Mathematik Fachschaft Informatik
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Umbruch von Luca
Version 1 24.05.2019

WS 18/19 05.04.2019

Henze
Einführung in die Stochastik

Dauer: 120 min. Lösung: offiziell Bestanden mit: 24 P.
Hilfsmittel: beidseitiges DIN A4 Cheatsheet, Taschenrechner (nicht programmier-, vernetzbar)

Aufgabe 1 (9 Punkte)

An einer Theatergarderobe geben n Personen ihre Mäntel ab. Aufgrund eines Stromausfalls werden nach der Vorstellung die Mäntel im Dunkeln in rein zufälliger Reihenfolge zurückgegeben.

a) Welchen Erwartungswert besitzt die Anzahl der Personen, die ihren eigenen Mantel zurück erhalten?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält mindestens eine Person ihren eigenen Mantel zurück? Wie verhält sich der Werte für $n \to \infty$?

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ Personen ihren eigenen Mantel zurück erhalten.

Hinweis: Verwenden Sie den Grundraum $\Omega = \mathrm{P}_n^n(oW)$ aller Permutationen der Zahlen $1, \ldots, n$ und die Ereignisse

$$A_j = \{\text{„}j\text{-te Person erhält eigenen Mantel zurück“}\} = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \Omega : a_j = j\}$$

für $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Aufgabe 2 (9 Punkte)

Gegeben seien für $\alpha \in \mathbb{R}$ zwei Zufallsvariablen X und Y, deren gemeinsame Verteilung

$$\mathbb{P}(X = i,\ Y = j), \quad i \in \{0, 1\},\ j \in \{1, 2\},$$

gemäß der folgenden Tabelle gegeben ist.

i \ j	$j = 1$	$j = 2$	$\mathbb{P}(X = i)$
$i = 0$	$\frac{3\alpha + 2}{6}$	$\frac{2 - 3\alpha}{6}$	
$i = 1$	$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{3}$
$\mathbb{P}(Y = j)$			1

a) Vervollständigen Sie die Tabelle. **Eine Begründung ist nicht erforderlich.**

b) Wie heißt die marginale Verteilung von X? **Eine Begründung ist nicht erforderlich.**

c) Bestimmen Sie die Menge W aller $\alpha \in \mathbb{R}$, für die durch die obige Vorschrift eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\{0, 1\} \times \{1, 2\}$ gegeben ist.

e) Berechnen Sie $\mathbb{E}[X^2 Y^2]$.

f) Für welche $\alpha \in W$ sind X^2 und Y^2 unkorreliert?

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Es sei Ω ein Grundraum. Des Weiteren seien $A, B, C \subseteq \Omega$ Ereignisse mit $0 < \mathbb{P}(A),\ \mathbb{P}(B),\ \mathbb{P}(C) < 1$ und $\mathbb{P}(A \cap C) > 0,\ \mathbb{P}(B \cap C) > 0$. Zusätzlich gelte

(i) $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|B^c)$,

(ii) $\mathbb{P}(A \cap C^c) = \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(C))$,

(iii) $\mathbb{P}(B|A \cap C) = \mathbb{P}(B)$,

(iv) $\mathbb{P}(A|B \cap C) = \mathbb{P}(A)$.

Zeigen Sie, dass A, B, C stochastisch unabhängig sind.

Aufgabe 4 (7 Punkte)

Es seien $X_1, X_2, \ldots$ stochastisch unabhängige Zufallsvariablen mit gleichem Erwartungswert $\mu := \mathbb{E}X_1$ und gleicher Varianz $0 < \sigma^2 := \mathbb{V}(X_1) < \infty$. Des Weiteren sei $\overline{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j$.

a) Zeigen Sie: $\mathbb{E}\big[(\overline{X}_n - \mu)^2\big] \to 0$ für $n \to \infty$.

b) Zeigen Sie: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{\sigma}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \quad \forall\, \varepsilon > 0.$$

c) Es seien nun $X_1, X_2, \ldots$ zusätzlich identisch verteilt. Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\overline{X}_n \leq \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.8413 \quad \text{(auf 4 Dezimalstellen genau).}$$

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Es sei X eine diskrete Zufallsvariable, deren Wahrscheinlichkeitsfunktion gegeben ist durch

k	0	1	2	3
$\mathbb{P}_\vartheta(X = k)$	$2\vartheta/3$	$\vartheta/3$	$2(1-\vartheta)/3$	$(1-\vartheta)/3$

Dabei ist $\vartheta \in (0, 1)$ ein unbekannter Parameter.

a) Zeigen Sie: Durch $\mathbb{P}_\vartheta(A) = \sum_{k\in A} \mathbb{P}_\vartheta(X = k)$ für $A \subseteq \{0, 1, 2, 3\}$ wird ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{P}(\{0, 1, 2, 3\})$ definiert.

b) Berechnen Sie das ϑ-Quantil von X.

