableitung von f , d.h.

$$\int_a^b f \varphi' \, dx = - \int_a^b \tilde{f} \varphi \, dx$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(a, b)$

- (b)

$$f(t) = f(a) + \int_a^t \tilde{f}(s) \, ds \quad t \in [a, b]$$

In diesem Falle ist $\tilde{f} = Df$.

Bemerkung: Die schwache Ableitung erfüllt den Fundamentalsatz der Differential- und Integralgleichung.

Beispiel $f(x) = |x|, x \in [-1, 1]$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} -1 & x \in [-1, 0] \\ 1 & x \in (0, 1] \end{cases}$$

Wir sehen

$$f(t) = 1 + \int_{-1}^t \tilde{f}(s) \, ds$$

Beweis: Von b) nach a)

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(x) \varphi'(x) \, dx &= \int_a^b \left[f(a) + \int_a^x \tilde{f}(s) \, ds \right] \varphi'(x) \, dx \\
 &= \int_a^b \int_a^x \tilde{f}(s) \, ds \varphi'(x) \, dx \\
 &= \int_a^b \left(\int_s^b \varphi'(x) \, dx \right) \tilde{f}(s) \, ds \\
 &= \int_a^b [\varphi(b) - \varphi(s)] \tilde{f}(s) \, ds \\
 &= - \int_a^b \tilde{f}(s) \varphi(s) \, ds \\
 \implies \tilde{f} &= Df
 \end{aligned}$$

Für a) nach b) siehe Ana III Kapitel III 4.6. Zu finden auf <http://ugroup.hostzi.com> oder M. Dobrowdski Angewandte Funktionalanalysis Springer (Kap 5 , Sobolevräume) .

3.4.4 Beispiel

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n (\partial_{x_i})^2 f, g \in L_{loc}^1(\Omega).$$

$$\Delta f = g$$

Interpretation als schwache Ableitung

$$\int_{\Omega} (\Delta f) \varphi \, dx = \int_{\Omega} f (\Delta \varphi) \, dx$$

für alle $\varphi_0^\infty(\Omega)$.

3.4.5 Proposition

$f \in L_{loc}^1(\Omega)$ habe eine schwache Ableitung $D^\alpha f$. $g = D^\alpha f \in L_{loc}^1(\Omega)$ habe eine schwache Ableitung $D^\beta g$. Dann hat f eine schwache Ableitung der Ordnung $\alpha + \beta$ mit

$$D^{\alpha+\beta} f = D^\beta (D^\alpha f)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} f (D^{\alpha+\beta} \varphi) \, dx &= \int_{\Omega} f (D^{\alpha} (D^{\beta} \varphi)) \, dx \\
&= (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} (D^{\alpha} f) D^{\beta} \varphi \, dx \\
&= (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} g D^{\beta} \varphi \, dx \\
&= (-1)^{|\alpha|} (-1)^{|\beta|} \int_{\Omega} (D^{\beta} g) \varphi \, dx \\
&= (-1)^{|\alpha|+|\beta|} \int_{\Omega} D^{\beta} (D^{\alpha} f) \varphi \, dx \\
\implies D^{\beta} (D^{\alpha} f) &= D^{\alpha+\beta} f \quad \text{f.ü.}
\end{aligned}$$

3.4.6 Definition

Definition

$H^m(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) : D^{\alpha} f \text{ existieren als schwache Ableitung und } D^{\alpha} f \in L^2(\Omega) \text{ für alle } |\alpha| \leq m\}$

$$\langle f, g \rangle_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} (D^{\alpha} f) \overline{(D^{\alpha} g)} \, dx$$

$$\|f\|_m = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^{\alpha} f\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

heißt Sobolevraum der Ordnung m .

3.4.7 Satz

Satz

$(H^m, \langle \cdot, \cdot \rangle_m)$ ist ein Hilbertraum.

Beweis: Vollständigkeit:

Sei (f_k) eine Cauchyfolge in $H^m \implies (f_k^\alpha)$ ist Cauchyfolge in $L^2(\Omega), \forall |\alpha| \leq m$. Da $L^2(\Omega)$ vollständig ist: $f_\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} Df_k^\alpha \in L^2(\Omega)$ konvergiert in $L^2(\Omega)$. Insbesondere für $\alpha = (0, \dots, 0)$ $f = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k$ in $L^2(\Omega)$.

Zu Zeigen: $D^\alpha f = f_\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} D^\alpha f_k, D^\alpha f$ schwache Ableitung. Mit $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (D^\alpha f_k) \varphi \, dx &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f_k (D^\alpha \varphi) \, dx \\ \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_\alpha \varphi \, dx &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f (D^\alpha \varphi) \, dx \end{aligned}$$

3.4.8 Beispiel

(a) $H^1(a, b) = \{f \in L^2(a, b) : Df \in L^2(a, b) \text{ existiert als schwache Ableitung}\} \stackrel{4.3}{=} \{f \in L^2(a, b) : \exists \tilde{f} : f(x) = f(a) + \int_a^x \tilde{f}(s) \, ds\}$

(b) $H^{2,2}(a, b) = \{f \in C^1[a, b] : \exists \tilde{f} \in L^2 : f'(x) = f'(a) + \int_a^x \tilde{f}(s) \, ds\} = H^2(a, b)$ im
obrigen Sinne

3.4.9 Satz Meyers und Serrin

$C^\infty(\Omega) \cap H^m(\Omega)$ ist dicht in $H^m(\Omega)$

**Satz
Meyers
und
Serrin**

Beweis: Dobrowlski, Satz 5.16

Wiederholung $f \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$

$$\mathcal{F}(f)(x) = \hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-ixy) f(y) \, dy$$

Dann: $\mathcal{F}$ kann durch stetige Fortsetzung zu einer unitären Abbildung $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$, d.h.

$$\|\mathcal{F}f\|_{L^2} = \|f\|_{L^2} \quad \int (\mathcal{F}f) \overline{(\mathcal{F}g)} \, dx = \int f \bar{g} \, dx$$

3.4.10 Proposition

$f \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Dann $D^\alpha f$ existiert und $D^\alpha f = g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Dies ist genau dann der Fall wenn

$$\hat{g}(x) = i^{|\alpha|} x^\alpha \hat{f}(x)$$

und

$$x^\alpha \hat{f}(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

Beweis: Hinrichtung: Für alle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x) \hat{\varphi}(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \varphi(x) \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) D^\alpha \varphi(x) \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) D^{\hat{\alpha}} \varphi(x) \, dx = (-1)^{|\alpha|}$$

für alle φ . Damit die Behauptung.

Rückrichtung: Analog.

3.4.11 Korollar

$$H^m(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n) \mid (1 + |x|^m) \hat{f}(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

und

$$\|f\|_{H^m}^2 \approx \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^m) |\hat{f}(x)|^2 \, dx$$

Beweis: Wähle Konstanten c_1, c_2 mit

$$c_1 \left(\sum_{|\alpha| \leq m} |x^\alpha| \right)^2 \leq (1 + |x|^m)^2 \leq c_2 \left(\sum_{|\alpha| \leq m} |x^\alpha| \right)^2$$

Nach 4.10:

$$\|D^\alpha f\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |x|^\alpha |\hat{f}(x)|^2 \, dx = \| |x|^\alpha \hat{f} \|_{L^2}^2$$

Dann

$$\|f\|_{H^m}^2 = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha| \leq m} |x|^\alpha |\hat{f}(x)|^2 \, dx \approx \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^m)^2 |\hat{f}(x)|^2 \, dx$$

3.4.12 Definition Elliptische Differentialoperatoren

(a) Eine reelle Matrix $(a_{ij}) \in M(n, n)$ heißt elliptisch, falls

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j \geq c |x|_2^2$$

(b) $D(A) = H^2(\mathbb{R}^n)$:

$$f \in D(A) \text{ setze } Af = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_i D_j f$$

Spezialfall: $a_{ij} = \delta_{ij}$:

$$A = \Delta$$

Definition
Ellipti-
sche
Differen-
tialopera-
toren

3.4.13 Proposition

Ein elliptischer Operator A ist auf $D(A)$ abgeschlossen und für jedes $\lambda > 0$:

$$\lambda Id - A : H^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$$

invertierbar, d.h.

$$\|f\|_{H^2} \approx \|f\|_A \approx \|(\lambda - A)f\|_{L^2}$$

Folgerung: Wir haben Gleichungen der Form

$$(\lambda Id - A)f = g$$

betrachtet. Nun wissen wir: sie ist lösbar für alle $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ durch

$$f = (\lambda - A)^{-1}g \in H^2$$

Beweis: Nach Vor. gibt es ein $c > 0$ mit

$$c\|x\|^2 \leq \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j \leq \sum |a_{ij}|^2 \sum |x_i|^2 = c_1 |x|_2^2$$

Nach 4.11:

$$D_i \hat{D}_j f(x) = -x_i x_j \hat{f}(x)$$

Also ist

$$\hat{A}f = \sum a_{ij} D_i \hat{D}_j f = \sum a_{ij} x_i x_j \hat{f}(x) \approx -|x|_2^2 \hat{f}(x)$$

Das bedeutet:

$$\|f\|_A^2 = \|f\|^2 + \|Af\|^2 \approx \int (1^2 - |x|^2)^2 |\hat{f}(x)|^2 \approx \|f\|_{H^m}^2$$

Also sind $\|f\|_A$ und $\|f\|_{H^m}$ äquivalent auf H^m . Außerdem ist H^m vollständig und damit auch $D(A)$. Somit ist A abgeschlossen.

