

**Aufgabe 1 (9 Punkte)**

In einer Urne befinden sich  $2n$  Kugeln,  $n \in \mathbb{N}$ , die von 1 bis  $2n$  nummeriert sind. Die Kugeln mit den Nummern 1 bis  $n$  sind dabei rot gefärbt, die restlichen Kugeln schwarz. Es werden  $k$  Kugeln zufällig und **ohne Zurücklegen** gezogen,  $1 \leq k \leq n$ .

(a) Modellieren Sie die Situation zunächst unter Angabe eines geeigneten endlichen Wahrscheinlichkeitsraums  $(\Omega, \mathbb{P})$ . Unterscheiden Sie bei der Modellierung die Fälle Ziehen **mit** beziehungsweise **ohne** Berücksichtigung der **Reihenfolge**.

(b) Bestimmen Sie für den Fall des Ziehens **ohne Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge** die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

$A$ : Die  $k$  gezogenen Kugeln sind alle von einer Farbe.

$B$ : Die  $k$  gezogenen Kugeln haben fortlaufende Nummern, wenn sie nach dem Ziehen aufsteigend sortiert werden.

$C := A \cap B$ .

Mit fortlaufenden Nummern ist eine Folge der Art:  $i; i + 1; i + 2; \dots$  für  $i \in \mathbb{N}$  gemeint.

(c) Sind die Ereignisse  $A, B$  im Fall  $n = 3, k = 2$  stochastisch unabhängig?

**Aufgabe 2 (9 Punkte)**

Es sei  $(\Omega, \mathbb{P})$  ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum. Sei  $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Zufallsvariable mit  $\mathbb{E}[Z^{2k}] < \infty$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Weiter sei  $Z$  symmetrisch bezüglich 0, das heißt, es gelte  $Z \sim -Z$ .

(a) Weisen Sie  $\mathbb{E}[|Z|^l] < \infty$  für  $l \in \mathbb{N}$  nach.

(b) Zeigen Sie, dass  $\mathbb{E}[Z^n] = 0$  für ungerade  $n \in \mathbb{N}$  gilt.

(c) Berechnen Sie die Kovarianz  $\mathbb{C}(Z^k, Z^l)$  von  $Z^k$  und  $Z^l$  für den Fall, dass  $k \in \mathbb{N}$  gerade und  $l \in \mathbb{N}$  ungerade ist.

(d) Wir betrachten jetzt konkret die Zufallsvariable  $X$  mit

$$\mathbb{P}(X = n) = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{3^{|n|}}{|n|!} e^{-3}, & \text{für } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \\ e^{-3}, & \text{für } n = 0. \end{cases}$$

i) Bestätigen Sie, dass  $X$  symmetrisch bezüglich 0 ist.

ii) Bestimmen Sie die Funktion  $t \mapsto \mathbb{E}[t^X]$ ,  $t > 0$ .

iii) Berechnen Sie hiermit  $\mathbb{E}[X^2]$ .

**Aufgabe 3 (5 Punkte)**

Für  $r > 2$  sei

$$f(x) := r \cdot x^{-(r+1)} \mathbf{1}\{x \geq 1\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (a) Zeigen sie, dass  $f$  eine Wahrscheinlichkeitsdichte auf  $\mathbb{R}$  ist.
- (b) Berechnen sie die Verteilungsfunktion, den Erwartungswert und die Varianz einer Zufallsvariablen mit Dichte  $f$ .

**Aufgabe 4 (6 Punkte)**

Gegeben seien  $\mathbb{Z}$ -wertige Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$ , deren gemeinsame Verteilung

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j), \quad i, j \in \mathbb{Z}$$

gemäß der folgenden Tabelle gegeben ist.

