Henze

Einführung in die Stochastik (Haupt)

Dauer: 120 min. Lösung: offiziell Bestanden mit: 24 P.
Hilfsmittel: beidseitiges DIN A4 Cheatsheet, Taschenrechner (nicht programmier-, vernetzbar)

Aufgabe 1 (9 Punkte)

Gegeben sei der Grundraum

$$\Omega = \mathrm{P}_n^n(oW) = \{(a_1, \ldots, a_n) : \ (a_1, \ldots, a_n) \text{ Permutation von } (1, \ldots, n)\}$$

mit der Gleichverteilung $\mathbb{P}$ auf Ω, wobei $n \geq 4$. Es bezeichne

$$A_i = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \Omega : \ a_i < a_{i+1}\}$$

das Ereignis eines Anstiegs nach der i-ten Stelle, $i = 1, \ldots, n-1$.

a) Zeigen Sie:

(i) $\mathbb{P}(A_i) = \frac{1}{2}$ für $i = 1, \ldots, n-1$.

(ii) $\mathbb{P}(A_i \cap A_{i+1}) = \frac{1}{6}$ für $i = 1, \ldots, n-2$.

b) Welchen Erwartungswert besitzt die Anzahl X aller Anstiege?

c) Zeigen Sie, dass für $i, j \in \{1, \ldots, n-1\}$ mit $|i-j| \geq 2$ die Ereignisse A_i und A_j stochastisch unabhängig sind.

d) Zeigen Sie:

$$\mathbb{V}(X) = \frac{n+1}{12}.$$

Aufgabe 2 (11 Punkte)

Gegeben seien Zufallsvariablen X und Y, deren gemeinsame Verteilung

$$\mathbb{P}(X = i, \ Y = j), \quad i \in \{0, 1, 2\}, \ j \in \{1, 2, 3\},$$

gemäß der folgenden Tabelle gegeben ist.

i \ j	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$\mathbb{P}(X = i)$
$i = 0$		1/9		1/3
$i = 1$		1/6	0	
$i = 2$	1/3	0	0	
$\mathbb{P}(Y = j)$			1/9	1

a) Vervollständigen Sie die Tabelle. **Eine Begründung ist nicht erforderlich.**

b) Wie heißt die Verteilung von X? **Eine Begründung ist nicht erforderlich.**

c) Bestimmen Sie die bedingten Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}(Y = j \,|\, X = 1), \quad j = 1, 2, 3.$$

d) Wie heißt die bedingte Verteilung Y unter der Bedingung $X = 1$? **Eine Begründung ist nicht erforderlich.**

e) Berechnen Sie $\mathbb{E}[X\,Y^2]$.

f) Sind X und Y unabhängig?

g) Es seien U und V $\mathbb{N}$-wertige Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(V = j) > 0$ für jedes $j \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$U \text{ und } V \text{ sind unabhängig} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{P}(U = i \,|\, V = j) = \mathbb{P}(U = i \,|\, V \neq j) \quad \forall\, i, j \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Seien X und Y Zufallsvariablen auf einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum mit $\mathbb{E}(X^2) < \infty$ und $\mathbb{E}(Y^2) < \infty$. Sie dürfen im Folgenden die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$C(X,Y)^2 \leq \mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)$$

verwenden.

a) Es sei $\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y) > 0$. Begründen Sie, dass für den Pearson-Korrelationskoeffizenten
$$-1 \leq r(X,Y) \leq 1$$
gilt.

b) Gilt für die Varianz die Ungleichung
$$\mathbb{V}(X+Y) \leq \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)?$$
Geben Sie einen Beweis oder ein explizites Gegenbeispiel an.

Es bezeichne $\sigma(\cdot) := +\sqrt{\mathbb{V}(\cdot)}$ die Standardabweichung.

c) Zeigen Sie:
$$\sigma(X+Y) \leq \sigma(X) + \sigma(Y).$$

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Es seien $X_1, X_2, \ldots$ Zufallsvariablen mit gleichem Erwartungswert $\mu := \mathbb{E}X_1$ und existierenden, positiven Varianzen sowie $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[(\overline{X}_n - \mu)^2] = 0$, wobei $\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$.

a) Zeigen Sie: $\overline{X}_n$ konvergiert stochastisch gegen μ für $n \to \infty$.

b) Es seien nun die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ zusätzlich unabhängig, identisch verteilt mit $\mathbb{V}(X_1) = 1$. Berechnen Sie mithilfe eines zentralen Grenzwertsatzes, wie groß n (ungefähr) sein muss, damit $\mathbb{P}(|\overline{X}_n - \mu| \leq 0.1) \geq 0.95$ gilt.