Aus $\lambda f - Af = g$ folgt $\lambda \hat{f} - \hat{A}f = \hat{g}$ und daraus

$$\lambda \hat{f} + \left(\sum a_{ij} x_i x_j \right) \hat{f} = \hat{g}$$

Damit ist die Lösung:

$$\hat{f} = \left(\lambda + \sum a_{ij} x_i x_j \right)^{-1} \hat{g}$$

Da A elliptisch ist, lässt sich die Klammer abschätzen mit

$$\frac{c_2(\lambda)}{1 + |x|^2}$$

$\hat{f} \in H^2$, denn

$$\int (1 + |x|^2)^2 |\hat{f}| \, dx \leq c_2 \int |\hat{g}| \, dx$$

Also nach 4.11:

$$\|f\|_{H^2}^2 \leq c_2 \|g\|_{L^2}^2$$

3.5 Elliptische Differentialgleichungen mit Dirichletrandbedingungen

Bisher:

$$(p'y')' + qy = f \quad \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0 \quad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0$$

Insbesondere:

$$y'' = f \quad y(a) = 0 \quad y(b) = 0$$

3.5.1 Poisson-Gleichung mit Dirichletrandbedingungen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $f \in C(\overline{\Omega})$. Dann ist die DGL

$$-\Delta y = f \quad y|_{\partial\Omega} = 0 \quad (3.3)$$

eine Poisson-Gleichung mit Dirichletrandbedingungen.

Eine Funktion $y : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt eine klassische Lösung von der Poisson-Gleichung, falls

$$y \in C^2(\Omega) \quad f \in C(\overline{\Omega}) \quad y|_{\partial\Omega} = 0$$

Dann gilt:

$$\int_{\Omega} y(x) \Delta \varphi(x) \, dx = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} y(x) D_i^2 \varphi(x) \, dx = - \sum \int (D_i y)(D_i \varphi) \, dx = \int (\Delta y) \varphi \, dx$$

3.5.2 Definition

$y \in L^2(\Omega)$ heißt eine schwache Lösung der Poisson-Gleichung (ohne Berücksichtigung der Randwerte) falls

$$- \int y \Delta \varphi \, dx = \int f \varphi \, dx \quad (3.4)$$

für alle $C_c^\infty(\Omega)$. Aber was ist mit den Randwerten?

Definition

Definition

$$H_0^1(\mathbb{R}^n) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{H^1}$$

H_0^1 ist ein abgeschlossener Teilraum von H^1 .

Das Ziel ist es jetzt zu zeigen, dass es zu jedem $f \in L^2$ genau eine schwache Lösung in H_0^1 gibt.

Notation Für $y \in H^1(\Omega) : \nabla y := (D_1 y, \dots, D_d y), \nabla y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d, \|y\|_{H^1}^2 = \int_{\Omega} \nabla y^2 \, dx +$

$$\int_{\Omega} |\nabla y|^2 \, dx$$

3.5.3 Lemma

Sei $y \in H^1(\Omega)$. Dann ist y schwache Lösung von 3.3 $\iff$

$$\forall \varphi \in H_0^1(\Omega) : \quad \int_{\Omega} \underbrace{\nabla y}_{\sum_{i=1}^d D_i y \cdot D_i \varphi} = \int_{\Omega} f \varphi \, dx \quad (3.5)$$

Beweis: Sei $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} y \Delta \varphi \, dx &= \sum_{j=1}^d - \int_{\Omega} y \partial_j^2 \varphi \, dx \\ &= \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} D_i y \cdot \partial_i \varphi \, dx \\ &= \int_{\Omega} \nabla y \cdot \nabla \varphi \, dx \end{aligned}$$

Dann heißt: Für $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ gilt (3.4) $\iff$ (??).

Erinnerung: $\overline{H_0^1(\Omega)}^{H^1} := \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{H^1}$

Zeige: Wenn (3.5) für $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ gilt, dann auch für $\varphi \in H_0^1(\Omega)$.

Dazu: Sei $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Dann existiert eine Folge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $C_c^\infty(\Omega)$ mit $\|\varphi_n - \varphi\|_{H^1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, also

$$\|\varphi_n - \varphi\|_{L^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \wedge \|\nabla \varphi_n - \nabla \varphi\|_{L^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Gelte (3.5) auf $C_c^\infty(\Omega)$, dann folgt mit Hölder:

$$\begin{aligned} \underbrace{\int_{\Omega} \nabla y \cdot \nabla \varphi_n \, dx}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \nabla y \cdot \nabla \varphi \, dx} &= \int_{\Omega} f \varphi_n \, dx \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f \varphi \, dx \end{aligned}$$

denn

$$\left| \int_{\Omega} f(\varphi_n - \varphi) \, dx \right| \leq \|f\|_{L^2} \cdot \|\varphi_n - \varphi\|_{L^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Ziel: Zu festem $f \in L^2(\Omega)$ existiert *genau eine* schwache Lösung von (3.3).

Idee:

$$a(\varphi, \psi) := \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla \psi \, dx \quad l(\varphi) := \int_{\Omega} f \varphi \, dx$$

Dann zu zeigen:

$$\exists y \in H_0^1(\Omega) : \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) : \quad a(y, \varphi) = l(\varphi)$$

Dazu : Satz von Lax-Milgram!

3.5.4 Satz Poincare-Ungleichung

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ in eine Richtung beschränkt, d.h. es existiert $j_0 \in \{1, \dots, d\}$, $\delta > 0$ mit $|x_{j_0}| < \delta$ für alle $x \in \Omega$. Dann gilt

$$\forall y \in H_0^1(\Omega) : \quad \|y\|_{L^2} \leq 2\delta \|\nabla y\|_{L^2}$$

$$|y|_{H^1} := \left(\int_{\Omega} |\nabla y|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=1}^d |D_j y|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

**Satz
Poincare-
Ungleichung**

Folgerung: Die Norm

$$\|y\|_{H^1} = \sqrt{\|y\|_{L^2}^2 + |y|_{H^1}^2}$$

ist dann äquivalent zur Norm $|y|_{H^1}$ auf $H_0^1(\Omega)$.

Beweis: o.B.d.A. $j_0 = 1$. Ist $h \in C^1([-\delta, \delta])$ mit $h(-\delta) = 0$, so gilt

$$\begin{aligned} \|h\|_{L^2}^2 &= \int_{-\delta}^{\delta} |h(x)|^2 \, dx \\ &= - \int_{-\delta}^{\delta} \left| \underbrace{h(-\delta)}_{=0} + \int_{-\delta}^x h'(t) \, dt \right|^2 \, dx \\ &\leq \int_{-\delta}^{\delta} \left(\int_{-\delta}^{\delta} 1 \cdot |h'(t)| \, dt \right)^2 \, dx \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \int_{-\delta}^{\delta} (2\delta) \cdot \int_{-\delta}^{\delta} |h'(t)|^2 \, dt \, dx \\ &= (2\delta)^2 \|h'\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

Für $y \in C_C^\infty(\Omega) \hookrightarrow C_C^\infty(\mathbb{R}^d)$ (kanonisch durch O fortsetzen) gilt

$$\begin{aligned}
\|y\|_{L^2}^2 &= \int_{\Omega} |y(x)|^2 \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} |y(x)|^2 \, dx \\
&\stackrel{\text{Tonelli}}{=} \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} \int_{-\delta}^{\delta} |y(x_1, \dots, x_d)|^2 \, dx_1 \dots dx_d \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} \left((2\delta)^2 \int_{-\delta}^{\delta} \underbrace{|\partial_{x_1} y(x_1, \dots, x_d)|^2}_{\leq |\nabla y|^2} \, dx_1 \right)^2 \, dx_2 \dots dx_d \\
&\leq (2\delta)^2 \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} |\nabla y|^2 \, dx_1 \dots dx_d \\
&= (2\delta)^2 \int_{\Omega} |\nabla y(x)|^2 \, dx
\end{aligned}$$

Da $C_C^\infty(\Omega)$ dicht ist in $H_0^1(\Omega)$, folgt Ungleichung auch für $\varphi \in H_0^1(\Omega)$.

3.5.5 Satz Existenz und Eindeutigkeit schwacher Lösung

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und in eine Richtung beschränkt, $f \in L^2(\Omega)$. Dann hat $-\Delta y = f$ genau eine schwache Lösung $y \in H_0^1(\Omega)$.

Satz

Existenz

und Ein-

deutigkeit

schwacher

Lösung

Beweis: Definiere

$$a(\varphi, \psi) := \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla \psi \, dx \quad l(\varphi) := \int_{\Omega} f \varphi \, dx$$

Für alle $\varphi, \psi \in H_0^1(\Omega)$. Dann ist a Bilinearform, l Linearform auf $H_0^1(\Omega)$. Wende Lax-Milgram an, dazu zeige

(1) a beschränkt. ($|a(\varphi, \psi)| \leq c \|\varphi\|_{H^1} \cdot \|\psi\|_{H^1}$).