Es wurden folgende 10 unabhängige Realisierungen der Zufallsvariablen X beobachtet:

$$x := (3, 0, 2, 1, 3, 2, 1, 0, 2, 1).$$

c) Zeigen Sie: Die Loglikelihood-Funktion für ϑ zur Beobachtung x ist gegeben durch

$$\ell_x(\vartheta) = 5\log(\vartheta) + 5\log(1-\vartheta) + c,$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist.

d) Berechnen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert für ϑ zur Beobachtung x.

Aufgabe 6 (7 Punkte)

Eine Reifenfirma möchte ein neu entwickeltes Profil (A) mit einem bewährten Profil (B) vergleichen. Dazu werden 10 Fahrzeuge jeweils zuerst mit Reifen des Typs A, dann des Typs B bestückt und unter gleichen Bedingungen abgebremst. Es wird jeweils die Differenz der Bremswege gemessen. Es ergaben sich folgende Messwerte $x_1, \ldots, x_{10}$. Dabei bezeichne x_j die Bremswegdifferenz $B - A$ bei Fahrzeug j, $j \in \{1, \ldots, 10\}$:

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_j	0.4	-0.2	3.1	5.0	10.3	1.6	0.9	-1.4	1.7	1.5

Wir nehmen an, dass $x_1, \ldots, x_{10}$ Realisierungen von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_{10}$ sind. Von Interesse ist die unbekannte Wahrscheinlichkeit $\vartheta := \mathbb{P}(X_1 > 0)$, dass Profil A besser ist als Profil B.

a) Die Reifenfirma möchte mit einem statistischen Test nachweisen, dass das neu entwickelte Profil A mit einer Wahrscheinlichkeit größer als 0.5 besser ist als das Profil B. Wie sind Hypothese und Alternative zu wählen? **Eine Begründung ist nicht erforderlich.**

Im Folgenden habe der kritische Bereich für den in a) angegebenen Test die Form

$$\mathcal{K} = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_{10}) \in \mathbb{R}^{10} : \sum_{i=1}^{10} \mathbf{1}\{x_i > 0\} \geq c \right\}$$

für ein $c \in \{0, 1, \ldots, 10\}$.

b) Geben Sie die Gütefunktion des Tests aus a) an.

c) Bestimmen Sie den kritischen Wert c für ein Signifikanzniveau von $1\,\%$.

d) Wurde der erwünschte Nachweis aus a) der Reifenfirma durch die Messwerte erbracht (Signifikanzniveau $1\,\%$)?

Aufgabe 7 (7 Punkte)

Die stetige Zufallsvariable X habe die Dichte $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit

$$f_a(x) := a\,x\,(1-x)^2\,\mathbf{1}_{(0,1)}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dabei ist $a > 0$ ein Parameter.

a) Zeigen Sie, dass f_a nur für $a = 12$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.

Im Folgenden sei $a = 12$.

b) Bestimmen Sie die zu f_{12} gehörende Verteilungsfunktion F.

c) Berechnen Sie $\mathbb{P}(X \geq 1/2)$.

d) Ist die Verteilung von X symmetrisch verteilt um den Wert $1/2$?

e) Zeigen Sie:

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{(1-X)^2}\right] = 6.$$

Aufgabe 8 (8 Punkte)

Geben Sie bei den folgenden Aussagen jeweils an, ob diese wahr oder falsch sind. Kennzeichnen Sie Ihre Antwort mit einem Kreuz. Jede richtige Antwort wird mit einem Punkt bewertet, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Lassen Sie einen Aufgabenteil unbeantwortet, so erhalten Sie für diesen 0 Punkte. Bei einer negativen Gesamtpunktzahl wird die Aufgabe mit 0 Punkten bewertet. **Die Antworten müssen nicht begründet werden.**