$i \backslash j$	$j = -1$	$j = 0$	$j = 1$	$\mathbb{P}(X = i)$
$i = -1$	7/24	1/12	1/8	
$i = 1$	5/24	1/6	1/8	
$\mathbb{P}(Y = j)$				1

- (a) Vervollständigen Sie die Tabelle. **Eine Begründung ist nicht erforderlich.**
- (b) Bestimmen Sie die bedingten Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}(Y = 0 \mid X = -1) \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(X = 1 \mid Y = 1).$$

- (c) Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilung

$$\mathbb{P}(X \cdot Y = k, \max(X, Y) = s), \quad k, s \in \mathbb{Z}.$$

Verwenden Sie hierfür die folgende Tabelle. **Eine Begründung ist nicht erforderlich.**

$k \backslash s$	$s = -1$	$s = 0$	$s = 1$
$k = -1$			
$k = 0$			
$k = 1$			

- (d) Sind  $X$  und  $Y$  unabhängig?

### Aufgabe 5 (7 Punkte)

- (a) Formulieren Sie den Zentralen Grenzwertsatz von Moivre-Laplace für Binomialverteilungen  $\text{Bin}(n, p)$ ,  $p \in (0, 1)$ .
- (b) Ein Flugzeug eines Linienfluges hat 150 Sitzplätze. Da die Fluggesellschaft aus Erfahrung weiß, dass ein für diesen Flug gekauftes Ticket mit einer Wahrscheinlichkeit von 10% nicht in Anspruch genommen wird, verkauft diese mehr Tickets als Plätze im Flugzeug vorhanden sind. Die Fluggesellschaft möchte aber, dass die Wahrscheinlichkeit für eine Überbelegung des Fluges höchstens 2% beträgt. Bestimmen Sie mit Hilfe einer geeigneten Approximation durch eine Normalverteilung die Anzahl der Tickets, die maximal zum Verkauf angeboten werden dürfen. Geben Sie hierbei an, welche vereinfachenden Annahmen Sie gegebenenfalls bei der Modellierung machen.

Verwenden Sie folgende Werte der Verteilungsfunktion  $\Phi$  der Standardnormalverteilung:

$x$	2,040	2,045	2,050	2,055	2,060	2,065	2,070	2,075
$\Phi(x)$	0,9793	0,9796	0,9798	0,9800	0,9803	0,9805	0,9808	0,9810

### Aufgabe 6 (7 Punkte)

Die zufällige Wartezeit  $X$  (in Minuten) bei einer Telefonhotline werde durch die Verteilungsfunktion  $F$  von der Form  $F(x) = (1 - e^{-\lambda x})\mathbf{1}\{x \geq 0\}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , beschrieben, wobei  $\lambda > 0$  ein geeigneter Parameter ist.

- (a) Bestimmen Sie den Parameter  $\lambda$  explizit, wenn  $\mathbb{P}(X > 1) = 1/4$  bekannt ist.
- (b) Berechnen Sie eine Dichtefunktion von  $X$ .
- (c) Berechnen Sie  $\mathbb{E}[X]$ .
- (d) Bestimmen Sie die Dichte der Zufallsvariable  $Z = \sqrt{X}$ .
- (e) Sei  $Y \sim \text{Exp}(\mu)$ ,  $\mu > 0$ , das heißt,  $Y$  hat die Dichte  $g_\mu(y) = \mu e^{-\mu y}\mathbf{1}\{y \geq 0\}$ . Die Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  seien stochastisch unabhängig, und es gelte  $\mu \neq \lambda$ . Bestimmen Sie die Dichte der Zufallsvariable  $X + Y$ .

### Aufgabe 7 (7 Punkte)

Eine Zufallsvariable  $Y$  habe die stetige Dichte

$$f_\vartheta(x) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \vartheta^{-\frac{5}{2}} x^4 e^{-\frac{1}{\vartheta}x^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

wobei  $\vartheta > 0$  ein unbekannter Parameter sei. Weiter seien  $X_1, \dots, X_n$  unabhängig und identisch verteilt wie  $Y$ .

- (a) Zeigen Sie, dass für gerade  $p \in \mathbb{N}$  gilt  $\mathbb{E}[Y^p] = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \vartheta^{\frac{p}{2}} \Gamma\left(\frac{p+5}{2}\right)$ .
- (b) Bestimmen Sie die Dichte  $g_\vartheta$  des Zufallsvektors  $X = (X_1, \dots, X_n)$ .
- (c) Die Zufallsvariable  $T_n$  ist definiert durch  $T_n := \frac{2}{5n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ .

Weisen Sie  $\mathbb{E}_\vartheta[T_n] = \vartheta$  für  $\vartheta \in (0, \infty)$  nach.

- (d) Zeigen Sie, dass  $T_n$  für  $n \rightarrow \infty$  stochastisch gegen  $\vartheta$  konvergiert.

**Hinweis:** Die Gammafunktion  $\Gamma$  hat die Integraldarstellung

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \quad z > 0.$$

Folgende Eigenschaften der Gammafunktion können Sie (ohne Beweis) verwenden:

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x), \quad x > 0, \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

# Lösung zu Aufgabe 1

- (a) (1) Wir ziehen die Kugeln zunächst ohne Zurücklegen aber mit Beachten der Reihenfolge. Dann ist  $\Omega_1 = \{(\omega_1, \dots, \omega_k) \in \{1, \dots, 2n\}^k \mid \omega_i \neq \omega_j, 1 \leq i < j \leq k\}$ . **1P**

Es folgt  $|\Omega_1| = 2n \cdot (2n - 1) \cdots (2n - k + 1) = \frac{(2n)!}{(2n-k)!}$ . Das Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P}_1$  ist die Laplaceverteilung auf  $\Omega_1$ , sprich

$$\mathbb{P}_1(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega_1|}, \quad \omega \in \Omega_1. \quad \mathbf{1P}$$

- (2) Jetzt werden die Kugeln ohne Zurücklegen und ohne Beachten der Reihenfolge gezogen. Dann ist

$$\Omega_2 = \{\{\omega_1, \dots, \omega_k\} \subseteq \{1, \dots, 2n\} \mid |\{\omega_1, \dots, \omega_k\}| = k\}. \quad \mathbf{1P}$$

Es folgt  $|\Omega_2| = \binom{2n}{k}$ . Das Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P}_2$  ist die Laplaceverteilung auf  $\Omega_2$ , sprich

$$\mathbb{P}_2(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega_2|}, \quad \omega \in \Omega_2. \quad \mathbf{1P}$$

- (b) Wir betrachten nun nur noch Ziehen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge. Für jede der beiden Farben gibt es  $\binom{n}{k}$  Möglichkeiten,  $k$  Kugeln ohne Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge zu ziehen. Also ist

$$|A| = 2 \binom{n}{k}. \quad \mathbf{1P}$$

Damit gilt

$$\mathbb{P}_2(A) = \frac{|A|}{|\Omega_2|} = 2 \frac{\binom{n}{k}}{\binom{2n}{k}}.$$

Für das Ereignis  $B$  gibt es zunächst  $2n - k + 1$  Möglichkeiten, die Kugel mit der kleinsten Zahl zu ziehen. Die restlichen  $k - 1$  Kugeln sind danach festgelegt. Somit ist

$$|B| = 2n - k + 1 \quad \mathbf{1P}$$

und damit

$$\mathbb{P}_2(B) = \frac{2n - k + 1}{\binom{2n}{k}}.$$

Für das Ereignis  $C$  ist zu beachten, dass es  $2(n - k + 1)$  Möglichkeiten gibt, die Kugel mit der kleinsten Zahl zu wählen. Wie für das Ereignis  $B$  folgt dann

$$\mathbb{P}_2(C) = \frac{2(n - k + 1)}{\binom{2n}{k}}. \quad \mathbf{1P}$$

- (c) Für die Unabhängigkeit ist zu prüfen, ob  $\mathbb{P}_2(A) \cdot \mathbb{P}_2(B) = \mathbb{P}_2(C)$  gilt. **1P** Nach Kürzen eines Faktors 2 auf beiden Seiten lautet diese Bedingung aufgrund von Aufgabenteil (a) dann

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{2n}{k}} \cdot \frac{2n - k + 1}{\binom{2n}{k}} = \frac{2(n - k + 1)}{\binom{2n}{k}}.$$

Nach Kürzen und einfacher Umformung ist dies gleichwertig zu

$$n! \cdot (2n - k + 1)! = (2n)! \cdot (n - k + 1)!.$$

Für  $k = 1$  ist dies stets erfüllt. Für  $k = n \geq 2$  ist dies niemals erfüllt. Für  $k = 2$  und  $n = 3$  ist  $6 \cdot 5! \neq 6! \cdot 2$ , und daher sind die Ereignisse  $A$  und  $B$  in diesem Fall nicht stochastisch unabhängig. (Für die Lösung dieses Aufgabenteils kann man natürlich schon früher in  $n, k$  spezialisieren.) **1P**

