Hug

Einführung in die Stochastik

Dauer: 120 min. Lösung: offiziell Bestanden mit: 20 P.

Bemerkung: Hilfsmittel: beidseitig beschriebenes Din A4-Blatt und nicht programmierbarer Taschenrechner

Aufgabe 1 (4+4=8 Punkte)

Geben Sie bei den folgenden Aussagen jeweils an, ob diese wahr oder falsch sind. Kennzeichnen Sie Ihre Antwort mit einem Kreuz. Jede richtige Antwort wird mit einem Punkt bewertet, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Für die Gesamtbewertung jeder Teilaufgabe können keine negativen Punktzahlen vergeben werde. Die Antworten müssen nicht begründet werden.

Teilaufgabe 1)

	Wahr	Falsch
Sei $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n,\ n \in \mathbb{N}$ eine Stichprobe mit $n \in \mathbb{N}$, $\bar{x}$ das arithmetische Mittel und $\tilde{x}$ der Median. Es gilt stets $$\sum_{j=1}^n \lvert x_j - \tilde{x}\rvert \leq \sum_{j=1}^n \lvert x_j - \bar{x}\rvert.$$		
Beim 6-maligen Würfeln ist es wahrscheinlicher mindestens eine 1 zu würfeln, als keine 5 und keine 6.		
Sei F_n die Anzahl der Fixpunkte einer rein zufälligen Permutation der Zahlen $1, ..., n,\ n \in \mathbb{N}$. Für $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ gilt $$n_1 < n_2 \implies \mathbb{E}(F_{n_1}) < \mathbb{E}(F_{n_2}).$$		
Es seien $A_1, A_2, A_3 \subset \Omega$ Ereignisse mit $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2),\ \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_3),\ \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3)$. Dann sind A_1, A_2, A_3 unabhängig.		

Teilaufgabe 2)

	Wahr	Falsch
Es seien $X_1, ..., X_n \sim \mathrm{Nb}(r, p)$ mit $r \in \mathbb{N},\ p \in (0, 1)$. Dann gilt $$X_1 + \cdots + X_n \sim \mathrm{Nb}(nr, p).$$		
Es sei $Y_1, Y_2, ...$ eine Folge von Zufallsvariablen mit $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a$ für $n \to \infty$ mit $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt $$\mathbb{E}(Y_n) \xrightarrow{n\to\infty} a.$$		
Für eine Zufallsvariable X gelte $$\mathbb{E}(X) = \mathbb{V}(X) = \lambda > 0.$$ Dann ist $X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$.		
Falls X und Y unabhängig sind, so sind sie auch unkorreliert.		

Aufgabe 2 (2+3=5 Punkte)

Ein echter Würfel wird n mal unabhängig geworfen ($n \in \mathbb{N}$). Die Zufallsvariable Z_n sei gleich der größten der geworfenen Augenzahlen.

a) Bestimmen Sie $\mathbb{P}(Z_n = k)$ für alle $k, n \in \mathbb{N}$.

b) Zeigen Sie:

$$\mathbb{E}(Z_n) \;=\; 6 - \sum_{j=1}^{5} \left(\frac{j}{6}\right)^n .$$

Hinweis zu a): Betrachten Sie zunächst das Ereignis $\{Z_n \leq k\},\ k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3 (6+1=7 Punkte)

Eine Schokoladenfabrik stellt Pralinen her, die jeweils eine Kirsche enthalten. Die zur Herstellung benötigten Kirschen werden an zwei Maschinen entkernt. Maschine A liefert 70% der benötigten Kirschen, wobei 8% der von A gelieferten Kirschen den Kern noch enthalten. Maschine B liefert 30% der benötigten Kirschen, wobei 5% der von B gelieferten Kirschen den Kern noch enthalten. Bei einer abschließenden Gewichtskontrolle werden 95% der Pralinen, in denen ein Kirschkern enthalten ist, aussortiert, aber auch 2% der Pralinen ohne Kern.