	Wahr	Falsch
Es seien Ω ein Grundraum und $A, B \subseteq \Omega$. Es gilt $$(\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B)(\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B) = \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B.$$		
Gegeben seien die 4 Buchstaben $\{A, E, N, R\}$. Ein Wort mit k Buchstaben ist ein k-Tupel $(a_1, \ldots, a_k)$ mit $a_i \in \{A, E, N, R\}$ für $i = 1, \ldots, k$. Es lassen sich genau 24 verschiedene dreibuchstabige Wörter aus diesen 4 Buchstaben bilden.		
Es gilt allgemein $\mathbb{V}(X) = \min_{t\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\big[\lvert X - t\rvert\big]$.		
Der Zufallsvektor $(X_1, \ldots, X_s)$ $(s \geq 3)$ besitze eine Multinominalverteilung. Dann ist die bedingte Verteilung von $(X_1, \ldots, X_{s-1})$ gegeben $X_s = k_s$ eine Multinominalverteilung.		
Jede konsistente Schätzfolge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für ϑ ist asymptotisch erwartungstreu für ϑ.		
Das Mengensystem $$\mathcal{H} := \{(x, y] : x, y \in \mathbb{R}^n, x < y\} \cup \{\emptyset\}$$ ist eine σ-Algebra.		
Es seien $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum und $X_j : \Omega \to \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$, $(\mathcal{A}, \mathcal{B}^1)$-messbare Abbildungen. Dann ist $$X := (X_1, \ldots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$$ $(\mathcal{A}, \mathcal{B}^n)$-messbar.		
Die Zufallsvariable X habe ein Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda > 0$. Dann existiert ein $x \in \mathbb{R}$ mit $F(x) - F(x-) > 0$, wobei F die Verteilungsfunktion von X und $F(x-)$ den linksseitigen Grenzwert von F an der Stelle x bezeichnen.		

Aufgabe 1

Lösungsvorschlag: (2+4+3 = 9 Punkte) Da die Mäntel in rein zufälliger Reihenfolge zurückgegeben werden, ist $\mathbb{P}$ die Gleichverteilung auf Ω.

a) Die Zufallsvariable
$$F_n := \sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{A_j}.$$
beschreibt die Anzahl der Personen, die ihren eigenen Mantel zurück erhalten. Da $\mathbb{P}$ die Gleichverteilung ist, gilt
$$\mathbb{P}(A_j) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$
für alle $j = 1, \ldots, n$ und daher
$$\mathbb{E}(F_n) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A_j) = 1.$$

b) Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine Person ihren eigenen Mantel zurück erhält ist
$$\mathbb{P}(F_n \geq 1) = \mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}),$$
wobei
$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \frac{(n-k)!}{n!}.$$
Das heißt, diese Wahrscheinlichkeit hängt nur von der Anzahl k der Ereignisse ab, die gleichzeitig eintreten sollen, jedoch nicht von der genauen Wahl der Indizes. Somit folgt
$$\mathbb{P}(F_n \geq 1) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!}.$$
Für $n \to \infty$ gilt
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(F_n \geq 1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k}}{k!} = -(e^{-1} - 1) = 1 - e^{-1}.$$

c) Zu Berechnen ist $\mathbb{P}(F_n = k)$. Aus b) wissen wir, dass $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_j}) = \frac{(n-j)!}{n!}$, $j = 1, \ldots, n$, nur von j abhängt, aber nicht von der speziellen Wahl der Indizes $i_1, \ldots, i_j$. Um $\mathbb{P}(F_n = k)$ zu berechnen können wir also die spezielle Form der Jordan-Formel benutzen (Folgerung 7.9) und wir erhalten für jedes $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F_n = k) &= \sum_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} \binom{j}{k} \binom{n}{j} \mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_j) = \sum_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} \binom{j}{k} \frac{1}{j!} \\ &= \sum_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} \frac{1}{k!(j-k)!} = \frac{1}{k!} \sum_{j=k}^{n} \frac{(-1)^{j-k}}{(j-k)!}.\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Lösungsvorschlag: (2+1+2+1+1+2=9 Punkte)

a)