Aufgabe 5 (7 Punkte)

Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängig und identisch Po(λ)-verteilt. In einem Modell wird $\lambda = 4$ gewählt. Sie halten diesen Wert für zu niedrig.

a) Wie sind Hypothese und Alternative zu wählen, wenn Sie die Modellannahme mit einem statistischen Test widerlegen möchten? **Eine Begründung ist nicht erforderlich.**

b) Definieren Sie einen geeigneten, möglichst kleinen Stichprobenraum $\mathcal{X}$ zur Beobachtung $x = (x_1, \ldots, x_n)$. **Eine Begründung ist nicht erforderlich.**

Der kritische Bereich des Tests sei

$$\mathcal{K} = \{x \in \mathcal{X} : T(x) \geq c\}$$

mit der Testgröße $T(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i$.

c) Zeigen Sie, dass die Gütefunktion des Tests durch

$$g(\lambda) = e^{-n\lambda} \sum_{k=\lceil c \rceil}^{\infty} \frac{(n\lambda)^k}{k!}$$

gegeben ist. Hierbei ist allgemein $\lceil x \rceil := \min\{m \in \mathbb{Z} : m \geq x\},\ x \in \mathbb{R}$, gesetzt.

d) Bestimmen Sie den kritischen Wert c mithilfe eines zentralen Grenzwertsatzes so, dass der Test asymptotisch das Niveau $\alpha = 0.05$ einhält.

Aufgabe 6 (7 Punkte)

Die stetige Zufallsvariable X habe die Dichte $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit

$$f_a(x) = \begin{cases} a\ e^{-x}, & x \geq 0 \\ a\ e^{x}, & x < 0. \end{cases}$$

Dabei ist $a > 0$ ein Parameter.

a) Zeigen Sie, dass f_a nur für $a = \frac{1}{2}$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.

Im Folgenden sei $a = \frac{1}{2}$.

b) Bestimmen Sie die zu $f_{\frac{1}{2}}$ gehörende Verteilungsfunktion F.

c) Untersuchen Sie die Verteilung von X auf Symmetrie und bestimmen Sie $\mathbb{E}(X)$.

d) Sei $p \in (0, 1)$. Bestimmen Sie das p-Quantil von X.

Aufgabe 7 (7 Punkte)

Es sei X eine Zufallsvariable mit Werten in $\{0, 1, 2\}$ und $\mathbb{E}[X] = 1$ sowie $\mathbb{E}[X^2] = 3/2$.

a) Zeigen Sie: Die erzeugende Funktion g_X von X ist

$$g_X(t) = \frac{1}{4}(1 + t)^2, \quad |t| \leq 1.$$

b) Zeigen Sie: X hat die gleiche Verteilung wie die Summe $X_1 + X_2$ zweier stochastisch unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen. Wie heißt die Verteilung von X?

c) Zeigen Sie: Für die erzeugende Funktion g_{3X} von $3X$ gilt $g_{3X}(t) = g_X(t^3)$, $|t| \leq 1$.

d) Berechnen Sie mithilfe der erzeugenden Funktion den Erwartungswert $\mathbb{E}[3X(3X - 1)]$.

Aufgabe 8 (8 Punkte)

Geben Sie bei den folgenden Aussagen jeweils an, ob diese wahr oder falsch sind. Kennzeichnen Sie Ihre Antwort mit einem Kreuz. Jede richtige Antwort wird mit einem Punkt bewertet, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Lassen Sie einen Aufgabenteil unbeantwortet, so erhalten Sie für diesen 0 Punkte. Bei einer negativen Gesamtpunktzahl wird die Aufgabe mit 0 Punkten bewertet. **Die Antworten müssen nicht begründet werden.**