a) Modellieren Sie die Situation durch ein geeignetes dreistufiges Experiment.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis C mit

$$C = \{\text{„Kirsche gelangt mit Kern in den Verkauf.“}\}.$$

Aufgabe 4 (1+1+1+2=5 Punkte)

Es sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \subseteq \Omega$. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) A und $\emptyset$ sind stochastisch unabhängig.

b) Es gelte $A \subseteq B$. Dann gilt: A und B sind stochastisch unabhängig $\Rightarrow \mathbb{P}(B) = 1$.

c) Es gelte $A \subseteq B$. Dann gilt: $\mathbb{P}(B) = 1 \Rightarrow A$ und B sind stochastisch unabhängig.

d) Es gelte $0 < \mathbb{P}(B) < 1$ und $A \cap B = \emptyset$. Dann gilt:

$$\mathbb{P}(A^c \,|\, B) = \mathbb{P}(A \,|\, B^c) \iff \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = 1.$$

Aufgabe 5 (3.5+2.5+2+1+1=10 Punkte)
Es seien X eine Zufallsvariable mit Werten in $\{-1, 1, 2\}$ und

$$\mathbb{P}(X=-1)=\frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(X=1)=\frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(X=2)=\frac{1}{6}$$

sowie Y eine Zufallsvariable mit Werten in $\{0, 1\}$ und den bedingten Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}(Y=0 \mid X=-1)=\frac{3}{4}, \quad \mathbb{P}(Y=0 \mid X=1)=\frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(Y=1 \mid X=2)=\frac{1}{4}.$$

a) Berechnen Sie:
$$\mathbb{P}(Y=1 \mid X=-1), \quad \mathbb{P}(Y=1 \mid X=1), \quad \mathbb{P}(Y=0 \mid X=2), \quad \mathbb{P}(Y=0, X=-1).$$

b) Berechnen Sie die gemeinsame Verteilung von X und Y, d. h. $\mathbb{P}(X=k, Y=j)$ für alle $k \in \{-1, 1, 2\}$ und $j \in \{0, 1\}$. Tragen Sie die Werte in folgende Tabelle ein. Begründungen sind nicht erforderlich!

j \ k	$k=-1$	$k=1$	$k=2$	$\mathbb{P}(Y=j)$
$j=0$				
$j=1$				
$\mathbb{P}(X=k)$				

c) Bestimmen Sie die Erwartungswerte $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$.

d) Bestimmen Sie die Kovarianz $\mathbb{C}(X, Y)$ von X und Y.

e) Sind X und Y stochastisch unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 6 (3+3=6 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass für alle $l \in \mathbb{N}$ gilt $\quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{l-1}{l}\right)^n \cdot \sum_{k=0}^{\lfloor n/l \rfloor} \binom{n}{k} (l-1)^{-k} = \frac{1}{2}.$

Hinweis: Verwenden Sie den zentralen Grenzwertsatz für eine Folge unabhängiger binomialverteilter Zufallsvariablen und $\Phi(0) = 1/2$.

b) Geben Sie den Grenzwert $\quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor n^{2/3} \rfloor} e^{-n} \frac{n^k}{k!} \quad$ an.

Aufgabe 7 (1+3+2+3=9 Punkte)

Eine reellwertige Zufallsvariable X auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ habe die Lebesgue-Dichte $f_a : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ mit

$$f_a(x) = ax^{-3} \cdot \mathbb{1}\{x \geq 1\} + \frac{1}{2} e^{-x} \cdot \mathbb{1}\{x \geq 0\}$$

und einem geeignet zu wählenden Parameter $a \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie den Parameter $a \in \mathbb{R}$ geeignet, das heißt so, dass f_a eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.

b) Geben Sie die zur Funktion f_1 gehörige Verteilungsfunktion F an.

c) Berechnen Sie $\mathbb{E}(X)$. Was können Sie über $\mathbb{E}(X^2)$ sagen?

d) Sei Y eine zweite Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Die Lebesgue-Dichte h der Verteilung von (X, Y) sei gegeben durch

$$h(x, y) = f_1(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-1)^2}{2}}, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Warum ist h eine Wahrscheinlichkeitsdichte? Bestimmen Sie $\mathbb{E}(Y)$ und $\mathbb{V}(Y)$.