## Lösung zu Aufgabe 2

(a) Zunächst stellen wir  $|Z|^l \leq 1 + Z^{2l}$  fest. Somit folgt

$$\mathbb{E}[|Z|^l] \leq \mathbb{E}[1 + Z^{2l}] = 1 + \mathbb{E}[Z^{2l}] < \infty. \quad \boxed{1\text{P}}$$

(b) Die Menge  $J := \{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(Z = x) > 0\}$  ist abzählbar. Da  $Z$  symmetrisch ist, folgt aus  $x \in J$  auch  $-x \in J$ .  $\boxed{0.5\text{P}}$  Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z^n] &= \sum_{x \in J: x \geq 0} x \cdot \mathbb{P}(Z = x) + \sum_{x \in J: x < 0} x \cdot \mathbb{P}(Z = x) \\ &= \sum_{x \in J: x \geq 0} (x \cdot \mathbb{P}(Z = x) - x \cdot \mathbb{P}(Z = -x)) \\ &= 0. \quad \boxed{1.5\text{P}} \end{aligned}$$

Hierbei wurde verwendet, dass aufgrund von (a) die Summationsreihenfolge beliebig gewählt werden kann.

(c) Mit Aufgabenteil (b) folgt

$$\mathbb{C}(Z^k, Z^l) = \mathbb{E}[Z^k \cdot Z^l] - \mathbb{E}[Z^k] \cdot \mathbb{E}[Z^l] = \mathbb{E}[Z^{k+l}] = 0. \quad \boxed{1\text{P}}$$

(d) i) Für  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  gilt

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{2} \frac{3^{|n|}}{|n|!} e^{-3} = \frac{1}{2} \frac{3^{|-n|}}{|-n|!} e^{-3} = \mathbb{P}(X = -n) = \mathbb{P}(-X = n). \quad \boxed{1\text{P}}$$

Ebenso gilt  $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(-X = 0)$ .

ii) Für die zu bestimmende Funktion erhält man

$$\begin{aligned} g(t) &:= \mathbb{E}[t^X] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} t^n \cdot \mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=0}^{\infty} (t^n + t^{-n}) \cdot \frac{1}{2} \frac{3^{|n|}}{|n|!} e^{-3} \\ &= \frac{1}{2} e^{-3} \sum_{n=0}^{\infty} (t^n + t^{-n}) \cdot \frac{3^n}{n!} \\ &= \frac{1}{2} e^{-3} (e^{3t} + e^{3/t}), \quad t > 0. \quad \boxed{1.5\text{P}} \end{aligned}$$

iii) Da alle absoluten Momente endlich sind, gilt

$$g''(1) = \mathbb{E}[X(X-1)], \quad g'(1) = \mathbb{E}[X]. \quad \boxed{0.5\text{P}}$$

Differentiation ergibt

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{3}{2} e^{3t-3} - \frac{3}{2t^2} e^{3(-1+1/t)}, \quad \boxed{0.5\text{P}} \\ g''(t) &= \frac{9}{2} e^{3t-3} + \frac{3}{t^3} e^{3(-1+1/t)} + \frac{9}{2t^4} e^{3(-1+1/t)}. \quad \boxed{0.5\text{P}} \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[X(X-1)] + \mathbb{E}[X] = g''(1) + g'(1) = \frac{9}{2} + 3 + \frac{9}{2} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 12. \quad \boxed{1\text{P}}$$

## Lösung zu Aufgabe 3

(a) Zunächst gilt  $f(x) \geq 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Zudem ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_1^{\infty} r \cdot x^{-(r+1)} dx = [-x^{-r}]_1^{\infty} = 1. \quad \boxed{1P}$$

Somit ist  $f$  eine Wahrscheinlichkeitsdichte auf  $\mathbb{R}$ .