	Wahr	Falsch
Seien M, Ω nichtleere Mengen, wobei $M \subseteq \Omega$. Weiter sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über Ω. Dann ist $$\{A \cap M : \; A \in \mathcal{A}\}$$ eine σ-Algebra über M.		
Aus $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C)$ folgt die stochastische Unabhängigkeit von A, B, C.		
Sei $U \sim \mathrm{U}(0,1)$. Dann gilt $$-\frac{1}{2}\log(1-U) \;\sim\; \mathrm{Exp}\left(\frac{1}{2}\right).$$		
Seien X und Y Zufallsvariablen mit existierenden Erwartungswerten auf einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum. Dann gilt $$\mathbb{E}(Y\|X) = \mathbb{E}(Y) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{P}\big(X = \mathbb{E}(X)\big) = 1.$$		
Die Hypergeometrische Verteilung ist eine Pólya-Verteilung.		
Seien $a \in \mathbb{R}$ und $X_1, X_2, \ldots$ nicht-positive Zufallsvariablen auf einem gemeinsamen diskreten Wahrscheinlichkeitsraum. Dann folgt aus $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a$ die Konvergenz $$\mathbb{E}\left(e^{X_n}\right) \to e^a.$$		
Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, je $\mathrm{Bin}(1, \vartheta)$-verteilte Zufallsvariablen, wobei $\vartheta \in (0,1)$ unbekannt ist. Des Weiteren sei $x = (x_1, \ldots, x_n)$ eine Realisierung des Zufallsvektors $X = (X_1, \ldots, X_n)$. Dann maximiert der Maximum-Likelihood-Schätzwert für ϑ zu x die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von x als Funktion von ϑ.		
Es sei $(\mathcal{X}, (\mathbb{P}_\vartheta)_{\vartheta \in \Theta})$ ein statistisches Modell. Weiter sei $\mathcal{C} : \mathcal{X} \to \mathcal{P}(\Theta)$ ein Konfidenzbereich zur Konfidenzwahrscheinlichkeit $1 - \alpha$, wobei $0 < \alpha < 1$. Dann ist durch $\mathbf{1}_{\mathcal{K}}$ mit $$\mathcal{K} := \{x \in \mathcal{X} : \; \mathcal{C}(x) \ni \vartheta_0\}$$ ein Test für $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta \neq \vartheta_0$ für ein $\vartheta_0 \in \Theta$ zum Niveau α definiert.		

Aufgabe 1
Lösungsvorschlag: (2+2+3+2 = 9 Punkte)

a) (i) Für das Eintreten A_i ist nur die Anordnung von a_i und a_{i+1} relevant. Von beiden möglichen Anordnungen ist nur $a_i < a_{i+1}$ günstig. Mithin ist $\mathbb{P}(A_i) = \frac{1}{2}$.

(ii) Entsprechend ist für das Eintreten von $A_i \cap A_{i+1}$ nur die Anordnung von a_i, a_{i+1} und a_{i+2} relevant. Von den $3! = 6$ möglichen Anordnungen ist nur $a_i < a_{i+1} < a_{i+2}$ günstig. Folglich ist $\mathbb{P}(A_i \cap A_{i+1}) = \frac{1}{6}$.

b) Die Anzahl X aller Anstiege lässt sich darstellen als $X = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{1}_{A_i}$. Damit folgt

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_i}) = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_i) = \frac{n-1}{2}.$$

c) Seien $i, j \in \{1, \ldots, n-1\}$ mit $|i-j| \geq 2$. Dann gilt $\{a_i, a_{i+1}\} \cap \{a_j, a_{j+1}\} = \emptyset$. Für die günstigen Fälle bezüglich $A_i \cap A_j$ wählt man zunächst eine Teilmenge $\{a_i, a_{i+1}\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ aus ($\binom{n}{2}$ Möglichkeiten) und ordnet die Elemente so an, dass $a_i < a_{i+1}$ gilt (1 Möglichkeit). Dann wählt man eine Teilmenge $\{a_j, a_{j+1}\} \subseteq \{1, \ldots, n\} \setminus \{a_i, a_{i+1}\}$ aus ($\binom{n-2}{2}$ Möglichkeiten) und ordnet die Elemente so an, dass $a_j < a_{j+1}$ gilt (1 Möglichkeit). Die restlichen $n-4$ Elemente können beliebig angeordnet werden ($(n-4)!$ Möglichkeiten). Mithin ist

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \frac{\binom{n}{2} \cdot 1 \cdot \binom{n-2}{2} \cdot 1 \cdot (n-4)!}{n!} = \frac{1}{4}.$$

Mit Teil a) folgt $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$, d.h. A_i, A_j sind stochastisch unabhängig.

d) Für die Varianz der Indikatorsumme $X = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{1}_{A_i}$ gilt nach a) und c)

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_i)\big(1 - \mathbb{P}(A_i)\big) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} \big(\mathbb{P}(A_i \cap A_j) - \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)\big) \\ &= (n-1) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot (n-2) \cdot \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{n+1}{12}.\end{aligned}$$

