WS 20/21 03.03.2021

Hug

Einführung in die Stochastik (Hauptklausur)

Dauer: 120 min. Lösung: offiziell Bestanden mit: 20 P.

Bemerkungen: Hilfsmittel: beidseitig handbeschriebenes DIN A4-Blatt

Aufgabe 1 (1+1+1.5+1.5+2=7 Punkte)

Bei dem Würfelspiel *Kniffel* werden fünf faire, sechsseitige Würfel gleichzeitig geworfen.

(a) Beschreiben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum zur Modellierung des Spiels.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man in einem Wurf

(b) 5 gleiche Augenzahlen (einen sogenannten „Kniffel“)?

(c) einen Vierling (genau 4 gleiche Augenzahlen)?

(d) ein Full House (Drilling und Zwilling, also z.B. 55522)?
Hinweis: 5 gleiche Augenzahlen zählen hier nicht als Full House. Der Drilling und der Zwilling müssen mit unterschiedlichen Augenzahlen erreicht werden.

(e) einen Drilling ohne einen weiteren Zwilling (z.B. 33361)?

Aufgabe 2 (1.5+3+1+3.5+1+1+1=12 Punkte)

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Die Funktion $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

	$f_\alpha(j,k)$	j: -1	0	1	$\mathbb{P}(Y=k)$
k	-1	$\frac{1}{4}-\alpha$	$\frac{1}{12}$	0	
	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	
	1	$\frac{1}{4}+\alpha$	$\frac{1}{12}$	0	
	$\mathbb{P}(X=j)$				

und $f_\alpha(j,k) = 0$, falls $j,k \notin \{-1,0,1\}$.

(a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist f_α die Zähldichte eines diskreten Zufallsvektors (X,Y), das heißt $f_\alpha(j,k) = \mathbb{P}(X=j, Y=k)$?

(b) Bestimmen Sie für diese α die Randverteilungen von X und Y. Tragen Sie die Werte anschließend in die obige Tabelle ein.

(c) Berechnen Sie $\mathbb{P}(X=0 \,|\, Y=-1)$.

(d) Zeigen Sie: $\mathbb{E}(X) = -\frac{5}{12}$, $\mathbb{E}(Y) = 2\alpha$, $\mathbb{V}(X) = \frac{59}{144}$, $\mathbb{V}(Y) = \frac{2}{3} - 4\alpha^2$, $\mathbb{E}(XY) = -2\alpha$.

(e) Berechnen Sie $\mathbb{E}[(X+Y)^2] + \mathbb{E}[(X-Y)^2]$.

(f) Für welche α sind X und Y unkorreliert?

(g) Für welche α sind X und Y unabhängig?

Aufgabe 3 (3+2+2=7 Punkte)

Eine $\mathbb{N}_0$-wertige Zufallsvariable X habe die erzeugende Funktion

$$g_X(t) = \frac{1}{12}\left(3 + t^3(2+7t)\right), \quad t \in [-1,1].$$

(a) Bestimmen Sie die Zähldichte f_X von X.

(b) Berechnen Sie $\mathbb{E}(X)$ und $\mathbb{V}(X)$.

(c) Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von unabhängig und identisch verteilten $\mathbb{N}_0$-wertigen Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}(X_1) < \infty$. Sei ferner N eine von $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige $\mathbb{N}_0$-wertige Zufallsvariable mit $\mathbb{E}(N) < \infty$. Sei schließlich $S_N := \sum_{i=1}^N X_i$.

Zeigen Sie

$$\mathbb{E}(S_N) = \mathbb{E}(N) \cdot \mathbb{E}(X_1).$$

Aufgabe 4 (2+2+(1+2)=7 Punkte)

(a) Es seien X und Y unabhängige Zufallsvariablen mit $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, $Y \sim \mathrm{Exp}(\mu)$ für λ, $\mu > 0$. Bestimmen Sie die Verteilung von $\min\{X, Y\}$.

(b) Es seien X_1 und X_2 unabhängige, standardnormalverteilte Zufallsvariablen. Zeigen Sie

$$X_1^2 + X_2^2 \sim \mathrm{Exp}\left(\frac{1}{2}\right).$$

Hinweis: Sie können zum Nachweis der Behauptung ein Resultat aus der Vorlesung verwenden. Eine direkte Rechnung ist hier nicht empfehlenswert.