(2) a koerziv. ($a(\varphi, \varphi) \geq \alpha \cdot \|\varphi\|_{H^1}^2$)

(3) l stetig ($|l(\varphi)| \leq \beta \|\varphi\|_{H^1}$)

Zu 1):

$$\begin{aligned}
 |a(\varphi, \psi)| &\leq \int_{\Omega} \underbrace{|\nabla \varphi \cdot \nabla \psi|}_{\leq |\varphi| \cdot |\psi|} \, dx \\
 &\leq \int_{\Omega} |\nabla \varphi| \cdot |\nabla \psi| \, dx \\
 &\leq \|\nabla \varphi\|_{L^2} \cdot \|\nabla \psi\|_{L^2} \\
 &\leq \|\varphi\|_{H^1} \cdot \|\psi\|_{H^1}
 \end{aligned}$$

Zu 2):

$$\begin{aligned}
 a(\varphi, \varphi) &= |\varphi|_{H^1}^2 \\
 &\stackrel{\text{Folgerung aus Poincare mit } \alpha > 0}{\geq} \alpha \|\varphi\|_{H^1}^2
 \end{aligned}$$

Beobachtung: 1 und 2 sind eigentlich "klar", da $\|\varphi\|_{H^1}^2 \approx |\varphi|_{H^1}^2 = a(\varphi, \varphi)$ Zu 3):

$$\begin{aligned}
 |l(\varphi)| &\leq \int_{\Omega} |f| \cdot |\varphi| \, dx \\
 &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|f\|_{L^2} \cdot \|\varphi\|_{L^2} \\
 &\leq \underbrace{\|f\|_{L^2}}_{=: \beta} \cdot \|\varphi\|_{H^1}
 \end{aligned}$$

Nach Lax-Milgram existiert genau ein $y \in H_0^1(\Omega)$ mit

$$\forall \varphi \in H_0^1(\Omega) : \quad a(y, \varphi) = l(\varphi)$$

also nach Lemma 5.3 genau eine schwache Lösung.

3.5.6 Bemerkung zum Vergleich von schwachen und klassischen Lösungen

- (1) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d, d \geq 2$. Dann existiert $y, f \in C_c(\Omega)$ mit $-\Delta y = f$ im schwachen Sinn, aber $y \notin C^2(\Omega)$! Hier existiert also keine klassische Lösung. (Für $d = 1, \Omega = J$, J beschränktes Intervall, hingegen : $y \in C^2(J)$)
- (2) Ist $y \in H^1([a, b])$, so ist $y \in C([a, b])$, und $y \in H_0^1([a, b]) \iff y(a) = y(b) = 0$.
- (3) Allgemein für $d \geq 2$: Ist $y \in H^1(\Omega) \cap C(\Omega)$, so gilt $y|_{\partial\Omega} = 0 \implies y \in H_0^1(\Omega)$, aber

im allgemeinen $\neq$

Wir betrachten im folgenden die allgemeine Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} Ly &= f \\ y|_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned} \tag{3.6}$$

mit

$$Ly = - \sum_{i,j=1}^d D_i (a_{ij} D_j y) + \sum_{j=1}^d b_j D_j y + cy$$

Annahmen: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen

$$a_{ij}, b_{ij}, c \in L^\infty(\Omega) \tag{3.7}$$

$$(a_{ij}(\cdot))_{i,j} \text{ ist gleichm\"{a}\ss{}ig elliptisch} \tag{3.8}$$

d.h.

$$\forall \alpha > 0 \forall \xi \in \mathbb{R}^d \forall x \in \Omega : \quad \sum_{i=1}^d a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2$$

Definiere die zugehörige Form

$$a(\varphi, \psi) := \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d a_{ij} D_j \varphi D_i \psi + \sum_{j=1}^d b_j D_j \varphi \cdot \psi + c \varphi \psi \, dx$$

für alle $\varphi, \psi \in H_0^1(\Omega)$ (Nach der Idee $\int L\varphi \cdot \psi \, dx$)

Kompakte Notation

$$a(\varphi, \psi) := \int_{\Omega} (a \nabla \varphi) \cdot \nabla \psi + (b \cdot \nabla \varphi) \psi + c \varphi \psi \, dx \quad a := (a_{ij})_{i,j}, b := (b_j)_j$$

3.5.7 Definition

Sei $f \in L^2(\Omega)$. Eine schwache Lösung von (3.6) ist eine Funktion $y \in H_0^1(\Omega)$ mit

$$\forall \varphi \in C_C^\infty(\Omega) : \quad a(y, \varphi) = \int_{\Omega} f \varphi \, dx = \langle f, \varphi \rangle_{L^2}$$

Dies gilt dann auch für alle $\varphi \in H_0^1(\Omega)$.

Beobachtung:

(a)

$$l(\varphi) := \langle f, \varphi \rangle_{L^2}$$

ist stetig auf $H_0^1(\Omega)$.

(b) a ist beschränkt auf $H_0^1(\Omega)$, denn

$$\begin{aligned} |a(\varphi, \psi)| &\leq \int_{\Omega} |a \nabla \varphi \cdot \nabla \psi + b \cdot \nabla \varphi + c|\varphi||\psi| \, dx \\ &\leq \int_{\Omega} \|a\| |\nabla \varphi \cdot \nabla \psi + b \cdot \nabla \varphi + c|\varphi||\psi| \, dx \\ &\leq M (\|\nabla \varphi\|_{L^2} \|\nabla \psi\|_{L^2} + \|\nabla \varphi\|_{L^2} \cdot \|\psi\|_2 + \|\varphi\|_{L^2} \|\psi\|_{L^2}) \\ &\leq \|\varphi\|_{H^1} \|\psi\|_{H^1} + \|\varphi\|_{H^1} \|\psi\|_{H^1} + \dots \\ &\leq 3M \|\varphi\|_{H^1} \|\psi\|_{H^1} \end{aligned}$$

Mit $M := \max\{\|a\|_{\infty}, \|b\|_{\infty}, \|c\|_{\infty}\}$

3.5.8 Satz

Ω sei in eine Richtung beschränkt. Gilt zusätzlich:

$$(a) \quad \exists \varepsilon \in (0, \alpha) \quad \forall x \in \Omega : |b(x)|^2 \leq 4\varepsilon c(x)$$

(b) $b \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$ und $\operatorname{div} b(x) := \sum_{j=1}^d \partial_j b_j(x) \leq 2c(x)$ für alle $x \in \Omega$. So existiert zu jedem $f \in L^2(\Omega)$ genau eine schwache Lösung in $u \in H_0^1(\Omega)$ von $Lu = f, u|_{\partial\Omega} = 0$

Satz

Beweis: Reicht zu zeigen: a jeweils koerziv auf $H_0^1(\Omega)$, dann wie Beweis von Satz 5.5

(a)

$$\begin{aligned} a(\varphi, \varphi) &= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x) D_i \varphi(x) D_j \varphi(x) \, dx + \int_{\Omega} (b \cdot \nabla \varphi) \varphi \, dx + \int_{\Omega} c|\varphi|^2 \, dx \\ &\geq \alpha \int_{\Omega} |\nabla \varepsilon|^2 \, dx - \int_{\Omega} |b(x)| \cdot |\nabla \varphi(x)| \cdot |\varphi| \, dx + \int_{\Omega} c|\varphi|^2 \, dx \end{aligned}$$

Youngsche Ungleichung: $a \cdot b = 2(\sqrt{\varepsilon}) \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}b\right) \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon}b^2$ damit

$$\begin{aligned} |b(x)||\varphi(x)||\nabla\varphi(x)| &\leq \varepsilon|\nabla\varphi|^2 + \frac{1}{4\varepsilon}|b(x)|^2|\varphi(x)|^2 \\ &\geq (\alpha - \varepsilon) \int_{\Omega} |\nabla\varphi|^2 \, dx + \int_{\Omega} \underbrace{\left(c(x) - \frac{1}{4\varepsilon}|b(x)|^2\right)}_{\geq 0} |\varphi|^2 dx \\ &\geq \underbrace{(\alpha - \varepsilon)}_{>0} \int_{\Omega} |\nabla\varphi|^2 \, dx \end{aligned}$$

3.5.9 Bemerkung

Ohne weitere Voraussetzungen gilt noch : $\exists \lambda_0 \geq 0$ so, dass

$$a_{\lambda}(\varphi, \psi) := a(\varphi, \psi) + \lambda \langle \varphi, \psi \rangle_{L^2}$$

koerziv ist für alle $\lambda \geq \lambda_0$ (auch für Ω unbeschränkt).

Folgerung: Für alle $\lambda \geq \lambda_0, f \in L^2(\Omega)$ existiert genau eine schwache Lösung von

$$\lambda u + Lu = f \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$

3.5.10 Bemerkungen (Regularität von Lösungen)

Ist $u \in H_0^1(\Omega)$ mit $Lu = f \in L^2(\Omega)$ im schwachen Sinn, so ist im Allgemeinen $u \notin H^2(\Omega)$, aber :

(a) $a_{ij} \in C^1(\Omega), i, j = 1, \dots, d \implies$ Für alle $\Omega_0 \subseteq \Omega$ relativ kompakt gilt $u \in H^2(\Omega_0)$
und $f \in H^k(\Omega_0) \implies u \in H^{k+2}(\Omega)$ (innere Regularität) (mit Sobolev-Einbettung :
 $f \in C^\infty \implies u \in C^\infty$).