(b) Sei  $X$  eine Zufallsvariable mit stetiger Dichte  $f$ . Man sieht direkt  $F_X(z) = 0$  für  $z < 1$ . Für  $z \geq 1$  gilt

$$F_X(z) = \int_1^z f(x) dx = [-x^{-r}]_1^z = 1 - z^{-r}. \quad \boxed{1P}$$

Für den Erwartungswert gilt

$$\mathbb{E}[X] = \int_1^{\infty} x f(x) dx = \int_1^{\infty} x r x^{-(r+1)} dx = \left[ -\frac{r}{r-1} x^{-r+1} \right]_1^{\infty} = \frac{r}{r-1}. \quad \boxed{1P}$$

Zur Berechnung der Varianz erhalten wir zunächst

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_1^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_1^{\infty} x^2 r x^{-(r+1)} dx = \left[ -\frac{r}{r-2} x^{-r+2} \right]_1^{\infty} = \frac{r}{r-2} \quad \boxed{1P}$$

und somit für die Varianz

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{r}{r-2} - \frac{r^2}{(r-1)^2} = \frac{r}{(r-2)(r-1)^2}. \quad \boxed{1P}$$

**Bemerkung:** Für  $k < r$  gilt  $\int_1^{\infty} x^k f(x) dx = \frac{r}{r-k}$ .

## Lösung zu Aufgabe 4

(a) Wir berechnen direkt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = -1) &= \mathbb{P}(X = -1, Y = -1) + \mathbb{P}(X = -1, Y = 0) + \mathbb{P}(X = -1, Y = 1) \\ &= 7/24 + 1/12 + 1/8 \\ &= 1/2, \\ \mathbb{P}(X = 1) &= 1 - \mathbb{P}(X = -1) \\ &= 1/2. \end{aligned}$$

Ebenso ergibt sich

$$\mathbb{P}(Y = -1) = 1/2, \quad \mathbb{P}(Y = 0) = 1/4, \quad \mathbb{P}(Y = 1) = 1/4.$$

Für die Tabelle erhält man somit  $\boxed{1P}$

$i \backslash j$	$j = -1$	$j = 0$	$j = 1$	$\mathbb{P}(X = i)$
$i = -1$	7/24	1/12	1/8	1/2
$i = 1$	5/24	1/6	1/8	1/2
$\mathbb{P}(Y = j)$	1/2	1/4	1/4	1

(b) Mit den Regeln für bedingte Wahrscheinlichkeiten erhalten wir

$$\mathbb{P}(Y = 0 \mid X = -1) = \frac{\mathbb{P}(X = -1, Y = 0)}{\mathbb{P}(X = -1)} = \frac{1/12}{1/2} = 1/6, \quad \boxed{0.5P}$$

$$\mathbb{P}(X = 1 \mid Y = 1) = \frac{\mathbb{P}(X = 1, Y = 1)}{\mathbb{P}(Y = 1)} = \frac{1/8}{1/4} = 1/2. \quad \boxed{0.5P}$$

(c) Es gilt  $X \cdot Y \in \{-1, 0, 1\}$  und  $\max(X, Y) \in \{-1, 0, 1\}$  und somit

$$\mathbb{P}(X \cdot Y = -1, \max(X, Y) = 1) = \mathbb{P}(X = -1, Y = 1) + \mathbb{P}(X = 1, Y = -1) = 1/3, \quad \boxed{0.5P}$$

$$\mathbb{P}(X \cdot Y = 0, \max(X, Y) = 0) = \mathbb{P}(X = -1, Y = 0) = 1/12, \quad \boxed{0.5P}$$

$$\mathbb{P}(X \cdot Y = 0, \max(X, Y) = 1) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 0) = 1/6 \quad \boxed{0.5P}$$

$$\mathbb{P}(X \cdot Y = 1, \max(X, Y) = -1) = \mathbb{P}(X = -1, Y = -1) = 7/24 \quad \boxed{0.5P}$$

$$\mathbb{P}(X \cdot Y = 1, \max(X, Y) = 1) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = 1/8 \quad \boxed{0.5P}$$

sowie  $\mathbb{P}(X \cdot Y = k, \max(X, Y) = s) = 0$  sonst.  $\boxed{0.5P}$

Tabellarisch dargestellt ergibt dies

$k \backslash s$	$s = -1$	$s = 0$	$s = 1$
$k = -1$	0	0	1/3
$k = 0$	0	1/12	1/6
$k = 1$	7/24	0	1/8