(c) Sei $\lambda > 0$. Es sei Z eine Zufallsvariable mit Lebesgue-Dichte

$$f(z) = \begin{cases} \lambda \cdot z^{-(\lambda+1)}, & z \geq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(i) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von Z.

(ii) Zeigen Sie $\ln(Z) \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

Aufgabe 5 (2+2+1+3=8 Punkte)

Sei $\sigma > 0$. Sei ferner

$$f(x) = c \cdot \mathrm{e}^{-\sigma \cdot |x|},\ x \in \mathbb{R},$$

für einen Parameter $c \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}$ so, dass f die Lebesgue-Dichte einer Zufallsvariablen Z_σ ist.

Hinweis: Falls Sie Teil (a) nicht lösen konnten, können Sie die folgenden Aufgabenteile mit einem nicht weiter bestimmten festen $c > 0$ bearbeiten.

(c) Sei $\lambda > 0$. Es sei Z eine Zufallsvariable mit Lebesgue-Dichte

$$f(z) = \begin{cases} \lambda \cdot z^{-(\lambda+1)}, & z \geq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(i) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von Z.

(ii) Zeigen Sie $\ln(Z) \sim \operatorname{Exp}(\lambda)$.

Aufgabe 6 (2+1.5+(2+3.5)=9 Punkte)

Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}(X_1^2) < \infty$ und $\mathbb{E}\left(|X_1 - \mathbb{E}[X_1]|\right) > 0$.

(a) Zeigen Sie: $\mathbb{E}(|X_1|) < \infty$ und $0 < \mathbb{V}(X_1) < \infty$.

(b) Setze $\mu := \mathbb{E}(X_1)$, $\sigma := \sqrt{\mathbb{V}(X_1)}$. Zeigen Sie:

$$\mathbb{P}\left(X_1 - \mu < \frac{2}{\sqrt{3}}\,\sigma\right) \geq \frac{1}{4}.$$

(c) Nun seien $\mathbb{E}[X_1] = \frac{3}{2}$ und $\mathbb{E}[X_1^2] = \frac{10}{3}$ erfüllt. Weiter sei $S_n := X_1 + \cdots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$.

(i) Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz von S_n.

(ii) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(S_n \leq a\,n + \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Das Ergebnis können Sie (falls erforderlich) mit Hilfe von Werten der Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung angeben.

Aufgabe 1 (1+1+1.5+1.5+2=7 Punkte)

Lösungsvorschlag:

Es folgen zwei unterschiedliche Ansätze zur Bestimmung der gesuchten Wahrscheinlichkeiten.

1. Lösungsmöglichkeit:

   (a) Als Grundraum wählen wir $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^5$. Sei X_j die Anzahl der Würfel, die Augenzahl j zeigen. Da das Spiel gleichwertig dazu ist, einen Würfel fünf mal in unabhängiger Folge zu werfen, gilt

   $$(X_1, \ldots, X_6) \sim \text{Mult}\left(5; \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{6}\right). \boxed{\mathbf{1P}}$$

   (b) Es gibt 6 Möglichkeiten, die Zahl zu wählen, mit der der Kniffel geworfen wird. Daher gilt

   $$\mathbb{P}(\text{„Kniffel“}) = 6 \cdot \mathbb{P}(X_1 = 5, X_2 = 0, \ldots, X_6 = 0) = 6 \cdot \frac{5!}{5!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^5 = \frac{1}{6^4}. \boxed{\mathbf{1P}}$$

   (c) Es gibt 6 Möglichkeiten, die Zahl für den Vierling zu wählen und 5 Möglichkeiten, die Zahl des Würfels mit anderer Augenzahl zu wählen. Daher gilt

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{„Vierling“}) &= 6 \cdot 5 \cdot \mathbb{P}(X_1 = 4, X_2 = 1, X_3 = 0, \ldots, X_6 = 0)\\ &= 6 \cdot 5 \cdot \frac{5!}{4!1!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^5 = \frac{25}{6^4}. \boxed{\mathbf{1.5P}}\end{aligned}$$

   (d) Es gibt 6 Möglichkeiten, die Zahl des Drillings zu wählen und 5 Möglichkeiten, die Zahl des Zwillings zu wählen. Also gilt