Aufgabe 2
Lösungsvorschlag: (2+1+2+1+1+1+3=11 Punkte)

a)

$i \backslash j$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$\mathbb{P}(X=i)$
$i=0$	1/9	1/9	1/9	1/3
$i=1$	1/6	1/6	0	1/3
$i=2$	1/3	0	0	1/3
$\mathbb{P}(Y=j)$	11/18	5/18	1/9	1

b) Gleichverteilung auf $\{0, 1, 2\}$.

c)

$$\mathbb{P}(Y = j \,|\, X = 1) = \frac{\mathbb{P}(Y = j, X = 1)}{\mathbb{P}(X = 1)} = 3\mathbb{P}(Y = j, X = 1) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & j = 1, \\ \frac{1}{2}, & j = 2, \\ 0, & j = 3. \end{cases}$$

d) Gleichverteilung auf $\{1,2\}$.

e) $\mathbb{E}[X\,Y^2] = \frac{1}{6}(1+4) + \frac{2}{3} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

f) Nein, da $\mathbb{P}(X=2, Y=3) = 0 \neq \frac{1}{27} = \mathbb{P}(X=2)\,\mathbb{P}(Y=3)$.

g) Seien $i, j \in \mathbb{N}$ beliebig. Nach Voraussetzung gilt

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(U=i \,|\, V=j) = \mathbb{P}(U=i \,|\, V\neq j) \\
\iff\quad & \frac{\mathbb{P}(U=i, V=j)}{\mathbb{P}(V=j)} = \frac{\mathbb{P}(U=i, V\neq j)}{1-\mathbb{P}(V=j)} \\
\iff\quad & (1-\mathbb{P}(V=j))\mathbb{P}(U=i, V=j) = \mathbb{P}(V=j)\mathbb{P}(U=i, V\neq j) \\
\iff\quad & \mathbb{P}(U=i, V=j) = \mathbb{P}(V=j)\big(\mathbb{P}(U=i, V\neq j) + \mathbb{P}(U=i, V=j)\big) \\
\iff\quad & \mathbb{P}(U=i, V=j) = \mathbb{P}(V=j)\,\mathbb{P}(U=i)
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung, da U und V unabhängig sind, falls $\mathbb{P}(U=i, V=j) = \mathbb{P}(U=i)\,\mathbb{P}(V=j)$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3
Lösungsvorschlag: (1+2+3 = 6 Punkte)

a) Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung lautet äquivalent $|C(X,Y)| \leq \sqrt{\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)}$. Damit folgt für den Pearson-Korrelationskoeffizenten

$$|r(X,Y)| = \frac{|C(X,Y)|}{\sqrt{\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)}} \leq \frac{\sqrt{\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)}}{\sqrt{\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)}} = 1.$$

b) Wir geben ein Gegenbeispiel an. Sei $X \sim \mathrm{Bin}(1, \frac{1}{2})$ und $Y = X$. Dann gilt

$$1 = 4\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(2X) = \mathbb{V}(X+Y) > \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) = 2\mathbb{V}(X) = \frac{1}{2}.$$

c) Die Monotonie der Wurzelfunktion und die Cauchy-Schwarz-Ungleichung implizieren

$$\begin{aligned}
\sigma(X+Y) &= \sqrt{\mathbb{V}(X+Y)} \\
&= \sqrt{\mathbb{V}(X) + 2C(X,Y) + \mathbb{V}(Y)} \\
&\leq \sqrt{\mathbb{V}(X) + 2|C(X,Y)| + \mathbb{V}(Y)} \\
&\leq \sqrt{\mathbb{V}(X) + 2\sqrt{\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)} + \mathbb{V}(Y)} \\
&= \sqrt{\left(\sqrt{\mathbb{V}(X)} + \sqrt{\mathbb{V}(Y)}\right)^2} \\
&= \sqrt{\mathbb{V}(X)} + \sqrt{\mathbb{V}(Y)} = \sigma(X) + \sigma(Y).
\end{aligned}$$

Aufgabe 4
Lösungsvorschlag: (2+3=5 Punkte)

a) Sei $\varepsilon > 0$. Nach der Tschebyschow-Ungleichung gilt

$$\mathbb{P}(|\overline{X}_n - \mu| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(|\overline{X}_n - \mathbb{E}\overline{X}_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(\overline{X}_n)}{\varepsilon^2} = \frac{\mathbb{E}[(\overline{X}_n - \mu)^2]}{\varepsilon^2},$$

wobei die rechte Seiten für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert nach Voraussetzung. Dies liefert die Behauptung.