(b) $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$ und Ω konvex oder $\partial\Omega$ ist C^2 -glatt $\implies u \in H^2(\Omega)$ und $f \in H^k(\Omega) \implies u \in H^{k+2}(\Omega)$.

Ohne Beweis, Beweis zu finden in Dobrowolski § 7, Hrendt §6.

3.6 Eigenwertproblem für selbstadjungierte elliptische Differentialoperatoren

$$\begin{aligned} \Omega &\subseteq \mathbb{R}^d \text{ offen und beschränkt} \\ a_{ij} &= a_{ji} \in L^\infty(\Omega) \text{ , gleichmäßig elliptisch} \\ c &\in L^\infty(\Omega) \text{ mit } c \geq 0 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Formal:

$$Lu = -\nabla(a\nabla u) + cu$$

assozierte Form

$$a(\varphi, \psi) := \int_{\Omega} (a\nabla\varphi)\nabla\psi + c\varphi\psi \, dx$$

Nach §5 *a* beschränkte, koerzive Form auf $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ dicht und stetig.

Bezeichne L_Ω den assoziierten Operator, also

$$D(L_\Omega) := \left\{ u \in H_0^1(\Omega) \mid \exists f \in L^2(\Omega) \, \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) : a(u, \varphi) = \int_{\Omega} f \cdot \varphi \, dx \right\}$$

$$L_\Omega u := f$$

$$(a(u, \varphi) = \int_{\Omega} L_\Omega \cdot \varepsilon \, dx = \langle L_\Omega u, \varphi \rangle_{L^2})$$

Speziell: $-\Delta_\Omega$ heißt *Dirichlet-Laplace-Operator* auf Ω ($-\Delta_\Omega^D$)

3.6.1 Satz

L_Ω ist selbstadjungiert.

Satz

Beweis: Nach Satz 2.8.5 nur noch zu zeigen: $a(\varphi, \psi)$ symmetrisch.

$$a(\varphi, \psi) = \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^d a_{ij} D_i \varphi D_j \psi + c \varphi \psi \right) dx = a(\psi, \varphi)$$

3.6.2 Bemerkung

$D(L_\Omega) \subseteq H_0^1(\Omega)$ ist im allgemeinen unbekannt. Aber

(a) $a_{ij} \in C^1(\Omega) \implies C_C^\infty(\Omega) \subseteq D(L_\Omega)$ für $u \in C_C^\infty(\Omega)$ gilt $L_\Omega u = Lu$ (klassisch)

(b) Unter den Voraussetzungen von 5.10 b gilt $D(L_\Omega) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

Wir wollen den Spektralsatz Kapitel 2.8.6 anwenden, dazu

3.6.3 Satz Rellich'sche Einbettungssatz

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und *beschränkt*, dann ist die Einbettung

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega), u \mapsto u$$

kompakt.

Satz Rel-
lich'sche
Einbet-
tungssatz

Beweis: Sei $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $H_0^1(\Omega)$ beschränkte Folge, $\|u_n\|_{H^1} \leq c$. Dann gilt o.B.d.A. $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{W} u \in H_0^1(\Omega)$ in $H_0^1(\Omega)$. wähle sonst Teilfolge.

o.B.d.A. $u = 0$, sonst betrachte $u_n - u$

$$f_n := \tilde{u}_n \in H_0^1(\mathbb{R}^d) \text{ mit } \tilde{u}_n = \begin{cases} u(x) & x \in \Omega \\ 0 & x \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega \end{cases}$$

Zeige:

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f_n(x)|^2 dx \xrightarrow[n \rightarrow \infty \rightarrow \infty]{} 0$$

Weiterhin

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f_n(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}_n|^2 d\xi$$

Betrachte

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}_n|^2 d\xi = \underbrace{\int_{|\xi| < R} |\hat{f}_n|^2 d\xi}_I + \underbrace{\int_{|\xi| \geq R} |\hat{f}_n|^2 d\xi}_{II}$$

$$(I) \quad \hat{f}_n(\xi) = \underbrace{(2\pi)^{-\frac{d}{2}}}_{c_d} \int_{\Omega} \exp(-ix\xi) u_n(x) dx =: l(u_n) \text{ für festes } \xi \text{ mit}$$

$$l(g) = c_d \langle \overbrace{\exp(-i\xi \cdot)}^{\in L^2(\Omega)}, g \rangle_{L^2(\Omega)} \implies |l(g)| \leq c_d C_\Omega \|g\|_{H^1}$$

also $l : H^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und linear.

Wegen $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{W} u$ folgt $l(u_n) \rightarrow l(u)$ also $\hat{f}_n(\xi) \rightarrow \hat{f}(\xi)$.

Außerdem

$$|\hat{f}_n(\xi)| \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} c_d \lambda(\Omega)^{\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\|u_n\|_{L^2 \Omega}}_{\leq c} < \infty$$

Mit Lebesgue folgt

$$\int_{|\xi| < R} |\hat{f}_n| \, d\xi \xrightarrow[n \rightarrow \infty \rightarrow \infty]{} 0$$

(II)

$$\begin{aligned} J_n(R) &:= \int_{|\xi| \geq R} |\hat{f}_n(\xi)|^2 \underbrace{(1 + |\xi|^2)}_{\leq \frac{1}{1+R^2}} (1 + |\xi|^2) \, d\xi \\ &\leq \frac{1}{1 + R^2} \|\xi \mapsto (1 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \hat{f}_n\| \\ &\leq \frac{C}{1 + R^2} \underbrace{\|f_n\|_{H^1}}_{\leq c} \\ &\leq \frac{C \cdot c}{1 + R^2} \end{aligned}$$

Mit $\|f\|_{H^m} \underset{C}{\approx} \|(1 + |\xi|^2)^{\frac{m}{2}} \hat{f}\|_{H^m}$

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $R > 0$ so groß, dass $\frac{C \cdot c}{1+R^2} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Zu R wähle n_0 mit

$$n \geq n_0 \implies \int_{|\xi| < R} |\hat{f}|^2 \, d\xi < \frac{\varepsilon}{2} \implies \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}|^2 \, d\xi < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

3.6.4 Satz

Satz

Unter den Voraussetzungen (9) gilt

$$\sigma(L_\Omega) = \sigma_p(L_\Omega)$$

und es gibt eine Orthonormalbasis $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von $L^2(\Omega)$ aus Eigenvektoren von L_Ω (es gilt also insbesondere $h_n \in D(L_\Omega) \subseteq H_0^1(\Omega)$ für alle $n \in \mathbb{N}$) mit zugehörigen Eigenwerten

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

(wobei die Eigenwerte gemäß ihrer Vielfachheiten mehrfach auftauchen können, jedoch immer endliche Vielfachheit haben), und es gilt:

(a) Für alle $u \in D(L_\Omega)$ gilt $L_\Omega u = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n \langle u, h_n \rangle_{L^2} h_n$ (mit Konvergenz in $L^2(\Omega)$).

(b) Mit $\tilde{h}_n := \frac{1}{\|h_n\|_{L_\Omega}} h_n = \frac{1}{(1+\lambda_n^2)^{1/2}} h_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $(\tilde{h}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von $(D(L_\Omega), \|\cdot\|_{L_\Omega})$, wobei $\|\varphi\|_{L_\Omega} := (\|\varphi\|_{L^2}^2 + \|L_\Omega \varphi\|_{L^2}^2)^{1/2}$ für $\varphi \in D(L_\Omega)$ die Graphennorm (in der Variante für Operatoren auf Hilberträumen) bezeichnet.

Zusätzlich erhält man mit Korollar II.8.6 noch die folgende Aussage:

(c) Für alle $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ gilt $\mathfrak{a}(\varphi, \varphi) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n \langle \varphi, h_n \rangle_{L^2} \langle h_n, \varphi \rangle_{L^2}$.

Beispiel $-\Delta_\Omega$ auf $\Omega := (0, 1)^2$

$$h_{m,k}(x, y) := \sin(m\pi x) \cdot \sin(k\pi y) \rightsquigarrow h_{m,k}$$

Eigenfunktion von $-\Delta_\Omega$ mit

$$-\Delta_\Omega h_{m,k}(x, y) = (m^2 + k^2)\pi^2 h_{m,k}$$

Alle Eigenfunktionen, also

$$\sigma(L_\Omega) = \{(m^2 + k^2)\pi^2 | m, k \in \mathbb{N}\}$$

Kapitel 4

Evolutionsgleichung

4.1 Analysis vektorwertiger Funktionen

4.1.1 Idee der Evolutionsgleichungen

Ein Beispiel ist die Wärmeleitungsgleichung. Der folgende Abschnitt dient nur als Einführung und nicht als mathematischer Rahmen. Wir stellen uns eine Funktion y auf einem Zeit-Intervall und einem Gebiet G , die jedem Zeitpunkt t und jedem Raumpunkt u eine Temperatur zuweist.

- (a) Formulierung als PDG von reellen Funktionen mehrerer Veränderlicher

Aus der Physik wissen wir, dass dann gelten muss:

$$\frac{\partial}{\partial t}y(t, u) = \Delta_u y(t, u) \quad (4.1)$$

mit den Randbedingungen

$$y(t, u) = 0$$

für y auf dem Rand des Gebietes G . Außerdem

$$y(0, u) = y_0(u)$$

also eine zeitliche Startbedingung. Gesucht ist dann eine Funktion

$$y : [0, T] \times G \rightarrow \mathbb{R}$$

zweier Variablen mit Werten in $\mathbb{R}$ (bei gegebenen Rand- und Anfangsbedingungen).