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{„Full House“}) &= 6 \cdot 5 \cdot \mathbb{P}(X_1 = 3, X_2 = 2, X_3 = 0, \ldots, X_6 = 0)\\ &= 6 \cdot 5 \cdot \frac{5!}{3!2!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^5 = \frac{50}{6^4}. \boxed{\mathbf{1.5P}}\end{aligned}$$

   (e) Es gibt 6 Möglichkeiten, die Zahl für den Drilling zu wählen und zudem $\binom{5}{2}$ Möglichkeiten, die anderen beiden Zahlen zu wählen. Daher gilt

   $$\begin{aligned}&\mathbb{P}(\text{„Drilling ohne Zwilling“})\\ &= 6 \cdot \binom{5}{2} \cdot \mathbb{P}(X_1 = 3, X_2 = 1, X_3 = 1, X_4 = 0, \ldots, X_6 = 0)\\ &= 6 \cdot \frac{5!}{3!2!} \cdot \frac{5!}{3!1!1!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^5 = \frac{200}{6^4}. \boxed{\mathbf{2P}}\end{aligned}$$

2. Lösungsmöglichkeit:

   (a) Wir fassen das Spiel als Laplace-Experiment auf, in dem ein Würfel 5 mal hintereinander unabhängig geworfen wird. Als Grundraum wählen wir daher $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^5$ mit $|\Omega| = 6^5$. $\boxed{\mathbf{1P}}$

   (b) Es gibt 6 Möglichkeiten, die Zahl zu wählen, mit der der Kniffel geworfen wird. Bezeichnen wir das Ereignis „Kniffel“mit $K \subset \Omega$, so gilt $|K| = 6$ und daher

   $$\mathbb{P}(K) = \frac{|K|}{|\Omega|} = \frac{1}{6^4}. \boxed{\mathbf{1P}}$$

(c) Es gibt 6 Möglichkeiten, die Zahl für den Vierling zu wählen und zudem 5 Möglichkeiten, die Zahl des Würfels mit anderer Augenzahl zu wählen. Zusätzlich gibt es 5 Möglichkeiten, festzulegen, in welchem der 5 Würfe die Zahl geworfen wird, die nicht zum Vierling gehört. Bezeichnen wir das Ereignis „Vierling“mit $V \subset \Omega$, so gilt $|V| = 6 \cdot 5 \cdot 5 = 150$ und damit

$$\mathbb{P}(V) = \frac{25}{6^4}. \boxed{\mathbf{1.5P}}$$

(d) Es gibt 6 Möglichkeiten, die Zahl für den Drilling und 5 Möglichkeiten, die Zahl für den Zwilling zu wählen. Zudem gibt es $\binom{5}{3}$ Möglichkeiten, festzulegen, in welchen Würfen die Augenzahlen für den Drilling gewürfelt werden. Bezeichnen wir das Ereignis „Full House“mit $F \subset \Omega$, so gilt $|F| = 6 \cdot 5 \cdot \binom{5}{3} = 300$ und damit

$$\mathbb{P}(F) = \frac{50}{6^4}. \boxed{\mathbf{1.5P}}$$

(e) Es gibt 6 Möglichkeiten, die Zahl für den Drilling zu wählen und zudem $\binom{5}{2}$ Möglichkeiten, die beiden (verschiedenen!) Augenzahlen zu wählen, die nicht zum Drilling gehören. Weiter gibt es $\binom{5}{3}$ Möglichkeiten, festzulegen, in welchen Würfen die Augenzahlen für den Drilling geworfen werden, und 2 Möglichkeiten, um die zusätzlichen beiden Zahlen anzuordnen. Bezeichnen wir das Ereignis „Drilling ohne Zwilling“ mit $D \subset \Omega$, so gilt $|D| = 6 \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{5}{3} \cdot 2 = 1200$ und damit

$$\mathbb{P}(D) = \frac{200}{6^4}. \boxed{\mathbf{2P}}$$

Aufgabe 2 (1.5+3+1+3.5+1+1+1=12 Punkte)
Lösungsvorschlag:

(a) Da $\sum_{j,k\in\mathbb{R}} f_\alpha(j,k) = 1$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ $\boxed{\mathbf{0.5P}}$ gilt, ist nur noch $f_\alpha \geq 0$ zu sichern. Letzteres gilt genau dann, wenn

$$-\frac{1}{4} \leq \alpha \leq \frac{1}{4}. \boxed{\mathbf{1P}}$$

(b)