Lösung zu Aufgabe 1

Teilaufgabe 1)

	Wahr	Falsch
Sei $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n,\ n \in \mathbb{N}$ eine Stichprobe mit $n \in \mathbb{N}$, $\bar{x}$ das arithmetische Mittel und $\tilde{x}$ der Median. Es gilt stets $$\sum_{j=1}^{n} \lvert x_j - \tilde{x}\rvert \le \sum_{j=1}^{n} \lvert x_j - \bar{x}\rvert.$$	x	
Beim 6-maligen Würfeln ist es wahrscheinlicher mindestens eine 1 zu würfeln, als keine 5 und keine 6.	x	
Sei F_n die Anzahl der Fixpunkte einer rein zufälligen Permutation der Zahlen $1, ..., n,\ n \in \mathbb{N}$. Für $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ gilt $$n_1 < n_2 \implies \mathbb{E}(F_{n_1}) < \mathbb{E}(F_{n_2}).$$		x
Es seien $A_1, A_2, A_3 \subset \Omega$ Ereignisse mit $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2),\ \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_3),\ \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3)$. Dann sind A_1, A_2, A_3 unabhängig.		x

Teilaufgabe 2)

	Wahr	Falsch
Es seien $X_1, ..., X_n \sim \mathrm{Nb}(r, p)$ mit $r \in \mathbb{N},\ p \in (0, 1)$. Dann gilt $$X_1 + \cdots + X_n \sim \mathrm{Nb}(nr, p).$$		x
Es sei $Y_1, Y_2, ...$ eine Folge von Zufallsvariablen mit $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a$ für $n \to \infty$ mit $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt $$\mathbb{E}(Y_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a.$$		x
Für eine Zufallsvariable X gelte $$\mathbb{E}(X) = \mathbb{V}(X) = \lambda > 0.$$ Dann ist $X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$.		x
Falls X und Y unabhängig sind, so sind sie auch unkorreliert.	x	

Lösung zu Aufgabe 2

a) Als Grundraum wählen wir $\Omega = \{1,\dots,6\}^n$ mit $\omega = (\omega_1,\dots,\omega_n) \in \Omega$. Wir betrachten die Zufallsvariablen $X_1, ..., X_n$, wobei

$$X_i : \Omega \to \{1, ..., 6\},\ \omega \mapsto \omega_i, \quad i = 1, .., n,$$

als die geworfene Augenzahl im i-ten Wurf interpretiert wird. Die Zufallsvariable Z_n ist in diesem Fall gegeben durch $Z_n = \max\{X_1, ..., X_n\}$. Als Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ wählen wir die Gleichverteilung auf Ω. Für die einzelnen Würfe ist dann

$$\mathbb{P}(X_i \leq k) = \frac{k}{6}, \quad k = 0, ..., 6,$$

und $X_1,\dots,X_n$ sind stochastisch unabhängig. Das im Hinweis beschriebene Ereignis lässt sich nun schreiben als

$$\{Z_n \leq k\} = \{X_1 \leq k\} \cap \dots \cap \{X_n \leq k\}, \quad k = 0,\dots,6.$$

Für dieses Ereignis gilt aufgrund der Unabhängigkeit der Würfe

$$\mathbb{P}(Z_n \leq k) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \leq k) = \frac{k^n}{6^n} = \left(\frac{k}{6}\right)^n, \qquad k = 0,\dots,6. \quad \boxed{\mathbf{1P}}$$