- (b) Formulierung als gewöhnliche DGL für hilbertraumwertige Funktionen einer Veränderlichen

Statt

$$(t, u) \in [0, T] \times G \rightarrow y(t, u) \in \mathbb{R}$$

betrachte

$$Y(t) \in L^2(G) \quad Y(t)(\cdot) = y(t, \cdot)$$

wir nehmen an $y_0 \in L^2(G)$. Außerdem ist $A = \Delta$ ein unbeschränkter Operator auf $L^2(G)$ mit dem Definitionsbereich $D(A)$ welcher so gewählt wird, dass die Randbedingungen schon enthalten sind. Aus 4.1 folgt

$$\frac{d}{dt}Y(t) = AY(t) \quad (4.2)$$

Anstelle einer PDG erhält man eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung, aber für eine $L^2(G)$ -wertige Funktion.

- (c) Die hilbertraumwertige gewöhnliche Differentialgleichung wird geschrieben als System von gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen

Annahme: A ist selbstadjungiert und $D(A)$ ist kompakt eingebettet in $L^2(G)$. Nach II. Satz 5.4. gibt es eine ONB h_n von Eigenvektoren zu Eigenwerten λ_n mit

$$Ay = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle y, h_n \rangle h_n$$

Setze

$$Y(t) = \sum \langle Y(t), h_n \rangle h_n = \sum y_n(t) h_n$$

(also die Entwicklung nach Eigenvektoren) dann können wir schreiben:

$$AY(t) = \sum \lambda_n \langle Y(t), h_n \rangle h_n = \sum \lambda_n y_n(t) h_n$$

$$\frac{d}{dt}Y(t) = \sum \frac{d}{dt} \langle Y(t), h_n \rangle h_n = \sum \dot{y}_n(t) h_n$$

$$y_0 = \sum y_{0,n} h_n$$

und haben somit die ganze DGL komponentenweise entwickelt (durch Koeffizientenvergleich für alle n):

$$\dot{y}_n(t) = \lambda_n y_n(t) \quad y_n(0) = y_{0,n} \quad (4.3)$$

(3) ist ein unendliches System von linearen Differentialgleichungen mit Lösungen

$$y_n(t) = e^{\lambda_n t} y_{0,n}$$

Zusammensetzen der Komponenten liefert $Y(t)$ und dann

$$y(t, u) = Y(t)(u) = \sum e^{\lambda_n t} y_{0,n}(u)$$

4.1.2 Definition

Sei X ein Banachraum und $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Dann heißt $f : I \rightarrow X$ Frechetableitbar in $t_0 \in I$, falls

$$\lim_{t \in I \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

existiert in $(X, \|\cdot\|)$. f heißt stetig differenzierbar auf I , falls $f'(t)$ existiert und $t \in I \rightarrow f'(t)$ stetig in $(X, \|\cdot\|)$ ist.

Definition

Wir benutzen die Notation

$$C^1(I, X)$$

als alle stetig differenzierbaren Funktionen auf I mit Werten in X .

Bemerkung: Die $C^k(I, X)$ sind mit der Norm

$$\|f\|_{C^k} = \max_j \sup_{t \in I} \|f^{(j)}(t)\|_X$$

vollständig.

4.1.3 Definition

Definition

Sei I kompakt und $f : I \rightarrow (X, \|\cdot\|)$ stetig. Das Riemannintegral von f wird definiert über eine Folge von Zerlegungen $\tau_n = \{t_{n_1}, \dots, t_{n_{m_n}}\}$ mit

$$a = t_{n_1} < \dots < t_{n_{m_n}} = b \quad \delta(\tau) = \sup |t_{n_j} - t_{n_{j-1}}| \rightarrow 0$$

Dann definiere als Konvergenz in $(X, \|\cdot\|)$

$$\int_a^b f(t) \, dt = \lim_n \sum_{j=1}^{m_n} f(t_{n_j})(t_{n_j} - t_{n_{j-1}}) \in X$$

Bemerkung Der Limes existiert und ist eindeutig bestimmt, da $f : I \rightarrow X$ gleichmäßig stetig ist, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |t - s| < \delta \implies \|f(s) - f(t)\|_X < \varepsilon$$

(Übung)

4.1.4 Lemma

Sei $T \in B(X, Y)$, X, Y Banachräume. Dann

(a) Falls $f \in C^1(I, X)$ so ist $T(f(t))$ stetig differenzierbar und

$$(T \circ f)' = T(f')$$

(b) Falls $f \in C([a, b], X)$, so ist $T \circ f \in C(I, Y)$ und

$$\int_a^b (T \circ f)(t) \, dt = T \left(\int_a^b f \right)$$

Beweis:

(a) Da T linear ist, gilt

$$\frac{T(f(t)) - T(f(t_0))}{t - t_0} = T \left(\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \right)$$

und da T stetig ist, gilt die Behauptung bei Limesbildung.

- (b) In den Riemannsummen lässt sich das T nach außen ziehen, da es linear ist. Für $n \rightarrow \infty$ folgt die Behauptung aus der Stetigkeit von T .

4.1.5 Korollar

Sei H ein Hilbertraum mit einer ONB h_n

- (a) Für $f \in C^1(I, H)$ gilt

$$f'(t) = \sum \frac{d}{dt} \langle f(t), h_n \rangle h_n = \sum f'_n h_n$$

- (b) Für $f \in C([a, b], H)$ gilt

$$\int_a^b f \, dt = \sum \int_a^b f_n \, dt$$

Dies ist konsistent mit der ehemaligen Definition für $\mathbb{R} = H$.

Beweis:

$$T_n : H \rightarrow \mathbb{K} \quad g \in H \mapsto T_n g = \langle g, h_n \rangle$$

Da T_n linear und beschränkt, folgt mit 1.3:

$$f_n(t) = T_n(f(t))$$

Also

$$f'_n(t) = (T_n(f(t)))' = T_n f'(t) = \langle f'(t), h_n \rangle$$

Analog auch für die Integration.

4.1.6 Lemma

- (a) Sei $f_n \in C([a, b], X)$ und $f(t) = \sum f_n(t)$ konvergiere gleichmäßig bzgl. $(X, \|\cdot\|)$. Dann ist f integrierbar mit

$$\int_a^b f(t) \, dt = \sum \int_a^b f_n(t) \, dt$$

- (b) Sei $f_n \in C^1(I, X)$ und $f(t) = \sum f_n(t)$ und $\sum f'_n(t)$ konvergieren gleichmäßig auf I .
Dann ist $f \in C^1(I, X)$ und

$$f'(t) = \sum f'_n$$

4.1.7 Lemma (Fundamentalsatz)

- (a) Für $f \in C^1[a, b]$ gilt

$$\int_a^b f'(t) \, dt = f(b) - f(a)$$

- (b) Für $f \in C[a, b]$ ist

$$\frac{d}{dt} \int_a^t f(s) \, ds = f(t)$$

Beweis: $X = H$. Dann

$$\left\langle \int_a^b f'(t) \, dt, h \right\rangle_H = \int_a^b \langle f'(t), h \rangle \, dt = \int_a^b \frac{d}{dt} \langle f(t), h \rangle \, dt = \langle f(b), h \rangle - \langle f(a), h \rangle$$

also die Behauptung (da dies für alle h gilt).

4.2 Wärmeleitungsgleichung

4.2.1 Beispiel: Klassische Wärmeleitungsgleichung

$U \subset \mathbb{R}^n$ beschränktes Gebiet, $y(t, u) = [0, \infty) \times U \rightarrow \mathbb{R}$ wobei y die Temperatur zur Zeit t am Punkt u angibt.

Voraussetzungen

$$\partial_t y(t, u) = \Delta_u y(t, u) \tag{1}$$

$$y(t, u) = 0 \quad u \in \partial U$$

$$y(0, u) = y_0(u) \quad u \in U$$

Schreibe (1) als Operatorgleichung. Wähle einen Hilbertraum $H = L^2(U)$, $D(A) =$

$$H_0^1(U) \cap H_{loc}^2(U).$$

$$\begin{aligned} Ay &= -\Delta y & y &\in D(A) \\ \frac{dY(t)}{dt} &= -AY(t) & Y(0) &= y_0 \in H \end{aligned} \quad (1a)$$

Hier $Y : [0, \infty) \rightarrow H$, A selbstadjungiert.