	$f_\alpha(j,k)$	j: -1	0	1	$P(Y=k)$
k	-1	$\frac{1}{4}-\alpha$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{3}-\alpha$
	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$
	1	$\frac{1}{4}+\alpha$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{3}+\alpha$
	$P(X=j)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$	1

$\boxed{\mathbf{3P}}$

(c)

$$\mathbb{P}(X=0\,|\,Y=-1) = \frac{\mathbb{P}(X=0,Y=-1)}{\mathbb{P}(Y=-1)} = \frac{1}{4-12\alpha} \boxed{\mathbf{1P}}$$

(d) Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{j\in\{-1,0,1\}} j\cdot\mathbb{P}(X=j) = (-1)\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{12} = -\frac{5}{12}, \quad \boxed{\textbf{0.5P}}\\
\mathbb{E}(Y) &= \sum_{j\in\{-1,0,1\}} j\cdot\mathbb{P}(Y=j) = (-1)\cdot\left(\frac{1}{3}-\alpha\right)+1\cdot\left(\frac{1}{3}+\alpha\right) = 2\alpha, \quad \boxed{\textbf{0.5P}}\\
\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{j\in\{-1,0,1\}} j^2\cdot\mathbb{P}(X=j) = \frac{1}{2}+\frac{1}{12} = \frac{7}{12}, \quad \boxed{\textbf{0.5P}}\\
\mathbb{E}(Y^2) &= \sum_{j\in\{-1,0,1\}} j^2\cdot\mathbb{P}(Y=j) = \left(\frac{1}{3}-\alpha\right)+\left(\frac{1}{3}+\alpha\right) = \frac{2}{3}, \quad \boxed{\textbf{0.5P}}\\
\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2)-(\mathbb{E}(X))^2 = \frac{7}{12}-\frac{25}{144} = \frac{59}{144}, \quad \boxed{\textbf{0.5P}}\\
\mathbb{V}(Y) &= \mathbb{E}(Y^2)-(\mathbb{E}(Y))^2 = \frac{2}{3}-4\alpha^2, \quad \boxed{\textbf{0.5P}}\\
\mathbb{E}(X\cdot Y) &= \sum_{j,k\in\mathbb{R}} j\cdot k\cdot f_\alpha(j,k) = -2\alpha. \quad \boxed{\textbf{0.5P}}
\end{aligned}$$

(e) Es gilt aufgrund der Linearität des Erwartungswerts

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X+Y)^2+\mathbb{E}(X-Y)^2 &= \mathbb{E}(X^2+2XY+Y^2+X^2-2XY+Y^2) = 2(\mathbb{E}(X^2)+\mathbb{E}(Y^2))\\
&= 2\left(\frac{7}{12}+\frac{2}{3}\right) = \frac{5}{2}. \quad \boxed{\textbf{1P}}
\end{aligned}$$

(f) Die Kovarianz ist gegeben durch

$$\mathbb{C}(X,Y) = \mathbb{E}(X\cdot Y)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = -2\alpha+\frac{5\alpha}{6} = -\frac{7}{6}\alpha.$$

Also gilt $\mathbb{C}(X,Y)=0$ genau dann, wenn $\alpha=0$ ist. Dann sind X und Y unkorreliert. $\boxed{\textbf{1P}}$

(g) Die Zufallsvariablen X und Y sind für kein α unabhängig, da z.B.

$$\mathbb{P}(X=0,Y=0) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{12} = \mathbb{P}(X=0)\cdot\mathbb{P}(Y=0)$$

oder

$$\mathbb{P}(X=-1,Y=0) = 0 \neq \frac{1}{6} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \mathbb{P}(X=-1)\cdot\mathbb{P}(Y=0)$$

gilt. $\boxed{\textbf{1P}}$

Aufgabe 3 (3+2+2=7 Punkte)
Lösungsvorschlag:

(a) Ausmultiplizieren ergibt

$$g_X(t) = \frac{1}{4} + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{7}{12}t^4, \quad t \in [-1, 1].$$