(d) Zum Beispiel gilt

$$1/6 = \mathbb{P}(X = 1, Y = 0) \neq \mathbb{P}(X = 1) \cdot \mathbb{P}(Y = 0) = 1/2 \cdot 1/4 = 1/8.$$

Deshalb sind  $X$  und  $Y$  nicht unabhängig.  $\boxed{1P}$

## Lösung zu Aufgabe 5

(a) Sei  $X_n \sim \text{Bin}(n, p)$  mit  $p \in (0, 1)$ . Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq t \right) = \Phi(t), \quad \boxed{1P}$$

wobei  $t \in \mathbb{R}$  beliebig und  $\Phi$  die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist. Tatsächlich ist die Konvergenz in  $t$  gleichmäßig.

(b) Sei  $X_j := \mathbb{1}_{\{\text{„}j\text{-ter Kunde tritt Flug an“}\}}$ ,  $j = 1, \dots, n$  und  $S_n := \sum_{j=1}^n X_j$  die Anzahl der Kunden,

die den Flug tatsächlich antreten.  $\boxed{1P}$  Wir nehmen an, dass  $X_1, X_2, \dots, X_n$  unabhängig sind mit  $\mathbb{P}(X_j = 1) = 1 - 0,1 = 0,9$ . Damit folgt  $S_n \sim \text{Bin}(n, 0,9)$ .  $\boxed{1P}$

Die Approximation durch den zentralen Grenzwertsatz ergibt für die Wahrscheinlichkeit einer Überbuchung

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_n > 150) &= \mathbb{P} \left( \frac{S_n - n \cdot 0,9}{\sqrt{n \cdot 0,9 \cdot 0,1}} > \frac{150 - n \cdot 0,9}{\sqrt{n \cdot 0,9 \cdot 0,1}} \right) \quad \boxed{1P} \\ &= 1 - \mathbb{P} \left( \frac{S_n - n \cdot 0,9}{\sqrt{n \cdot 0,9 \cdot 0,1}} \leq \frac{150 - n \cdot 0,9}{\sqrt{n \cdot 0,9 \cdot 0,1}} \right) \\ &\approx 1 - \Phi \left( \frac{150 - n \cdot 0,9}{\sqrt{n \cdot 0,9 \cdot 0,1}} \right). \quad \boxed{1P} \end{aligned}$$

Gesucht ist  $n$ , sodass

$$\begin{aligned} 1 - \Phi\left(\frac{150 - n \cdot 0,9}{\sqrt{n \cdot 0,9 \cdot 0,1}}\right) \leq 0,02 &\iff \Phi\left(\frac{150 - n \cdot 0,9}{\sqrt{n \cdot 0,9 \cdot 0,1}}\right) \geq 0,98 && \boxed{0.5P} \\ &\iff \frac{150 - n \cdot 0,9}{\sqrt{n \cdot 0,9 \cdot 0,1}} \geq \Phi^{-1}(0,98) \approx 2,055 =: c \\ &\iff n \cdot 0,9 + c\sqrt{n \cdot 0,9 \cdot 0,1} - 150 \leq 0. && \boxed{0.5P} \end{aligned}$$

Lösen der Ungleichung ergibt  $\sqrt{n} \leq 12,572$ , also  $n \leq 158,055184$ . Es dürfen also maximal 158 Tickets verkauft werden.  $\boxed{1P}$

## Lösung zu Aufgabe 6

(a) Es gilt die Gleichung  $e^{-\lambda} = 1 - F(1) = \mathbb{P}(X > 1) = 1/4$ .