Die gesuchte Verteilung ergibt sich nun für $k \in \{1, ..., 6\}$ mittels

$$\mathbb{P}(Z_n = k) = \mathbb{P}(Z_n \leq k) - \mathbb{P}(Z_n \leq k-1) = \left(\frac{k}{6}\right)^n - \left(\frac{k-1}{6}\right)^n. \quad \boxed{\mathbf{1P}}$$

b) Mit Hilfe der Darstellung des Erwartungswertes auf dem 7. Übungsblatt ergibt sich

$$\mathbb{E}Z_n = \sum_{j=1}^{6} \mathbb{P}(Z_n \geq j) = \sum_{j=1}^{6} (1 - \mathbb{P}(Z_n < j)) = \sum_{j=1}^{6} \left(1 - \left(\frac{j-1}{6}\right)^n\right) = 6 - \sum_{j=1}^{5} \left(\frac{j}{6}\right)^n. \quad \boxed{\mathbf{3P}}$$

Alternative:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_n) &= \sum_{k=1}^{6} k \cdot \mathbb{P}(Z_n = k) = \sum_{k=1}^{6} k \cdot \left[\left(\frac{k}{6}\right)^n - \left(\frac{k-1}{6}\right)^n\right] \\
&= \left(\frac{1}{6}\right)^n \cdot \left[\sum_{k=1}^{6} k^{n+1} - \sum_{k=2}^{6} (k-1)^{n+1} - \sum_{k=2}^{6} 1 \cdot (k-1)^n\right] \\
&= \left(\frac{1}{6}\right)^n \left[\sum_{k=1}^{6} k^{n+1} - \sum_{j=1}^{5} j^{n+1} - \sum_{j=1}^{5} j^n\right] \\
&= \left(\frac{1}{6}\right)^n \left(6^{n+1} + 6^n - \sum_{j=1}^{6} j^n\right) \\
&= 6 - \sum_{j=1}^{5} \left(\frac{j}{6}\right)^n.
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 3

a) Es handelt sich hierbei um ein mehrstufiges Experiment. Wir modellieren die einzelnen Stufen folgendermaßen:

Sei $\Omega_1 := \{A, B\}$ (Kirsche von Maschine A bzw. B). Die Startverteilung p_1 sei definiert durch

$$p_1(A) := \frac{7}{10},\ p_1(B) := \frac{3}{10}. \quad \boxed{\mathbf{1P}}$$

Sei $\Omega_2 := \{mK, oK\}$ (Kirsche mit Kern, Kirsche ohne Kern). Die Übergangswahrscheinlichkeitsfunktion p_2 ist definiert durch:

$$p_2(A, mK) := \frac{8}{100},\ p_2(A, oK) := \frac{92}{100},\ p_2(B, mK) := \frac{5}{100},\ p_2(B, oK) := \frac{95}{100}. \quad \boxed{\mathbf{2P}}$$

Sei $\Omega_3 := \{V, nV\}$ (Praline im Verkauf, Praline nicht im Verkauf). Die Übergangswahrscheinlichkeitsfunktion p_3 ist definiert durch

$$\begin{aligned} p_3(\omega_1, mK, V) &:= \frac{5}{100}, & p_3(\omega_1, mK, nV) &:= \frac{95}{100},\\ p_3(\omega_1, oK, V) &:= \frac{98}{100}, & p_3(\omega_1, oK, nV) &:= \frac{2}{100}, \quad \boxed{\mathbf{2P}} \end{aligned}$$

wobei $\omega_1 \in \Omega_1$ beliebig gewählt werden kann.