Also ist

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 2) = 0, \quad \mathbb{P}(X = 3) = \frac{1}{6}, \quad \mathbb{P}(X = 4) = \frac{7}{12}$$

und $\mathbb{P}(X = k) = 0$ für $k \geq 5$. $\boxed{\textbf{3P}}$

(b) Es gilt nach Vorlesung

$$\mathbb{E}(X) = g'_X(1-) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{7}{3}t^3|_{t=1} = \frac{1}{2} + \frac{7}{3} = \frac{17}{6}. \boxed{\textbf{1P}}$$

Ferner ist

$$g''_X(1-) = t + 7t^2|_{t=1} = 1 + 7 = 8.$$

Es folgt

$$\mathbb{V}(X) = g''_X(1-) + g'_X(1-) - (g'_X(1-))^2 = 8 + \frac{17}{6} - \left(\frac{17}{6}\right)^2 = \frac{101}{36}. \boxed{\textbf{1P}}$$

Alternativ kann man $\mathbb{E}(X)$ und $\mathbb{E}(X^2)$ direkt über die Zähldichte bestimmen. Man erhält dabei $\mathbb{E}(X^2) = \frac{65}{6}$.

(c) Nach Vorlesung gilt unter den gegebenen Voraussetzungen

$$g_{S_N}(t) = g_N(g_{X_1}(t)), \quad t \in [-1, 1].$$

Nun folgt wiederum nach Vorlesung, mit der Kettenregel und wegen $g_{X_1}(1-) = 1$

$$\mathbb{E}(S_N) = g'_{S_N}(1-) = g'_N(g_{X_1}(1-)) \cdot g'_{X_1}(1-) = \mathbb{E}(N) \cdot \mathbb{E}(X_1). \boxed{\textbf{2P}}$$

Aufgabe 4 (2+2+(1+2)=7 Punkte)
Lösungsvorschlag:

(a) Die Verteilungsfunktion einer Exp(λ)-verteilten Zufallsvariablen ist durch

$$F(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}, \ t \geq 0,$$

gegeben. Für $t < 0$ gilt $F(t) = 0$. Damit können wir die Verteilungsfunktion des Minimums von X und Y bestimmen.

Für $t < 0$ gilt $\mathbb{P}(X \leq t) = 0 = \mathbb{P}(Y \leq t)$ und daher

$$0 \leq \mathbb{P}(\min\{X, Y\} \leq t) = \mathbb{P}(X \leq t \text{ oder } Y \leq t) \leq \mathbb{P}(X \leq t) + \mathbb{P}(Y \leq t) = 0 + 0 = 0.$$

Sei also $t \geq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\min\{X, Y\} \leq t) &= 1 - \mathbb{P}(\min\{X, Y\} > t) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X > t, Y > t) \\ &\overset{\text{unabh.}}{=} 1 - \mathbb{P}(X > t)\mathbb{P}(Y > t)\end{aligned}$$

$$= 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{e}^{-\mu t}$$
$$= 1 - \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t}.$$

Dies ist die Verteilungsfunktion einer $\mathrm{Exp}(\lambda + \mu)$-verteilten Zufallsvariable. Da die Verteilungsfunktion die Verteilung eindeutig festlegt, folgt $\min\{X, Y\} \sim \mathrm{Exp}(\lambda + \mu)$. $\boxed{\textbf{2P}}$

(b) In der Vorlesung wurde die Chi-Quadrat-Verteilung mit 2 Freiheitsgraden als Summe der Quadrate zweier unabhängiger, standardnormalverteilter Zufallsvariablen eingeführt. Die Lebesgue-Dichte einer χ_2^2-verteilten Zufallsvariablen ist wegen $\Gamma(1) = 1$ durch

$$f_2(t) = \frac{1}{2\Gamma(1)}e^{-\frac{t}{2}}t^0 = \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}} \text{ für } t > 0 \text{ und } f_2(t) = 0 \text{ für } t \leq 0$$

gegeben. Dies ist gerade die Lebesgue-Dichte einer $\mathrm{Exp}(\lambda)$-Verteilung. Daraus folgt die Behauptung. $\boxed{\textbf{2P}}$

(c) Seien λ und Z wie in der Aufgabenstellung gegeben.