b) Nach dem Zentralen Grenzwertsatz von Lindeberg-Lévy gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|\overline{X}_n - \mu| \leq 0.1) &= \mathbb{P}\left(-1 \leq \overline{X}_n - \mu \leq 0.1\right) \\
&= \mathbb{P}\left(-0.1\sqrt{n} \leq \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\,\mu}{\sqrt{n\,\mathbb{V}(X_1)}} \leq 0.1\sqrt{n}\right) \\
&\approx \Phi(0.1\sqrt{n}) - \Phi(-0.1\sqrt{n}) = \Phi(0.1\sqrt{n}) - \left(1 - \Phi(0.1\sqrt{n})\right) \\
&= 2\Phi(0.1\sqrt{n}) - 1 \overset{!}{\geq} 0.95 \\
\iff \quad & \Phi(0.1\sqrt{n}) \geq 0.975 \\
\iff \quad & 0.1\sqrt{n} \geq \underbrace{\Phi^{-1}(0.975)}_{\approx 1.96} \\
\iff \quad & n \geq 19.6^2 = 384.16,
\end{aligned}$$

d.h. n muss (ungefähr) mindestens 385 sein.

Aufgabe 5
Lösungsvorschlag: (1+1+2+3 = 7 Punkte)

a) $H_0 : \lambda = 4$ gegen $H_1 : \lambda > 4$

b) $\mathcal{X} = \mathbb{N}_0^n$

c) Nach dem Additionsgesetz der Poissonverteilung gilt $T(X) = \sum_{i=1}^n X_i \sim \mathrm{Po}(n\lambda)$. Es folgt

$$\begin{aligned}
g(\lambda) = \mathbb{P}_\lambda(X \in \mathcal{K}) = \mathbb{P}_\lambda(T(X) \geq c) = \sum_{k=\lceil c\rceil}^{\infty} \mathbb{P}_\lambda\left(T(X) = k\right) \\
= \sum_{k=\lceil c\rceil}^{\infty} e^{-n\lambda}\frac{(n\lambda)^k}{k!} = e^{-n\lambda}\sum_{k=\lceil c\rceil}^{\infty} \frac{(n\lambda)^k}{k!}.
\end{aligned}$$

d) Nach dem Zentralen Grenzwertsatz von Lindeberg-Lévy gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_4\left(T(X) \geq 4n + 2\sqrt{n}\Phi^{-1}(0.95)\right) &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_4\left(\frac{T(X) - 4n}{\sqrt{4n}} \geq \Phi^{-1}(0.95)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_4\left(\frac{\sum_{k=1}^n X_i - n\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{n\mathbb{V}(X_1)}} \geq \Phi^{-1}(0.95)\right) \\
&= 1 - \Phi(\Phi^{-1}(0.95)) = 0.05
\end{aligned}$$

D.h. für $c = 4n + 2\sqrt{n}\Phi^{-1}(0.95) \approx 4n + 3.3\sqrt{n}$ hält der Test asymptotisch das Niveau $\alpha = 0.05$ ein.

Aufgabe 6
Lösungsvorschlag: (1+2+1.5+2.5 = 7 Punkte)

a) Es muss gelten:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_a(x)dx = \int_{-\infty}^{0} ae^x dx + \int_{0}^{\infty} ae^{-x} dx = [ae^x]_{-\infty}^{0} + \left[-ae^{-x}\right]_0^{\infty} = 2a.$$

Dies ist genau dann erfüllt wenn $a = \frac{1}{2}$.

b) Es ist

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{\frac{1}{2}}(t)dt = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2}e^t dt = \frac{1}{2}e^x, & x < 0, \\ \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2}e^t dt + \int_0^x \frac{1}{2}e^{-t}dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}e^{-x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

c) Wegen $f_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ gilt $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. D.h. die Verteilung von X ist symmetrisch um 0 . Folglich ist $\mathbb{E}(X) = 0$.

d) X hat eine auf ganz $\mathbb{R}$ positive Dichte. Daher ist F streng monoton wachsend und stetig, d.h. die Quantilfunktion ist die Umkehrfunktion von F.