$i \backslash j$	$j=1$	$j=2$	$\mathbb{P}(X=i)$
$i=0$	$\frac{3\alpha+2}{6}$	$\frac{2-3\alpha}{6}$	$\frac{2}{3}$
$i=1$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
$\mathbb{P}(Y=j)$	$\frac{\alpha+1}{2}$	$\frac{1-\alpha}{2}$	1

b) $X \sim \text{Bin}(1, 1/3)$. Alternativ: X ist Bernoulli-Verteilt mit Trefferwahrscheinlichkeit $1/3$.

c) Offenbar gilt $\mathbb{P}(X=0, Y=1) + \mathbb{P}(X=0, Y_2) + \mathbb{P}(X=1, Y=1) + \mathbb{P}(X=1, Y=2) = 1$. Somit muss $\alpha \in \mathbb{R}$ so gewählt werden, dass gilt $\mathbb{P}(X=0, Y=1), \mathbb{P}(X=0, Y_2) \in [0,1]$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{3\alpha+2}{6} &\geq 0 \quad &&\Longleftrightarrow \quad \alpha \geq -\frac{2}{3},\\
\frac{3\alpha+2}{6} &\leq 1 \quad &&\Longleftrightarrow \quad \alpha \leq \frac{4}{3},\\
\frac{2-3\alpha}{6} &\geq 0 \quad &&\Longleftrightarrow \quad \alpha \leq \frac{2}{3},\\
\frac{2-3\alpha}{6} &\leq 1 \quad &&\Longleftrightarrow \quad \alpha \geq -\frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

Somit ist für

$$\alpha \in W := \left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]$$

durch die obige Vorschrift eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $\{0,1\} \times \{1,2\}$ auf definiert.

d) Da mit die marginale Verteilung von Y ein Gleichverteilung auf $\{1,2\}$ ist, muss gelten

$$\frac{\alpha+1}{2} = \frac{1-\alpha}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = 0 \in W.$$

e) Es gilt

$$\mathbb{E}[X^2 Y^2] = \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

f) Es gilt

$$\mathbb{E}[X^2] = \frac{1}{3}, \qquad \mathbb{E}[Y^2] = \frac{\alpha+1}{2} + \frac{4-4\alpha}{2} = \frac{5-3\alpha}{2}$$

und somit

$$C(X^2, Y^2) = \mathbb{E}[X^2 Y^2] - \mathbb{E}[X^2]\,\mathbb{E}[Y^2] = \frac{5-5+3\alpha}{6} \overset{!}{=} 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = 0 \in W$$

Aufgabe 3

Lösungsvorschlag: (5 Punkte) Bedingung (i) ist äquivalent zu

$$\begin{aligned}
& \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A\cap B^c)}{1-\mathbb{P}(B)} \\
\iff \quad & \mathbb{P}(A\cap B) - \mathbb{P}(A\cap B)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A\cap B^c)\mathbb{P}(B) \\
\iff \quad & \mathbb{P}(A\cap B) = \big(\underbrace{\mathbb{P}(A\cap B) + \mathbb{P}(A\cap B^c)}_{=\mathbb{P}(A)}\big)\mathbb{P}(B) \\
\iff \quad & \mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).
\end{aligned}$$

Bedingung (ii) impliziert

$$\mathbb{P}(A\cap C^c) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C^c),$$

d.h. A und C^c sind unabhängig und damit auch A und C nach Satz 11.3. Somit folgt in Verbindung mit Bedingung (iii)

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(B\cap A\cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A\cap C) \\
\iff \quad & \mathbb{P}(A\cap B\cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C).
\end{aligned}$$

Schließlich folgt aus Bedingung (iv) und der eben gezeigten Unabhängigkeit von A, B und C

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(A\cap B\cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B\cap C) \\
\iff \quad & \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B\cap C) \\
\iff \quad & \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(B\cap C).
\end{aligned}$$

Somit folgt die Behauptung.

Aufgabe 4

Lösungsvorschlag: (2+2.5+2.5=7 Punkte)

a) Da $\mathbb{E}[\overline{X}_n] = \mu$ folgt mit der Unabhängigkeit

$$\mathbb{E}\big[(\overline{X}_n - \mu)^2\big] = \mathbb{V}(\overline{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n} \to 0 \quad \text{für } n\to\infty.$$

b) Da für

$$\widetilde{X}_n := \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{\sigma} = \frac{\overline{X}_n - \mathbb{E}[\overline{X}_n]}{\sqrt{\mathbb{V}(\overline{X}_n)}}$$

gilt $\mathbb{E}[\widetilde{X}_n] = 0$ und $\mathbb{V}(\widetilde{X}_n) = 1$, folgt mit der Tschebyschow-Ungleichung