4.2.2 Allgemeine Wärmeleitungsgleichung

Voraussetzungen

$$\begin{aligned} &(H, \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ Hilbertraum, separabel} \\ H \supset D(A) &\xrightarrow{A} H \text{ selbstadjungiert, } D(A) \subset H \text{ kompakt eingebettet} \\ \langle Ax, x \rangle &\geq C\|x\|^2 \text{ für } x \in D(A), C > 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Dann gibt es nach dem Spektralsatz II S4 eine ONB $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von H

$$\text{von Eigenvektoren von } A \text{ zu Eigenwerten } \lambda_n \text{ mit } 0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n \nearrow \infty \quad (3)$$

$$\text{so dass für } x \in D(A) : Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, h_n \rangle h_n$$

$$D(A) = \left\{ x \in H : \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |\langle x, h_n \rangle|^2 < \infty \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{Bezeichnungen: } s \geq 0, D(A^s) &= \{x \in H : \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{2s} |\langle x, h_n \rangle|^2 < \infty\}, x \in D(A^s) : A^s x = \\ &\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^s \langle x, h_n \rangle h_n \end{aligned}$$

$$\text{Beispiel: } s = 0, A^0 = Id, s = 1 : A^1 = A, \text{ für } s = \frac{1}{2} \text{ gilt } A^{\frac{1}{2}} \cdot A^{\frac{1}{2}} = A$$

4.2.3 Satz

Satz

Unter den Voraussetzungen (2) hat die Gleichung

$$\partial_t Y(t) = -AY(t) \quad Y(0) = y_0 \in H \quad (4)$$

eine eindeutig bestimmte Lösung $Y \in C([0, \infty), H)$ der Form

$$Y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\lambda_n t) \langle y_0, h_n \rangle h_n \quad (5)$$

mit

(a) Glattheit

$Y(\cdot) \in C^\infty((0, \infty), D(A^k))$ für alle $k \in \mathbb{N}$

(b) Stabilität

$\|Y(t)\|_H \leq \exp(-\lambda_1 t) \|y_0\|_H$ für $y_0 = 0$ ist $Y(t) = 0$. Die Gleichgewichtslage. $Y(t) = 0$ ist stabil

4.2.4 Folgerung

für klassische Wärmeleitungsgleichung. Für $y(t, u) = Y(t)(u)$, $(t, u) \in (0, \infty) \times U$ gilt mit

(a) $y(\cdot, \cdot) \in C^\infty((0, \infty) \times U)$

(b) $\int_U |y(t, u)|^2 du \leq \|y_0\|^2 \exp(-2\lambda_1 t)$

Beweis: von 2.3

- Eindeutigkeit

Sei $Y(t)$ eine Lösung von (4) mit $Y \in C^1((0, \infty), H)$, $Y(t) \in D(A)$. Sei $j \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dY}{dt}(t), h_j \right\rangle &= \frac{d}{dt} \langle Y(t), h_j \rangle \\ &= \frac{d}{dt} y_j(t) \\ y_j(t) &= \langle Y(t), h_j \rangle \end{aligned}$$

Andererseits

$$\begin{aligned}
\langle AY(t), h_j \rangle &= \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle Y(t), h_n \rangle h_n, h_j \right\rangle \\
&= \lambda_j \langle Y(t), h_j \rangle \\
&= \lambda_j y_j(t) \\
\stackrel{(4)}{\implies} \frac{d}{dt} y_j(t) &= -\lambda_j y_j(t) \\
\implies y_j(t) &= \exp(-\lambda_j t) y_j(0) = \exp(-\lambda_j t) \langle y_0, h_j \rangle
\end{aligned}$$

Also hat $Y(t)$ die Form (5). $Y(t)$ ist eindeutig bestimmt.

- Existenz der Lösung, d.h. (5) hat die geforderten Eigenschaften.

$$\begin{aligned}
Y(0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\lambda_j \cdot 0) \langle y_0, h_n \rangle = y_0 \\
\|Y(t) - Y(s)\|_H^2 &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (\exp(-\lambda_n t) - \exp(-\lambda_n s)) \langle y_0, h_n \rangle \right\|^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} |\exp(-\lambda_n t) - \exp(-\lambda_n s)|^2 |\langle y_0, h_n \rangle|^2 \\
&\leq \left(\sum_{n=1}^m |\exp(-\lambda_n t) - \exp(-\lambda_n s)|^2 \right) \|y_0\|_H^2 + \sum_{n=m+1}^{\infty} 4 |\langle y_0, h_n \rangle|^2
\end{aligned}$$

Gegeben: $\varepsilon > 0$. Wähle $n \in \mathbb{N}$ so groß, dass

$$\begin{aligned}
4 \sum_{n=m+1}^{\infty} |\langle y_0, h_n \rangle|^2 &\leq \varepsilon \leq \underbrace{\sum_{n=1}^m |\exp(-\lambda_n t) - \exp(-\lambda_n s)|^2 \|y_0\|_H^2}_{\rightarrow 0, |t-s| \rightarrow 0} + \varepsilon \\
&\leq 2\varepsilon
\end{aligned}$$

für $|t - s|$ klein.

Also $t \in [0, \infty) \rightarrow H$ stetig.

(a) Setze $\tilde{Y}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-\lambda_n) \exp(-\lambda_n t) \langle y_0, h_n \rangle = -AY(t)$

$$\begin{aligned} \|\tilde{Y}(t)\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{|\lambda_n \exp(-\lambda_n t)|^2}_{\leq \frac{1}{\varepsilon^2}} |\langle y_0, h_n \rangle|^2 \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \|y_0\|^2 \end{aligned}$$

den $(\lambda_n) \exp(-\lambda_n t) \leq 1 \implies |\lambda_n \exp(-\lambda_n t)|^2 \leq \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{\varepsilon^2}$.

Diese Reihe konvergiert gleichmäßig auf $[\varepsilon, \infty)$. Also $Y'(t) \in H, Y(t) \in D(A), Y'(t) = -AY(t)$. Durch Induktion

$$\frac{d^l}{dt^l} Y(t) \in C((0, \infty), H), Y(t) \in D(A^k)$$

für $l, k \in \mathbb{N}$.

(b)

$$\begin{aligned} \|Y(t)\|_H &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\exp(-\lambda_n t)|^2 |\langle y_0, h_n \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \exp(-\lambda_1 t) \|y_0\|_H \end{aligned}$$

Da gilt $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \rightarrow \exp(-\lambda_1 t) \geq \exp(-\lambda_n t)$

Beweisskizze zu Folgerung 2.4: $H = L^2(U), U$ beschränktes Gebiet, zu Zeigen: $y(t, u) = Y(t)(u) \in C^\infty((0, \infty) \times U)$ folgt aus 2.3, da $D(A^m) \subset H_{loc}^{2m}(U)$.
Sobolev'scher Einbettungssatz $H^{2m+2k}(U) \subset C^{2m}(u)$ für $k > \frac{n}{4}$.

4.2.5 Beispiele

(a) Harmonischer Oszillator

$$(Ax)(u) = -x''(u) + u^2$$

für $x \in D(A) = \{x \in H^2(\mathbb{R}) : x(u) \cdot u^2 \in L^2(\mathbb{R})\}$. $D(A) \subset L^2(\mathbb{R})$ kompakt eingebettet, A selbstadjungiert.

$$Y'(t) = -AY(t) \quad Y(0) = y_0 \in L^2(\mathbb{R})$$

Lösung wie (5) mit (h_n) Hermite-Funktionen.

(b) Sturm-Liouville-Operatoren

$$Ay = -(p \cdot y') + g \cdot y \quad p, g \in C[a, b], p > 0$$

$D(A) = \{y \in H^2(a, b) : R_1(y) = R_2(y) = 0\}$ mit Randbedingungen $R_1(y) = \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a)$, $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0)$, $R_2(y) = \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b)$ mit $(\beta_1, \beta_2) \neq (0, 0)$. Nach III 3.8 A selbstadjungiert, $D(A) \subset L^2(a, b)$ kompakt eingebettet. $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3, \lambda_n \rightarrow \infty$. Löse $Y'(t) = AY(t)$, $Y(0) = y_0 \in L^2(a, b)$ nach Satz 2.3.

(c) Elliptische Differentialoperatoren

$$Ax = -\nabla(a\nabla x) + Cx$$

wobei $a_{ij} = a_{ji} \in L^\infty(U)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt.

$$\sum_{i,j} a_{ij} \chi_i \chi_j \geq C \|\chi\|^2 \quad C \geq 0$$

$D(A) \subset L^2(U)$ kompakt eingebettet, A selbstadjungiert.

$$\langle Ax, x \rangle \geq C \|x\|^2$$

Also wende Satz 6.3

4.2.6 Interpretation mit Halbgruppen

In 5.9. und 5.10. wurde der Funktionalkalkül besprochen. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt lässt sich in den Operator einsetzen, mit

$$f(A)y = \sum f(\lambda_n) \langle y, h_n \rangle h_n$$

Dann ist mit $f_t(\lambda) = e^{-t\lambda}$:

$$f_t(A)y = e^{-tA}y = \sum e^{-t\lambda} \langle y, h_n \rangle h_n =: T_t$$

Es gilt:

$$T_t \cdot T_s = T_{t+s} \quad T_0 = id$$

Deshalb bilden die T_t eine Halbgruppe. Ist A z.B. eine $n \times n$ -Matrix, dann ist

$$e^{-tA} = \sum \frac{(-t)^n}{n!} A^n$$

Damit lässt sich unsere gefundene Lösung für die allgemeine Wärmeleitungsgleichung schreiben als

$$Y(t) = T_t y_0 = e^{-tA} y_0$$

4.3 Schrödingergleichung

4.3.1 Beispiel

Einfachste Schrödingergleichung. $U \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet.

$$\frac{\partial}{\partial t} y(t, u) = i \Delta_u y(t, u) \quad y(0, u) = y_0(u) \quad y(t, u) = 0 \quad \forall u \in \partial U \quad (1)$$