Somit folgt  $e^{-\lambda} = 1/4 \Rightarrow \lambda = \ln(4) = 2 \ln(2)$ .  $\boxed{1P}$

(b) Die Dichte ergibt sich als Ableitung der Verteilungsfunktion zu

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{für } x \geq 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad \boxed{1P}$$

(c) Mit Hilfe der Formel aus der Übung ergibt sich

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{\infty} (1 - F(x)) dx = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = \left[ -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\ln(4)}. \quad \boxed{1P}$$

(d) Wir bestimmen zunächst die Verteilungsfunktion von  $Z$ . Für  $z \geq 0$  gilt

$$F_Z(z) = \mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}(\sqrt{X} \leq z) = \mathbb{P}(X \leq z^2) = 1 - e^{-\lambda z^2}. \quad \boxed{1P}$$

Für  $z < 0$  ist  $F_Z(z) = 0$ . Hiermit ergibt sich

$$f_Z(z) = \begin{cases} 2\lambda z e^{-\lambda z^2}, & \text{für } z \geq 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad \boxed{1P}$$

(e) Wir bestimmen die Dichte von  $X + Y$  mit Hilfe der Faltungsformel. Für  $z \geq 0$  gilt

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot g_{\mu}(z-x) dx \\ &= \int_0^z \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mu e^{-\mu(z-x)} dx && \boxed{1P} \\ &= \lambda \mu e^{-\mu z} \int_0^z e^{x(\mu-\lambda)} dx \\ &= \lambda \mu e^{-\mu z} \left[ \frac{1}{\mu-\lambda} e^{x(\mu-\lambda)} \right]_0^z \\ &= \frac{\lambda \mu}{\mu-\lambda} e^{-\mu z} (e^{z(\mu-\lambda)} - 1) \\ &= \frac{\lambda \mu}{\mu-\lambda} (e^{-\lambda z} - e^{-\mu z}). \end{aligned}$$

Ferner ist  $f_{X+Y}(z) = 0$  für  $z < 0$ .  $\boxed{1P}$

## Lösung zu Aufgabe 7

(a) Für gerade Zahlen  $p \in \mathbb{N}$  gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y^p] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^p \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \vartheta^{-\frac{5}{2}} x^4 e^{-\frac{1}{\vartheta} x^2} dx \\ &= 2 \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \vartheta^{-\frac{5}{2}} \int_0^{\infty} x^{p+4} e^{-\frac{1}{\vartheta} x^2} dx \quad \boxed{1P} \\ &= \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \vartheta^{\frac{p}{2}} \int_0^{\infty} z^{(p+3)/2} e^{-z} dz \quad (z = x^2/\vartheta) \\ &= \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \vartheta^{\frac{p}{2}} \Gamma\left(\frac{p+5}{2}\right). \quad \boxed{1P}\end{aligned}$$

Hierbei wurde die Substitution  $z = x^2/\vartheta$  verwendet.

(b) Da  $X_1, \dots, X_n$  unabhängig sind, gilt mit  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$g_{\vartheta}(x) = \prod_{i=1}^n f_{\vartheta}(x_i). \quad \boxed{1P}$$

(c) Mit Hilfe von Aufgabenteil (a) erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\vartheta}[T_n] &= \mathbb{E}_{\vartheta} \left[ \frac{2}{5n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \right] = \frac{2}{5} \mathbb{E}_{\vartheta} [X_1^2] = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \cdot \vartheta^{\frac{5}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{2+5}{2}\right) \quad \boxed{1P} \\ &= \frac{8}{15\sqrt{\pi}} \cdot \vartheta \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi} = \vartheta, \quad \vartheta > 0. \quad \boxed{1P}\end{aligned}$$

(d) Wir betrachten die Zufallsvariablen  $Y_1, \dots, Y_n$  mit

$$Y_i = \frac{2}{5} \cdot X_i^2, \quad i = 1, \dots, n.$$

Mit dem Blockungslemma folgt, dass  $Y_1, \dots, Y_n$  stochastisch unabhängig und somit unkorreliert sind. Weiter gilt mit (c)

$$\mathbb{E}[Y_i] = \vartheta, \quad i = 1, \dots, n. \quad \boxed{1P}$$

Da mit Aufgabenteil (a) folgt, dass die Varianz von  $Y_i$  endlich ist, folgt mit dem schwachen Gesetz großer Zahlen

$$T_n = \frac{2}{5n} \sum_{i=1}^n X_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \xrightarrow{\mathbb{P}} \vartheta \quad (n \rightarrow \infty). \quad \boxed{1P}$$