# Hug

# Einführung in die Stochastik - Nachklausur

Dauer: 120 min. Lösung: offiziell Bestanden mit: 20 P.

Bemerkungen: Hilfsmittel: ein beidseitig handbeschriebenes DIN A4-Blatt

**Aufgabe 1 (1+1+1+1.5+1.5=6 Punkte)**

In einer Fabrik werden Spielsteine hergestellt, auf die jeweils einer der Buchstaben A-Z aufgedruckt ist. Die Maschine zur Herstellung dieser Spielsteine produziert in jedem Arbeitsschritt jeweils einen vollständigen Satz Spielsteine, also 26 Spielsteine so, dass jeder Buchstabe genau einmal vorhanden ist. Anschließend werden die Spielsteine zufällig (unabhängig voneinander und gleichverteilt) auf 26 Fächer, die mit den Buchstaben A-Z markiert sind, verteilt. Dabei kann es insbesondere passieren, dass mehrere Spielsteine im selben Fach landen.

(a) Modellieren Sie die Situation durch ein geeignetes Zufallsexperiment.

(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Spielstein mit dem Buchstaben $A$ in das mit $A$ markierte Fach fällt.

(c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass keiner der Vokale (Spielsteine $A, E, I, O, U$) in mit Konsonanten markierte Fächer fällt.

(d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau 24 Fächer leer bleiben.

(e) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau ein Fach leer bleibt.

**Aufgabe 2 (1+1+2+2+2 = 8 Punkte)**

Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ seien stochastisch unabhängig und je gleichverteilt auf der Menge $\{1, 2, 3\}$. Ferner sei

$$S_i := \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}\{X_k = i\} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

(a) Geben Sie die gemeinsame Verteilung von $S_1, S_2, S_3$ an.

(b) Welche Verteilung hat $S_1$ bzw. $S_1 + S_2$?

(c) Zeigen Sie: $\mathbb{C}(S_1, X_1) = -\frac{1}{3}$.

(d) Zeigen Sie: $\varrho(S_1, X_1) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{n}}$.

(e) Zeigen Sie: $\mathbb{P}(S_1 = i \mid S_1 + S_2 = k) = \binom{k}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^k \quad (i = 0, 1, \ldots, k;\ k = 1, 2, \ldots, n)$.

**Aufgabe 3 (0.5+2+2.5+3=8 Punkte)**

Martin und Claudia treffen sich an einem sonnigen Frühlingstag, um eine Runde Basketball zu spielen. Dabei werfen sie so lange abwechselnd auf den Korb, bis einer der beiden trifft und damit gewonnen hat. Anschließend endet das Spiel. Die Trefferwahrscheinlichkeit pro Wurf sei $p_C \in (0,1)$ für Claudia und $p_M \in (0,1)$ für Martin. Da Martin ein echter Gentleman ist, darf Claudia beginnen.

Die Zufallsvariable $X$ bezeichne die Gesamtanzahl an Würfen bis zum Ende des Spiels.

Sie können davon ausgehen, dass die Würfe unabhängig voneinander stattfinden.

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Claudia im insgesamt dritten Wurf gewinnt.

(b) Bestimmen Sie die Verteilung von $X$, d.h. $\mathbb{P}(X = n)$ für $n \in \mathbb{N}$.
**Hinweis:** Unterscheiden Sie, ob $n$ gerade oder ungerade ist.

(c) Bestimmen Sie die Siegeswahrscheinlichkeiten $P_C$ für Claudia und $P_M$ für Martin. Für welche $p_C$, $p_M \in (0,1)$ haben die beiden dieselbe Siegeswahrscheinlichkeit?

(d) Claudia schlägt Martin vor, dass eine faire Münze entscheiden soll, wer von ihnen beginnen darf. Bei Kopf beginnt Claudia, bei Zahl beginnt Martin. Welche Siegeswahrscheinlichkeiten ergeben sich nun für Claudia und Martin?

**Aufgabe 4 (2+1.5+1+1.5+(1.5+1.5)=9 Punkte)**

Aus einer Urne mit 3 roten und 3 schwarzen Kugeln wird rein zufällig eine Kugel entnommen und ihre Farbe notiert (1. Ziehung). Dann werden die gezogene Kugel und eine weitere Kugel derselben Farbe in die Urne zurückgelegt. Nach gutem Mischen wird erneut eine Kugel aus der Urne gezogen und wiederum ihre Farbe notiert (2. Ziehung). Wir interessieren uns für die Gesamtzahl $X_1$ roter Kugeln, die in **beiden** Ziehungen (zusammen) gezogen wurden.

(a) Modellieren Sie die Situation durch ein geeignetes, 2-stufiges Zufallsexperiment.

(b) Bestimmen Sie die Verteilung von $X_1$.

(c) Bestimmen Sie die (bedingte) Wahrscheinlichkeit, dass in der ersten Ziehung eine schwarze Kugel gezogen wurde, unter der Bedingung $\{X_1 = 1\}$.