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{\sigma}\right| \geq \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\left|\widetilde{X}_n\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

c) Mit dem zentralen Grenzwertsatz von Lindeberg-Lévy gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\overline{X}_n \leq \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{\sigma} \leq 1\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mathbb{E}[X_1]}{\sqrt{n\mathbb{V}(X_1)}} \leq 1\right) \\
&= \Phi(1) \approx 0.8413.
\end{aligned}$$

Aufgabe 5

Lösungsvorschlag: (1+1+2.5+3.5 = 8 Punkte)

a) Nach Satz 4.7 ist durch $\mathbb{P}_\vartheta(A) = \sum_{k\in A} \mathbb{P}_\vartheta(X = k)$ für $A \subseteq \{0,1,2,3\}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{P}(\{0,1,2,3\})$ definiert, da

$$\sum_{k\in\{0,1,2,3\}} \mathbb{P}_\vartheta(X = k) = \frac{2\vartheta + \vartheta + 2(1-\vartheta) + (1-\vartheta)}{3} = 1.$$

b) Das ϑ-Quantil von X ist 1, da $\mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) = \vartheta$.

c) Die Likelihood-Funktion für ϑ zur Beobachtung x ist

$$L_x(\vartheta) = \prod_{i=1}^{10} \mathbb{P}_\vartheta(X_i = x_i) = \left(\frac{2\vartheta}{3}\right)^2 \left(\frac{\vartheta}{3}\right)^3 \left(\frac{2(1-\vartheta)}{3}\right)^3 \left(\frac{1-\vartheta}{3}\right)^2.$$

Somit ist die Loglikelihood-funktion für ϑ zur Beobachtung x gegeben durch

$$\begin{aligned}
\ell_x(\vartheta) &= \log L_x(\vartheta)\\
&= 2\left(\log 2 - \log 3 + \log\vartheta\right) + 3\left(-\log 3 + \log\vartheta\right) + 3\left(\log 2 - \log 3 + \log(1-\vartheta)\right)\\
&\qquad + 2\left(-\log 3 + \log(1-\vartheta)\right)\\
&= 5\log\vartheta + 5\log(1-\vartheta) + \underbrace{5\log 2 - 10\log 3}_{=:c}
\end{aligned}$$

d) Es gilt

$$\begin{aligned}
\ell_x'(\vartheta) = \frac{5}{\vartheta} - \frac{5}{1-\vartheta} &\overset{!}{=} 0\\
\iff \quad 1-\vartheta &= \vartheta\\
\iff \quad \vartheta &= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Dies ist eine Maximumstelle, da

$$\ell_x''(1/2) = -5\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} - 5\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = -40 < 0.$$

Somit ist der Maximum-Likelihood-Schätzerwert $\widehat{\vartheta}$ für ϑ zur Beobachtung x

$$\widehat{\vartheta} = \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 6

Lösungsvorschlag: (1+1.5+3.5+1 = 7 Punkte) Im Folgenden sei $x = (x_1, \dots, x_{10}) \in \mathbb{R}^{10}$ eine Realisierung des Zufallsvektors $X = (X_1, \dots, X_{10})$ und

$$S(X) := \sum_{i=1}^{10} \mathbf{1}\{X_i > 0\}.$$

a) $H_0 : \vartheta \leq 0.5$ gegen $H_1 : \vartheta > 0.5$.

b) Nach der gegeben Struktur des kritischen Bereiches $\mathcal{K}$ ist die Gütefunktion $g : [0,1] \to [0,1]$ gegeben durch

$$g(\vartheta) = \mathbb{P}_\vartheta(X \in \mathcal{K}) = \mathbb{P}_\vartheta(S(X) \geq c) = \sum_{j=c}^{n} \binom{n}{j} \vartheta^j (1-\vartheta)^{n-j},$$

da $S(X) \sim \operatorname{Bin}(10, \vartheta)$.

c) Wir legen den kritischen Wert c (und somit den kritischen Bereich $\mathcal{K}$) mit Hilfe des vorgegebenen Testniveaus $\alpha = 0.01$ fest. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Gütefunktion g streng monoton wachsend ist. Folglich gilt für $\vartheta \in \Theta_0 := [0, 0.5]$

$$g(\vartheta) \leq g(0.5) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \sum_{j=c}^{10} \binom{10}{j} \overset{!}{\leq} 0.01.$$