Als geeignetes Modell für das Experiment erhalten wir nun $\Omega := \Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3$ versehen mit $\mathbb{P}$, der Koppelung von p_1, p_2, p_3. Es gilt dann nach Definition

$$\mathbb{P}(\{(\omega_1, \omega_2, \omega_3)\}) = p_1(\omega_1) \cdot p_2(\omega_1, \omega_2) \cdot p_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \qquad \text{für } (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega. \quad \boxed{\mathbf{1P}}$$

b) Es gilt $C = \{(A, mK, V), (B, mK, V)\}$ und daher

$$\mathbb{P}(C) = \frac{7}{10} \cdot \frac{8}{100} \cdot \frac{5}{100} + \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{100} \cdot \frac{5}{100} = \frac{71}{20000} = 0{,}355\%. \quad \boxed{\mathbf{1P}}$$

Lösung zu Aufgabe 4

a) Mittels der Definition von stochastischer Unabhängigkeit gilt

$$\mathbb{P}(A \cap \emptyset) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0 = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(\emptyset) \Longrightarrow A \text{ und } \emptyset \text{ sind stochastisch unabhängig.} \quad \boxed{\mathbf{1P}}$$

b) Diese Richtung gilt nicht.
Gegenbeispiel: Wähle $A = B = \emptyset$. Dann sind A und B nach Teil a) stochastisch unabhängig, aber es ist $\mathbb{P}(B) = 0 \neq 1$. $\boxed{\mathbf{1P}}$

c) Sei $\mathbb{P}(B) = 1$. In diesem Fall ist

$$\mathbb{P}(A \cap B) \overset{A \subseteq B}{=} \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \Longrightarrow A \text{ und } B \text{ sind stochastisch unabhängig.} \quad \boxed{\mathbf{1P}}$$

d) Wir formen direkt um:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A^c \mid B) = \mathbb{P}(A \mid B^c) &\iff \frac{\mathbb{P}(\overbrace{A^c \cap B}^{A \cap B = \emptyset \atop = B})}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(\overbrace{A \cap B^c}^{A \cap B = \emptyset \atop = A})}{\mathbb{P}(B^c)} \\ &\iff 1 = \frac{\mathbb{P}(A)}{1 - \mathbb{P}(B)} \\ &\iff \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = 1. \quad \boxed{\mathbf{2P}} \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 5

a) Nach Vorlesung ist $\mathbb{P}(\cdot \mid X = x),\ x \in \{-1, 1, 2\}$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, also gilt

$$\mathbb{P}(Y = 0 \mid X = x) + \mathbb{P}(Y = 1 \mid X = x) = \mathbb{P}(Y \in \{0, 1\} \mid X = x) = 1.$$

Wir erhalten hiermit $\boxed{\mathbf{3P}}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y = 1 \mid X = -1) &= 1 - \mathbb{P}(Y = 0 \mid X = -1) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4},\\
\mathbb{P}(Y = 1 \mid X = 1) &= 1 - \mathbb{P}(Y = 0 \mid X = 1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},\\
\mathbb{P}(Y = 0 \mid X = 2) &= 1 - \mathbb{P}(Y = 1 \mid X = 2) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

Für die letzte Wahrscheinlichkeit gilt $\boxed{\mathbf{0.5P}}$

$$\mathbb{P}(Y = 0, X = -1) = \mathbb{P}(Y = 0 \mid X = -1)\mathbb{P}(X = -1) = \frac{3}{4} \cdot \mathbb{P}(X = -1) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}. \quad (1)$$

b) Wir erhalten mit analoger Rechnung zu (1)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y = 0, X = 1) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, & \mathbb{P}(Y = 0, X = 2) &= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{8},\\
\mathbb{P}(Y = 1, X = -1) &= \frac{1}{12}, & \mathbb{P}(Y = 1, X = 1) &= \frac{1}{4},\\
\mathbb{P}(Y = 1, X = 2) &= \frac{1}{24}.
\end{aligned}$$

Damit lautet die ausgefüllte Tabelle: $\boxed{\mathbf{2.5P}}$

$j \backslash k$	$k = -1$	$k = 1$	$k = 2$	$\mathbb{P}(Y = j)$
$j = 0$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$
$j = 1$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{3}{8}$
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	1

c) Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= 1 \cdot \frac{1}{2} + (-1) \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}, \quad \boxed{\mathbf{1P}}\\
\mathbb{E}[Y] &= 1 \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{8}. \quad \boxed{\mathbf{1P}}
\end{aligned}$$

d) Zunächst ist

$$\mathbb{E}[XY] = (-1) \cdot \frac{1}{12} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{24} = \frac{1}{4}.$$