(i) Die Verteilungsfunktion F_Z von Z ist erklärt durch

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} f(t)\mathrm{d}t, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Für $t < 1$ ist $f(t) = 0$ und daher $F_Z(z) = 0$. $\boxed{\textbf{0.5P}}$ Für $z \geq 1$ folgt

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} f(t)\mathrm{d}t = \lambda \int_{1}^{z} t^{-(\lambda+1)}\mathrm{d}t = \left[-t^{-\lambda}\right]_1^z = 1 - z^{-\lambda}. \ \boxed{\textbf{0.5P}}$$

(ii) Für $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{P}(\ln(Z) \leq t) = \mathbb{P}(Z \leq \mathrm{e}^t) = F_Z(\mathrm{e}^t) = \begin{cases} 0, & \text{für } t < 0, \\ 1 - (\mathrm{e}^t)^{-\lambda} = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}, & \text{für } t \geq 0. \end{cases}$$

Hierbei wurde (c) verwendet sowie $\mathrm{e}^t < 1$ für $t < 0$ und $\mathrm{e}^t \geq 1$ für $t \geq 0$. Daraus folgt die Behauptung. $\boxed{\textbf{2P}}$

Aufgabe 5 (2+2+1+3=8 Punkte)
Lösungsvorschlag:

(a) Da eine Wahrscheinlichkeitsdichte nichtnegativ sein muss, muss $c \geq 0$ gelten. $\boxed{\textbf{0.5P}}$ Zudem muss die Lebesgue-Dichte integrierbar und im folgenden Sinne normiert sein

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1. \ \boxed{\textbf{0.5P}}$$

Wir berechnen also das obige Integral und erhalten

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = c \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\sigma|x|}\mathrm{d}x = c\left(\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{\sigma x}\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\sigma x}\mathrm{d}x\right)$$
$$= c \cdot 2 \cdot \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\sigma x}\mathrm{d}x = 2c\left[-\frac{1}{\sigma}\mathrm{e}^{-\sigma x}\right]_0^{\infty} = \frac{2c}{\sigma} \overset{!}{=} 1.$$

Somit muss $c = \frac{\sigma}{2}$ gelten. $\boxed{\textbf{1P}}$ (Beachte, dass c dann insbesondere nichtnegativ ist.)

(b) Wir berechnen die Verteilungsfunktion F von Z_σ gemäß Vorlesung mittels

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\mathrm{d}y.$$

Zunächst sei $x \leq 0$. Dann gilt

$$F(x) = \frac{\sigma}{2}\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{\sigma y}\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{\sigma y}\right]_{-\infty}^{x} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\sigma x}.$$

Nun sei $x > 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{\sigma}{2}\left(\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{\sigma y}\mathrm{d}y + \int_{0}^{x} \mathrm{e}^{-\sigma y}\mathrm{d}y\right) = \frac{1}{2}\left(\left[\mathrm{e}^{\sigma y}\right]_{-\infty}^{0} + \left[-\mathrm{e}^{-\sigma y}\right]_{0}^{x}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\sigma x}. \end{aligned}$$

Insgesamt ist also

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\sigma x}, & x \leq 0, \\ 1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\sigma x}, & x > 0. \end{cases} \quad \boxed{\mathbf{2P}}$$

(c) Offensichtlich existiert der Erwartungswert. Zudem ist ersichtlich, dass die Lebesgue-Dichte symmetrisch um 0 ist. Daher gilt $\mathbb{E}[Z_\sigma] = 0$. $\boxed{\mathbf{1P}}$

(d) Es folgen zwei verschiedene Lösungswege zur Bestimmung der Dichte von $Z = X - Y$.
1. Lösungsmöglichkeit: Sei $Z = X - Y$ für unabhängige Zufallsvariablen X und Y, die beide eine Exponentialverteilung mit dem Parameter $\lambda > 0$ haben. Laut Vorlesung hat X die Lebesgue-Dichte

$$f_X(x) = \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathbf{1}_{[0,\infty)}(x).$$

Zudem gilt für $y \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(-Y \leq y) = \mathbb{P}(Y \geq -y) = \begin{cases} \mathrm{e}^{\lambda y}, & y \leq 0, \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Somit ist die Lebesgue-Dichte von $-Y$ gegeben durch

$$f_{-Y}(y) = \lambda\mathrm{e}^{\lambda y}\mathbf{1}_{(-\infty,0]}(y). \quad \boxed{\mathbf{1P}}$$