$$p = F(x) \iff \begin{cases} p = \frac{1}{2}e^x \iff x = \log(2p), & x < 0, \\ p = 1 - \frac{1}{2}e^{-x} \iff x = -\log(2(1-p)), & x \geq 0. \end{cases}$$

Wegen $F(0) = \frac{1}{2}$ ist das p-Quantil von X ist also gegeben durch

$$Q_p(X) = \begin{cases} \log(2p), & p < \frac{1}{2}, \\ -\log(2(1-p)), & p \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Aufgabe 7
Lösungsvorschlag: (2+2+1+2 = 7 Punkte)

a) Wir definieren $p_i := \mathbb{P}(X = i)$ für $i = 0, 1, 2$. Nach Voraussetzung gilt

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbb{E}[X] = p_1 + 2p_2 \\ \frac{3}{2} &= \mathbb{E}[X^2] = p_1 + 4p_2. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$p_2 = \frac{1}{4}, \quad p_1 = \frac{1}{2}, \quad p_0 = \frac{1}{4}$$

Somit gilt

$$g_X(t) = \sum_{k=0}^{2} t^k\, p_k = p_0 + t\, p_1 + t^2\, p_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}t^2 = \frac{1}{4}\left(1 + 2t + t^2\right) = \frac{1}{4}(1+t)^2, |t| \leq 1.$$

b) Es gilt

$$g_X(t) = \frac{1}{4}(1+t)^2 = \frac{1}{2}(1+t)\,\frac{1}{2}(1+t), \quad |t| \leq 1,$$

wobei die Funktion $h(t) = \frac{1}{2}(1+t)$ offenbar die erzeugende Funktion einer $\mathrm{Bin}(1, 1/2)$-verteilten Zufallsvariable (bzw. $\mathrm{U}(\{0,1\})$-verteilten Zufallsvariable). Sind X_1, X_2 stochastisch unabhängig und je $\mathrm{Bin}(1, 1/2)$-verteilt, so gilt nach der Multiplikationsformel

$$\frac{1}{4}(1+t)^2 = g_X(t) = g_{X_1}(t)\, g_{X_2}(t) = \frac{1}{2}(1+t)\,\frac{1}{2}(1+t), \quad |t| \le 1.$$

Da die Verteilung von $\mathbb{N}_0$-wertigen Zufallsvariablen eindeutig durch die erzeugende Funktion beschrieben wird (Eindeutigkeitssatz), folgt, dass X die gleiche Verteilung hat wie $X_1 + X_2$ und somit ist X $\mathrm{Bin}(2, 1/2)$-verteilt.

c) Es gilt

$$g_{3X}(t) = \sum_{k=0}^{2} t^{3k} p_k = \sum_{k=0}^{2} (t^3)^k\, p_k = g_X(t^3).$$

d) Nach dem Satz über den Zusammenhang der erzeugende Funktionen und Momenten gilt

$$\mathbb{E}[3X(3X-1)] = g''_{3X}(1-).$$

Wir benötigen also die zweite Ableitung von g_{3X}:

$$\begin{aligned} g_{3X}(t) &= \frac{1}{4}(1+t^3)^2, \\ g'_{3X}(t) &= \frac{3t^2}{2}(1+t^3) = \frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{2}t^5, \\ g''_{3X}(t) &= 3t + \frac{15}{2}t^4. \end{aligned}$$

Somit ist

$$\mathbb{E}[3X(3X-1)] = g''_{3X}(1-) = g''_{3X}(1) = \frac{21}{2}.$$

Aufgabe 8
Lösungsvorschlag: (8 Punkte)

	Wahr	Falsch
Seien M, Ω nichtleere Mengen, wobei $M \subseteq \Omega$. Weiter sei $\mathcal{A}$ eine	X	
Aus $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C)$ folgt die stochastische Un-		X
Sei $U \sim \mathrm{U}(0,1)$. Dann gilt		X
Seien X und Y Zufallsvariablen mit existierenden Erwartungswer-		X
Die Hypergeometrische Verteilung ist eine Pólya-Verteilung.	X	
Seien $a \in \mathbb{R}$ und $X_1, X_2, \ldots$ nicht-positive Zufallsvariablen auf ei-	X	
Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, je $\mathrm{Bin}(1,\vartheta)$-verteilte Zufallsva-	X	
Es sei $(\mathcal{X}, (\mathbb{P}_\vartheta)_{\vartheta \in \Theta})$ ein statistisches Modell. Weiter sei $\mathcal{C} : \mathcal{X} \to$		X