Wähle

$$H = L^2(U), D(A) = H_{\text{loc}}^2(U) \cap H_0^1(U)$$

Gibt es eine Lösung

$$t \in \mathbb{R} \rightarrow y(t, \cdot) \in L^2(U)$$

4.3.2 Allgemeine Schrödingergleichung

Sei H ein Hilbertraum und A ein selbstadjungierter Operator. Sei $D(A) \subset L^2(U)$ kompakt. Sei außerdem $\langle Ax, x \rangle \geq C \|x\|^2$ und

$$Ay = \sum \lambda_n \langle y, h_n \rangle h_n \quad \lambda_n > 0$$

Die Gleichung lautet dann

$$\frac{dY}{dt}(t) = iAY(t) \quad Y(0) = y_0 \in H$$

Falls $H = \mathbb{R}$ ist

$$y'_n(t) = i\lambda_n y(t) \implies y(t) = e^{i\lambda_n t} y_0$$

Als Ansatz wählen wir:

$$Y(t) = \sum e^{i\lambda_n t} \langle y_0, h_n \rangle h_n$$

4.3.3 Satz

Dieses $Y(t)$ ist genau dann eine Lösung $Y \in C^1(\mathbb{R}, H)$ wenn $y_0 \in D(A)$. In diesem Fall gilt die "Energieerhaltungsgleichung"

$$\|Y(T)\|_H^2 = \|y_0\|_H^2$$

Satz

Bemerkung Das Lösungsverhalten der Schrödingergleichung differiert extrem von der Wärmeleitungsgleichung. Bei der Schrödingergleichung gibt es für alle t Lösungen. Bei der Wärmeleitungsgleichung nur für $t \geq 0$. Außerdem gibt es bei der Wärmeleitungsgleichung Lösungen für alle Anfangswerte die nach beliebig kurzer Zeit beliebig glatt werden $Y(t) \in C((0, \infty), D(A))$. Bei der Schrödingergleichung gibt es Lösungen nur für $y_0 \in D(A)$. Die Eigenschaften verbessern sich nicht. Bei der Wärmeleitungsgleichung fällt die Norm der Lösung exponentiell ab. Bei der Schrödingergleichung bleibt sie konstant.

Beweis: Eindeutigkeit: Sei $j \in \mathbb{N}$. Sei $Y \in C(\mathbb{R}, H)$. eine Lösung. Dann

$$\frac{d \langle Y(t), h_j \rangle}{dt} = \langle \frac{dY}{dt}(t), h_j \rangle = \langle iAY(t), h_j \rangle = i \langle Y(t), \lambda_j h_j \rangle$$

Mit

$$y_n = \langle Y(t), h_n \rangle$$

ist

$$\frac{dy}{dt}(t) = i\lambda_n y_n(t) \implies y_n(t) = e^{i\lambda_n t} \langle y_0, h_n \rangle$$

Jede Lösung gleicht also dem Ansatz.

Existenz: Sei $y_0 \in D(A)$.

$$\begin{aligned} \frac{Y(t+h) - Y(t)}{h} - iAY(t) &= \sum \left(\frac{e^{i\lambda_n(t+h)} - e^{i\lambda_n t}}{h} - i\lambda_n e^{i\lambda_n t} \right) \langle y_0, h_n \rangle h_n \\ &= \sum i\lambda_n e^{i\lambda_n t} \underbrace{\left(\frac{e^{i\lambda_n h} - 1}{i\lambda_n h} - 1 \right)}_{\rightarrow 0} \langle y_0, h_n \rangle h_n \end{aligned}$$

Also ist nach Parseval

$$\begin{aligned} \|\dots\|^2 &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 \left| \frac{e^{i\lambda_n h} - 1}{i\lambda_n h} - 1 \right|^2 |\langle y_0, h_n \rangle|^2 \\ &\leq \sum_{n=1}^m |\lambda_n|^2 \left| \frac{e^{i\lambda_n h} - 1}{i\lambda_n h} - 1 \right|^2 |\langle y_0, h_n \rangle|^2 + \sum_{n=m+1}^{\infty} |\lambda_n|^2 \left| \frac{e^{i\lambda_n h} - 1}{i\lambda_n h} - 1 \right|^2 |\langle y_0, h_n \rangle|^2 \end{aligned}$$

Man kann zeigen, dass beide Summen gegen 0 gehen, wenn $y \in D(A)$.

Umgekehrt sei $Y(t)$ eine Lösung. z.z. $y_0 \in D(A)$. Für alle m gilt:

$$\left\| \frac{Y(t+h) - Y(t)}{h} \right\|^2 \geq \sum \left| \frac{e^{i\lambda_n(t+h)} - e^{i\lambda_n t h}}{h\lambda_n} \right|^2 \lambda_n |\langle y_0, h_n \rangle|^2$$

Für $h \rightarrow 0$ ist

$$\|Y'(t)\|^2 \geq \sum \lambda_n^2 |\langle y_0, h_n \rangle|^2$$

Also ist $y_0 \in D(A)$. Die Energieerhaltung folgt aus

$$|e^{i\lambda_n t}| = 1$$

4.3.4 Beispiele

(a) Freie Schrödingergleichung

$$\frac{dY}{dt} = i\Delta Y$$

auf L^2 .

(b) Freier harmonischer Oszillator

$$\frac{dY}{dt}(t, u) = i \left(\frac{d^2}{du^2} Y(t, u) - u^2 Y(t, u) \right)$$

mit $D(A) = \{x \in H^2(\mathbb{R}) \mid u^2 x \in L^2\}$

(c) Sturm

$$\frac{dY}{dt}(t, u) = i \frac{d}{du} \left(-p \frac{d}{du} Y(t, u) + q Y(t, u) \right)$$

mit $D(A) = \{x \in H^2(a, b) \mid R_1(x) = R_2(x) = 0\}$

(d) Elliptische Operatoren (a elliptische Matrix)

$$\frac{dY}{dt}(t, u) = i[\nabla(a\nabla Y(t, u) - CX(t, u))]$$

auf U beschränkt.

4.3.5 Interpretation mit Operatorgruppen

Wähle

$$g_t(\lambda) = e^{it\lambda}$$

dann führt $g_t(A)$ auf die gesuchte Lösung und wir können schreiben

$$\frac{dY}{dt}(t) = g_t(A)y_0$$

Außerdem bilden die g_t eine Gruppe, da

$$g_t \cdot g_s = g_{s+t} \quad g_s^{-1} = g(-s)$$

4.4 Wellengleichung

4.4.1 Beispiel

$U \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt.

$$\frac{d^2}{dt^2}Y(t, u) = \Delta_u Y(t, u) \quad Y(0) = y_0 \quad Y'(0) = y_1$$

4.4.2 Allgemeine Wellengleichung

Sei H ein Hilbertraum und A selbstadjungiert. Sei $D(A)$ kompakt in H eingebettet und $\langle Ax, x \rangle \geq C\|x\|^2$. Dann ex. eine ONB h_n von EV mit EW $\lambda_n > 0$.

$$D(A) = \{x \in H \mid \sum \lambda_n^2 |\langle x, h_n \rangle|^2 < \infty\} \quad D(A^{1/2}) = \{x \in H \mid \sum \lambda_n |\langle x, h_n \rangle|^2 < \infty\}$$

Die Gleichung lautet dann

$$Y'' = -AY \quad Y(0) = y_0 \quad Y'(0) = y_1$$

Für $H = \mathbb{R}$ ist

$$y_n''(t) = -\lambda_n y_n(t) \implies y_n(t) = y(0) \cos(\sqrt{\lambda_n} t) + \lambda_n^{-1/2} \sin(\sqrt{\lambda_n} t) y'(0)$$

Unser Ansatz lautet also

$$Y(t) = \sum \left[\langle y_0, h_n \rangle \cos(\sqrt{\lambda_n} t) + \lambda_n^{-1/2} \sin(\sqrt{\lambda_n} t) \langle y_1, h_n \rangle \right] h_n$$

4.4.3 Satz

Satz

Falls $y_0 \in D(A), y_1 \in D\left(A^{\frac{1}{2}}\right)$, so ist $Y \in C^2(\mathbb{R}_+, H)$ und eine eindeutig bestimmte Lösung von (3) mit

$$\|A^{\frac{1}{2}} Y(t)\|^2 + \|Y'(t)\|^2 = \|A^{\frac{1}{2}} y_0\|^2 + \|y_1\|^2$$

Beweis: Sei $y : \mathbb{R}_+ \rightarrow H$ eine Lösung von (3), z.z. $Y(t) = (5)$.

$$\begin{aligned} j \in \mathbb{N} \quad \frac{d^2}{dt^2} \langle y(t), h_j \rangle &= \left\langle \frac{d^2}{dt^2} y(t), h_j \right\rangle \\ &= -\langle Ay(t), h_j \rangle \\ &= -\langle y(t), Ah_j \rangle \\ &= -\lambda_j \langle y(t), h_j \rangle \end{aligned}$$

Mit $y_n(t) = \langle y(t), h_n \rangle$ gilt

$$\frac{d^2}{dt^2} y_n(t) = -\lambda_n y_n(t) \quad y_n(0) = \langle y_0, h_n \rangle \quad y_n'(0) = \langle y_1, h_n \rangle$$

(Existenz) Zu Zeigen: $Y(t)$ aus (5) ist tatsächlich eine Lösung.