Daher gilt

$$\mathbb{C}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{16}. \quad \boxed{\mathbf{1P}}$$

e) Die Zufallsvariablen X und Y sind nicht stochastisch unabhängig, da sie korreliert, d. h. $\mathbb{C}(X, Y) \neq 0$, sind. $\boxed{\mathbf{1P}}$

Lösung zu Aufgabe 6

a) Seien $X_1, \ldots, X_n$ stochastisch unabhängig mit $X_j \sim \mathrm{Bin}(1, 1/l),\ j \in \mathbb{N}$. Zudem sei $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, für $n \in \mathbb{N}$. Laut Vorlesung gilt nun $S_n \sim \mathrm{Bin}(n, 1/l)$ und somit

$$\mathbb{P}(S_n = k) \;=\; \binom{n}{k}(1/l)^k((l-1)/l)^{n-k}. \quad \boxed{\mathbf{1P}}$$

Mit dem zentralen Grenzwertsatz ergibt sich

$$\begin{aligned}
\left(\frac{l-1}{l}\right)^n \sum_{k=0}^{\lfloor n/l \rfloor} \binom{n}{k}(l-1)^{-k} &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/l \rfloor} \binom{n}{k}(1/l)^k((l-1)/l)^{n-k} \\
&= \mathbb{P}(S_n \leq n/l) \\
&= \mathbb{P}\left(S_n - n/l \leq 0\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n/l}{\sqrt{n \cdot (l-1)/l^2}} \leq 0\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Phi(0) \;=\; \frac{1}{2}. \quad \boxed{\mathbf{2P}}
\end{aligned}$$

Hierbei ist $\mathbb{E}[S_n] = n/l$ und $\mathbb{V}[S_n] = n(l-1)/l^2$.

b) Seien $X_1, \ldots, X_n$ stochastisch unabhängig mit $X_j \sim \mathrm{Po}(1),\ j \in \mathbb{N}$. Zudem sei $S_n = X_1 + \cdots + X_n,\ (n \in \mathbb{N})$. Laut Vorlesung gilt nun $S_n \sim \mathrm{Po}(n)$ und somit $\mathbb{P}(S_n = k) \;=\; e^{-n}\ \frac{n^k}{k!}$. $\boxed{\mathbf{1P}}$ Mit dem zentralen Grenzwertsatz ergibt sich

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n^{2/3} \rfloor} e^{-n}\ \frac{n^k}{k!} \;=\; \mathbb{P}(S_n \leq n^{2/3}) \;=\; \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leq \frac{n^{2/3} - n}{\sqrt{n}}\right). \quad \boxed{\mathbf{2P}}$$

Hierbei ist $\mathbb{E}[S_n] = n$ und $\mathbb{V}[S_n] = n$. Für die Folge $\frac{n^{2/3}-n}{\sqrt{n}}$ ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{2/3} - n}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} n^{1/6}(1 - \sqrt{n}) = -\infty.$$

Somit existiert für jedes $l \in \mathbb{N}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\frac{n^{2/3} - n}{\sqrt{n}} \leq -l, \quad \forall n \geq n_0.$$

Für $l \in \mathbb{N},\ n \geq n_0$ folgt daher

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n^{2/3} \rfloor} e^{-n}\ \frac{n^k}{k!} \;=\; \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leq \frac{n^{2/3} - n}{\sqrt{n}}\right) \leq \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leq -l\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Phi(-l).$$

Somit ergibt sich für alle $l \in \mathbb{N}$

$$0 \leq \liminf_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor n^{2/3} \rfloor} e^{-n}\ \frac{n^k}{k!} \leq \limsup_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor n^{2/3} \rfloor} e^{-n}\ \frac{n^k}{k!} \leq \Phi(-l)$$

und folglich

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor n^{2/3} \rfloor} e^{-n}\ \frac{n^k}{k!} = 0.$$