Nun können wir die Lebesgue-Dichte von Z mit Hilfe der Faltungsformel für unabhängige Zufallsvariablen bestimmen (mit dem Blockungslemma sind auch X und $-Y$ unabhängig $\boxed{\mathbf{0.5P}}$). Es gilt für $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f_Z(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f_X(s)}_{=0,\ \text{falls } s<0} \cdot \underbrace{f_{-Y}(t-s)}_{\substack{=0,\ \text{falls } t-s>0 \\ \Leftrightarrow\ s<t}} \mathrm{d}s \\ &= \int_{\max\{0,t\}}^{\infty} \lambda\mathrm{e}^{-\lambda s}\lambda\mathrm{e}^{\lambda(t-s)}\mathrm{d}s \\ &= \lambda\mathrm{e}^{\lambda t}\int_{\max\{0,t\}}^{\infty} \lambda\mathrm{e}^{-2\lambda s}\mathrm{d}s \\ &= \lambda\mathrm{e}^{\lambda t}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\lambda s}\right]_{\max\{0,t\}}^{\infty} \\ &= \frac{\lambda}{2}\mathrm{e}^{\lambda t - 2\lambda\max\{0,t\}} \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \frac{\lambda}{2}\mathrm{e}^{\lambda t}, & t \le 0, \\ \frac{\lambda}{2}\mathrm{e}^{-\lambda t}, & t > 0, \end{cases}$$
$$= \frac{\lambda}{2}\mathrm{e}^{-\lambda|t|}. \ \boxed{\mathbf{1.5P}}$$

2. Lösungsmöglichkeit: Sei $Z = X - Y$ für unabhängige Zufallsvariablen X und Y, die beide eine Exponentialverteilung mit dem Parameter $\lambda > 0$ haben. Laut Vorlesung hat X dann die Lebesgue-Dichte

$$f_X(x) = \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathbf{1}_{[0,\infty)}(x),$$

analog für Y. Wir berechnen die Verteilungsfunktion von Z mittels Integration bzgl. der gemeinsamen Verteilung von X und Y und bestimmen anschließend die Lebesgue-Dichte durch Differenzieren. Sei dazu $z \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto x - y$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z \le z) &= \mathbb{P}(Z \in (-\infty, z]) = \mathbb{P}((X,Y) \in f^{-1}((-\infty,z])) \\
&= \int_{f^{-1}((-\infty,z])} \mathbb{P}^{X,Y}(\mathrm{d}(x,y)) \\
&\overset{(*)}{=} \int\int \mathbf{1}_{f^{-1}((-\infty,z])}(x,y) f_X(x) f_Y(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int\int \mathbf{1}\{x - y \le z\}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathbf{1}\{x \ge 0\}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda y}\mathbf{1}\{y \ge 0\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \lambda\int_0^\infty \int_0^{\max(0,z+y)} \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{-\lambda y}\mathrm{d}y \\
&= \lambda\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda y}\left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{\max(0,z+y)}\mathrm{d}y \\
&= \lambda\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda y}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda(z+y)}\right)\mathbf{1}\{z + y \ge 0\}\mathrm{d}y \\
&= \int_{\max(0,-z)}^\infty \left(\lambda\mathrm{e}^{-\lambda y} - \lambda\mathrm{e}^{-2\lambda y - \lambda z}\right)\mathrm{d}y \\
&= \left[-\mathrm{e}^{-\lambda y} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\lambda y - \lambda z}\right]_{\max(0,-z)}^\infty \\
&= \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\lambda z}, & z \ge 0, \\ \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\lambda z}, & z < 0, \end{cases}
\end{aligned}$$

Dabei wurden in $(*)$ die Unabhängigkeit von X und Y und der Satz von Fubini verwendet. Die Lebesgue-Dichte von Z erhalten wir durch Differenzieren der Verteilungsfunktion und daher

$$f_Z(z) = \left.\begin{cases} \frac{\lambda}{2}\mathrm{e}^{-\lambda z}, & z \ge 0, \\ \frac{\lambda}{2}\mathrm{e}^{\lambda z}, & z < 0, \end{cases}\right\} = \frac{\lambda}{2}\mathrm{e}^{-\lambda|z|}.$$

Aufgabe 6 (2+1.5+(2+3.5)=9 Punkte)