$$\begin{aligned} y_0 \in D(A) &\implies \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |\langle y_0, h_n \rangle|^2 < \infty \\ y_1 \in D\left(A^{\frac{1}{2}}\right) &\implies \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |\langle y_0, h_n \rangle|^2 < \infty \end{aligned}$$

Dann

$$\begin{aligned}
Y(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t) h_n \\
y_n(t) &= \cos\left(\sqrt{\lambda_n} t\right) \langle y_0, h_n \rangle + \lambda_n^{-\frac{1}{2}} \sin\left(\sqrt{\lambda_n} t\right) \langle y_1, h_n \rangle \\
\tilde{Y}(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} y'_n(t) h_n \\
\tilde{\tilde{Y}}(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} y''_n(t) h_n
\end{aligned}$$

konvergieren gleichmäßig wegen (+). Dann ist nach 1.4 $Y \in C^2(\mathbb{R}, H)$ und $Y'(t) = \tilde{Y}(t)$, $Y''(t) = \tilde{\tilde{Y}}(t)$. Also

$$\begin{aligned}
Y''(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} y''_n(t) h_n \\
&= - \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t) \lambda_n h_n \\
&= -AY(t)
\end{aligned}$$

Mit $\sin(0) = 0, \cos(0) = 1$ folgt

$$\begin{aligned}
Y(0) &= y_0 \\
Y'(0) &= y_1
\end{aligned}$$

Nun zur Energieerhaltung

$$\begin{aligned}
\|A^{\frac{1}{2}}Y(t)\|^2 + \|Y'(t)\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \lambda_n^{\frac{1}{2}} \cos\left(\sqrt{\lambda_n} t\right) \langle y_0, h_n \rangle + \sin\left(\sqrt{\lambda_n} t\right) \langle y_1, h_n \rangle \right|^2 \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left| -\sqrt{\lambda_n} \sin\left(\sqrt{\lambda_n} t\right) \langle y_0, h_n \rangle + \cos\left(\sqrt{\lambda_n} t\right) \langle y_1, h_n \rangle \right|^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \underbrace{\left(\cos^2\left(\sqrt{\lambda_n} t\right) + \sin^2\left(\sqrt{\lambda_n} t\right) \right)}_{=1} |\langle y_0, h_n \rangle|^2 \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n} t\right) + \cos^2\left(\sqrt{\lambda_n} t\right) \right)}_{=1} |\langle y_1, h_n \rangle|^2 \\
&= \|A^{\frac{1}{2}}y_0\|^2 + \|y_1\|_H^2
\end{aligned}$$

4.4.4 Formulierung der Lösung mit Hilfe des Funktionalkalküls

$f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, f(A)x := \sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n) \langle x, h_n \rangle h_n, x \in H$. Damit erhält (5) die folgende Form

$$Y(t) = \cos\left(A^{\frac{1}{2}}t\right) y_0 + \sin\left(A^{\frac{1}{2}}t\right) A^{-\frac{1}{2}} y_1$$

Sei nun $D(A) \subset H$ kompakt. $R(U), U \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt.

4.5 Evolutionsgleichung für allgemeine selbstadjungierte Operatoren

4.5.1 Genervoraussetzung

$(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ separabel, $H \supset D(A) \xrightarrow{A} H$ selbstadjungiert und $\langle Ax, x \rangle \geq 0$ für $x \in D(A)$
Spektral nach II.6.2. Es gibt

- $L_2(V, \mu)$ mit $V \subset \mathbb{C}$ abgeschlossen, μ Maß auf V
- $m : V \rightarrow \mathbb{R}_+$
- $U : L^2(V, \mu) \rightarrow H$

so dass

$$\begin{aligned} \forall x \in D(A) = U(D(M)) \quad Ax &= U M U^{-1} x \\ D(M) &= \{x \in L^2(V, \mu) : m \cdot x \in L^2(V, \mu)\} \\ Mx &= mx \\ \forall u \in V \quad Mx(u) &= m(u) \cdot x(u) \end{aligned}$$

Funktionalkalkül

$$\phi_A = \begin{cases} C_b(\mathbb{R}_+) \rightarrow B(H) \\ f \rightarrow f(A) \end{cases}$$

Weiterhin

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(A) &= f(A) \cdot g(A) \\ (f + g)(A) &= f(A) + g(A) \\ \|f(A)\| &= \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |f(\lambda)|\end{aligned}$$

Konstruktion für $M : f(M)x = (f \cdot m)x$. Ausführlich

$$\forall u \in V : [f(M)x](u) = f(m(u)) \cdot x(u)$$

Konstruktion für A :

$$f(A) = Uf(M)U^{-1}$$

4.5.2 Beispiele

(a) nach II. 6.3 Laplace Operator

$$H = L^2(\mathbb{R}^n), D(A) = H^2(\mathbb{R}^n), A = -\Delta : H^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$$

Spektraldarstellung

$$\begin{aligned}L^2(V, \mu) &= L^2(\mathbb{R}), Ux = \mathcal{F}^{-1}x \\ \mathcal{F}^{-1}x(u) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int \exp(iuv) x(v) \, dv \\ m(u) &= -|u|^2 \\ \Delta &= \mathcal{F}^{-1}M\mathcal{F} \\ Mx(u) &= -|u|^2x(u) \\ D(\Delta) &= H^2(\mathbb{R}^n) = \{x \in L^2(\mathbb{R}^n) : |u|^2(\mathcal{F}x)(u) \in L^2(\mathbb{R}^n)\}\end{aligned}$$

Funktionalkalkül

$$f(-A) = \mathcal{F}^{-1} [f(|u|^2) \cdot \mathcal{F}x(u)]$$

(b) elliptische Differentialoperatoren III.4.12

$$H = L^2(\mathbb{R}^n), D(A) = H^2(\mathbb{R}^n), Ax = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_i D_j x \quad x \in H$$

$$a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j \geq C \|\xi\|^2 \quad C > 0$$

(c) Schrödingeroperator

$$H = L^2(\mathbb{R}^n)$$

$$D(A) = H^2(\mathbb{R}^n)$$

$$A = -\Delta + V \quad V \geq 0$$

4.5.3 Allgemeine Evolutionsgleichung

A wie in 5.1, $y_0 \in H$

(1) Wärmeleitungsgleichung

$$y'(t) = -Ay(t) \quad y(0) = y_0 \quad y : \mathbb{R}_+ \rightarrow H$$

(2) Schrödingergleichung

$$y'(t) = iAy(t) \quad y(0) = y_0$$

(3) Wellengleichung

$$y''(t) = -Ay(t) \quad y(0) = 0, y'(0) = y_1$$

Formale Lösung

(1) $y(t) = \exp(-tA)y_0$, $\exp(-tA) = f_t(a)$, $f_t(\lambda) = \exp(-\lambda t)$, $y \in C^\infty((0, \infty), D(A^k))$, $k \in \mathbb{N}$

(2) $y(t) = \exp(itA)y_0$, $y \in C^1(\mathbb{R}, H) \cap C(\mathbb{R}, D(A)) \iff y_0 \in D(A)$, $\|\exp(itA)y_0\|_h = \|y_0\|_H$, $t \in \mathbb{R}$

$$(3) \quad y(t) = \cos\left(A^{\frac{1}{2}}t\right) y_0 + \sin\left(A^{\frac{1}{2}}t\right) A^{-\frac{1}{2}} y_1$$

$$\|A^{\frac{1}{2}}y(t)\|^2 + \|y'(t)\|^2 = \|A^{\frac{1}{2}}y_0\|^2 + \|y_1\|^2$$

Begründung zu (1) : $y'(t) = -Ay(t)$, $y(0) = y_0$

Setze $z(t) = U^{-1}y(t) \in L^2(V, \mu)$. $z'(t) = U^{-1}y'(t) = -U^{-1}Ay(t) = (U^{-1}(-A)U)(U^{-1}y(t)) = -Mz(t)$

$z(t)(u) = z(t, u)$ für $u \in V$ folgt mit $z(0) = U^{-1}y_0$

$$\partial_t z(t, u) = -m(u)z(t, u) \quad u \in V \text{ fest}, z(0, u) = (U^{-1}y_0)(u)$$

$$\implies z(t, u) = \exp(-m(u)t) z(0, u)$$

$$z(t) = \exp(-tM)(Uy_0)$$

$$\implies U^{-1}y(t) = \exp(-tM)U^{-1}y_0$$

$$\implies y(t) = U \exp(-tM)U^{-1}y_0 = \exp(-tA)y_0$$

$$f(-\Delta)x = \mathcal{F}^{-1} [f(+u^2)\mathcal{F}x(u)]$$

(1)

$$y(t,u) = \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|u-v|^2}{4t}\right) x(v) \, dv$$

$$g_t \times x(u)$$

$$g_t(u) = \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{|u|^2}{4t}\right)$$

(2)

$$y(t,u) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-i\frac{|u-v|^2}{4t}\right) x(v) \, dv$$

(3) $n = 3$

$$M_t(x)(u) = \frac{1}{4} \int_{S^2} f(u - tv) \, d\delta(v)$$

$$y(t,u) = \partial_t (tM_t(y_0)(u)) + tM_t(y_1)(u)$$

Todo list

Martin einfügen	35
---------------------------	----

Dieses Skript wurde heruntergeladen von
ugroup.hostzi.com



Alle Rechte verbleiben beim lesenden Dozenten.
Keine Garantie auf Richtigkeit oder Vollständigkeit.