Lösung zu Aufgabe 7

a) Zunächst muss der Parameter $a \in \mathbb{R}$ die Normierunsbedingung $\boxed{\textbf{0.5P}}$

$$1 \overset{!}{=} \int_{\mathbb{R}} f_a(x)\ dx = a \int_1^\infty x^{-3}\ dx + \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x}\ dx = -\frac{1}{2}a\left[x^{-2}\right]_1^\infty - \frac{1}{2}\left[e^{-x}\right]_0^\infty$$
$$= -\frac{1}{2}a(0-1) - \frac{1}{2}(0-1) = \frac{a+1}{2}$$

erfüllen. Hieraus folgt $a = 1$. Dann ist auch $f_1 \geq 0$. $\boxed{\textbf{0.5P}}$

b) Wir betrachten $F(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$ für $t \in (-\infty, 0)$, $t \in [0, 1)$ und $t \in [1, \infty)$. Anstelle von f_1 schreiben wir kurz f.

Für alle $t \in (-\infty, 0)$ gilt $F(t) = 0$, da $f_1 = 0$ auf $(-\infty, 0)$. $\boxed{\textbf{1P}}$

Sei nun $t \in [0, 1)$. Dann gilt

$$F(t) = \int_0^t f(x)\ dx = \int_0^t \frac{1}{2}e^{-x}\ dx = \frac{1}{2}\left[-e^{-x}\right]_0^t = \frac{1}{2}(1 - e^{-t}). \quad \boxed{\textbf{1P}}$$

Für $t \in [1, \infty)$ gilt

$$F(t) = \int_0^t f(x)\ dx = \int_1^t x^{-3}\ dx + \int_0^t \frac{1}{2}e^{-x}\ dx = -\frac{1}{2}\left[x^{-2}\right]_1^t - \frac{1}{2}\left[e^{-x}\right]_0^t$$
$$= \frac{1}{2}(1 - t^{-2}) + \frac{1}{2}(1 - e^{-t}) = 1 - \frac{1}{2}(t^{-2} + e^{-t}). \quad \boxed{\textbf{1P}}$$

c) Wir erhalten

$$\mathbb{E}(X) = \int_1^\infty x \cdot x^{-3}\, dx + \frac{1}{2}\int_0^\infty x e^{-x}\, dx = -\left[\frac{1}{x}\right]_1^\infty + \frac{1}{2}\left[-e^{-x}\right]_0^\infty = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}. \quad \boxed{\textbf{1P}}$$

Der Erwartungswert von X^2 existiert nicht bzw. $\mathbb{E}(X^2) = \infty$, da

$$\mathbb{E}(X^2) \geq \int_1^\infty x^2 \cdot x^{-3}\, dx = \int_1^\infty \frac{1}{x}\, dx = \infty. \quad \boxed{\textbf{1P}}$$

d) Sei φ die Dichte der Standard-Normalverteilung. Wegen $h(x,y) = f(x)\varphi(y-1)$ für $x, y \in \mathbb{R}$ und da $x \mapsto f(x)$ und $y \mapsto \varphi(y-1)$ Wahrscheinlichkeitsdichten sind, ist $h \geq 0$ und der Satz von Fubini ergibt

$$\int_{\mathbb{R}^2} h(x,y)\, \lambda^2(d(x,y)) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx \cdot \int_{\mathbb{R}} \varphi(y-1)\, dy = 1 \cdot 1 = 1. \quad \boxed{\textbf{1P}}$$

Aus Satz 19.8 folgt ferner, dass $y \mapsto \varphi(y-1)$ die Marginaldichte von Y ist, da

$$\int_{\mathbb{R}} h(x,y)\, dx = \varphi(y-1) \cdot \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = \varphi(y-1).$$

Daher ist $Y \sim N(1,1)$ und somit gilt $\mathbb{E}(Y) = 1 = \mathbb{V}(Y)$. $\boxed{\textbf{2P}}$