Lösungsvorschlag:

(a) Wegen $|X_1| \leq 1 + X_1^2$ folgt aus der Monotonie und Linearität des Erwartungswerts

$$\mathbb{E}(|X_1|) \leq 1 + \mathbb{E}(X_1^2) < \infty. \boxed{\textbf{1P}}$$

Wegen

$$\mathbb{V}(X_1) = \mathbb{E}(X_1^2) - (\mathbb{E}(X_1))^2 < \infty$$

folgt die Endlichkeit der Varianz. $\boxed{\textbf{0.5P}}$ Wäre

$$0 = \mathbb{V}(X_1) = \mathbb{E}\left[(X_1 - \mathbb{E}(X_1))^2\right],$$

so müsste $\mathbb{P}$-fast sicher gelten $X_1 - \mathbb{E}(X_1) = 0$, was der Voraussetzung $\mathbb{E}\left(|X_1 - \mathbb{E}[X_1]|\right) > 0$ widerspricht. $\boxed{\textbf{0.5P}}$

(b) 1. Lösungsmöglichkeit: Mit Hilfe der Tschebyscheff-Ungleichung erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X_1 - \mu < \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma\right) &\geq \mathbb{P}\left(|X_1 - \mu| < \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(|X_1 - \mu| \geq \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma\right) \\ &\geq 1 - \frac{\mathbb{V}(X_1)}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma\right)^2} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}. \boxed{\textbf{1.5P}}\end{aligned}$$

2. Lösungsmöglichkeit: Mit Hilfe von Aufgabe 1 von Übungsblatt 5 erhält man eine bessere Schranke wie folgt:

$$\mathbb{P}\left(X_1 - \mu < \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma\right) = 1 - \mathbb{P}\left(X_1 \geq \mu + \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma\right) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \frac{4}{3}\sigma^2} = \frac{\frac{4}{3}\sigma^2}{\frac{7}{3}\sigma^2} = \frac{4}{7} > \frac{1}{4}. \boxed{\textbf{1.5P}}$$

(c) (i) Zunächst ist die Varianz von X_1 gegeben durch

$$\mathbb{V}(X_1) = \mathbb{E}[X_1^2] - \mathbb{E}[X_1]^2 = \frac{13}{12}. \boxed{\textbf{0.5P}}$$

Damit gilt aufgrund der Voraussetzungen (Unabhängigkeit und Verteilungsgleichheit $\boxed{\textbf{0.5P}}$)

$$\mathbb{E}(S_n) = \frac{3}{2} \cdot n, \quad \mathbb{V}(S_n) = \frac{13}{12} \cdot n. \boxed{\textbf{1P}}$$

(ii) Mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes von Lindeberg-Lévy $\boxed{\textbf{1P}}$ und der Standardisierung S_n^* von S_n folgt dann

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(S_n \leq a\,n + \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(S_n^* \leq \sqrt{\frac{12}{13}}\left(a - \frac{3}{2}\right)\sqrt{n} + \sqrt{\frac{12}{13}}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \boxed{\textbf{1P}}\end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \Phi(-\infty) = 0, & \text{falls } a < \frac{3}{2}, \\ \Phi\left(\sqrt{\frac{12}{13}}\right), & \text{falls } a = \frac{3}{2}, \quad \boxed{\mathbf{1.5P}} \\ \Phi(\infty) = 1, & \text{falls } a > \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Im letzten Schritt wurde folgende Überlegung verwendet. Sei $t_n \to t \in \overline{\mathbb{R}}$ für $n \to \infty$. Dann gilt mit der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} |\mathbb{P}(S_n^* \le t_n) - \Phi(t)| &= |\mathbb{P}(S_n^* \le t_n) - \Phi(t_n) + \Phi(t_n) - \Phi(t)| \\ &\le \sup_{s \in \mathbb{R}} |\mathbb{P}(S_n^* \le s) - \Phi(s)| + |\Phi(t_n) - \Phi(t)|. \end{aligned}$$

Für $n \to \infty$ konvergiert der erste Summand gegen Null wegen des ZGWS, der zweite Summand konvergiert für $n \to \infty$ gegen Null wegen $t_n \to t$ und der Stetigkeit von Φ (auch in $\overline{\mathbb{R}}$).