Damit die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art klein wird, sollte c unter der obigen Nebenbedingung möglichst klein sein. Also

$$c = \min \left\{ k \in \{0, 1, \dots, 10\} : \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \sum_{j=c}^{10} \binom{10}{j} \leq 0.01 \right\}.$$

Da

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{10} \sum_{j=10}^{10} \binom{10}{j} = 0.00098 \qquad \text{und} \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \sum_{j=9}^{10} \binom{10}{j} = 0.0107 > 0.01,$$

erhalten wir $c = 10$, d.h.

$$\mathcal{K} = \left\{ x \in \mathbb{R}^{10} : S(x) = 10 \right\}.$$

d) Für die gegebene Stichprobe gilt $S(x) = 8$. Somit steht die Stichprobe nicht im Widerspruch zur H_0 bei einer zugelassen Wahrscheinlichkeit von $1\,\%$ für den Fehler 1. Art, d.h. die Behauptung der Reifenfirma ist nicht statistisch signifikant nachgewiesen.

Aufgabe 7

Lösungsvorschlag: (1.5+2+1.5+1+1 = 7 Punkte)

a) Es muss gelten

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_a(x)\,dx = a\int_0^1 x(1-x)^2\,dx = a\int_0^1 x - 2x^2 + x^3\,dx = \frac{a}{12}.$$

Dies is genau dann erfüllt, wenn $a = 12$.

b) Es ist

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f_{12}(x)\,dx = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 12\left(\frac{1}{2}t^2 - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{4}t^4\right) = 3t^4 - 8t^3 + 6t^2, & 0 < t < 1 \\ 1, & t \geq 1. \end{cases}$$

c) Es gilt

$$\mathbb{P}(X \geq 1/2) = 1 - F(1/2) = \frac{5}{16} = 0.3125\,.$$

d) Nein, da dann $\mathbb{P}(X \geq 1/2) = \mathbb{P}(X \leq 1/2) = 0.5$ gelten müsste, was nach c) nicht erfüllt ist.

e) Es ist

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{(1-X)^2}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1-x)^2} f_{12}(x)\,dx = 12\int_0^1 x\,dx = 12\frac{1}{2} = 6.$$

Aufgabe 8

Lösungsvorschlag: (8 Punkte)

	Wahr	Falsch
Es seien Ω ein Grundraum und $A, B \subseteq \Omega$. Es gilt $$(\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B)(\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B) = \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B.$$	X	
Gegeben seien die 4 Buchstaben $\{A, E, N, R\}$. Ein Wort mit k Buchstaben ist ein k-Tupel $(a_1, \ldots, a_k)$ mit $a_i \in \{A, E, N, R\}$ für $i = 1, \ldots, k$. Es lassen sich genau 24 verschiedene dreibuchstabige Wörter aus diesen 4 Buchstaben bilden.		X
Es gilt allgemein $\mathbb{V}(X) = \min_{t \in \mathbb{R}} \mathbb{E}\big[\lvert X - t \rvert\big]$.		X
Der Zufallsvektor $(X_1, \ldots, X_s)$ $(s \geq 3)$ besitze eine Multinominalverteilung. Dann ist die bedingte Verteilung von $(X_1, \ldots, X_{s-1})$ gegeben $X_s = k_s$ eine Multinominalverteilung.	X	
Jede konsistente Schätzfolge $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für ϑ ist asymptotisch erwartungstreu für ϑ.		X
Das Mengensystem $$\mathcal{H} := \{(x, y] : x, y \in \mathbb{R}^n, x < y\} \cup \{\emptyset\}$$ ist eine σ-Algebra.		X
Es seien $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum und $X_j : \Omega \to \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$, $(\mathcal{A}, \mathcal{B}^1)$-messbare Abbildungen. Dann ist $$X := (X_1, \ldots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$$ $(\mathcal{A}, \mathcal{B}^n)$-messbar.	X	
Die Zufallsvariable X habe ein Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda > 0$. Dann existiert ein $x \in \mathbb{R}$ mit $F(x) - F(x-) > 0$, wobei F die Verteilungsfunktion von X und $F(x-)$ den linksseitigen Grenzwert von F an der Stelle x bezeichnen.		X