(d) Zeigen Sie: $\mathbb{E}(X_1) = 1$ und $\mathbb{V}(X_1) = \frac{4}{7}$.

(e) Das gesamte Experiment (zweimaliges Ziehen wie oben) wird nun $n$–mal in unabhängiger Folge durchgeführt. Die Zufallsvariable $X_j$ bezeichne die Anzahl der beim $j$–ten Mal gezogenen roten Kugeln ($j = 1, \ldots, n$). Ferner sei $S_n := \sum_{j=1}^{n} X_j$ die Gesamtzahl aller gezogenen roten Kugeln.

(i) Bestimmen Sie $\mathbb{E}(S_n)$ und $\mathbb{V}(S_n)$.

(ii) Bestimmen Sie $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n \leq n)$.

**Aufgabe 5 (2.5+3+2+2.5=10 Punkte)**

Die Zufallsvariablen $X$ und $Y$ seien unabhängig und identisch verteilt mit der Lebesgue-Dichte

$$f(t) := \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot (2-t), & \text{falls } 0 < t < 2, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von $X$.

(b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von $X$ sowie $\mathbb{P}(X \leq 1, Y \leq 1)$.

(c) Berechnen Sie $\mathbb{E}[e^X]$ sowie $\mathbb{E}[e^{X+Y}]$.

**Hinweis:** Eine Stammfunktion von $g(t) := t \cdot e^t$ ist $G(t) = (t-1)e^t$.

(d) Berechnen Sie $\mathbb{P}(X + Y \leq 1)$.

**Aufgabe 6 (1+3+2+2+1=9 Punkte)**

Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$, $n \geq 2$, seien stochastisch unabhängig und identisch verteilt mit der Verteilungsfunktion

$$F_\vartheta(t) := 1 - \left(1 + e^t\right)^{-\vartheta}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dabei ist $\vartheta > 0$ ein unbekannter Parameter.

(a) Bestimmen Sie die Lebesgue-Dichte zu $F_\vartheta$.

(b) Zeigen Sie, dass der Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\vartheta}_n(X_1, \ldots, X_n)$ für $\vartheta$ durch

$$\hat{\vartheta}_n(X_1, \ldots, X_n) := \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \ln\left(1 + e^{X_j}\right)}$$

gegeben ist.

(c) Setzen Sie $Y_j := \ln\left(1 + e^{X_j}\right)$, $1 \leq j \leq n$. Zeigen Sie $Y_j \sim \mathrm{Exp}(\vartheta)$.

(d) Ist $\hat{\vartheta}_n$ erwartungstreu für $\vartheta$?

(e) Ist $\hat{\vartheta}_n$ asymptotisch erwartungstreu für $\vartheta$?

**Hinweis:** Die Dichte der $\Gamma(\alpha, \beta)$-Verteilung ist für $\alpha, \beta > 0$ gegeben durch

$$f(x) \;=\; \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}\, \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Aufgabe 1 (1+1+1+1.5+1.5=6 Punkte)**

**Lösungsvorschlag:**

(a) Wir modellieren die Situation als Laplace-Experiment:
Als Grundraum wählen wir die Permutationen aus $\{A, B, \ldots, Z\}$ mit Wiederholung, d.h. $\Omega = \{A, B, \ldots, Z\}^{26}$ mit $|\Omega| = 26^{26}$. (Für $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_{26})$ stehe $\omega_1 = C$ z.B. dafür, dass der Spielstein „A" in Fach „C" fällt.) Das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ bezeichne dann die Gleichverteilung auf $\Omega$, d.h.

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{26^{26}}$$

für alle $\omega \in \Omega$. $\boxed{\textbf{1P}}$

(b) Es bezeichne $A_1 \subset \Omega$ das Ereignis, dass Spielstein „A" in Fach „A" fällt. Da für die Buchstaben B-Z jeweils 26 Fächer zur Verfügung stehen, gilt $|A| = 1 \cdot 26^{25}$ und daher gilt

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{|A_1|}{|\Omega|} = \frac{1}{26}. \boxed{\textbf{1P}}$$

(c) Es bezeichne $A_2 \subset \Omega$ das Ereignis, dass keiner der Spielsteine „A", „E", „I", „O", „U" in eines der Fächer für Konsonanten fällt. Somit gibt es für jeden Vokal 5 mögliche Fächer, für die anderen 21 Buchstaben (Konsonanten) gibt es jeweils 26 Möglichkeiten. Also gilt $|A_2| = 5^5 \cdot 26^{21}$ und daher

$$\mathbb{P}(A_2) = \frac{|A_2|}{\Omega} = \frac{5^5}{26^5}. \boxed{\textbf{1P}}$$

(d) Es bezeichne $A_3 \subset \Omega$ das Ereignis, dass genau 24 Fächer leer bleiben. Diese Bedingung ist äquivalent dazu, dass alle 26 Buchstaben auf genau 2 Fächer verteilt werden. Wir erhalten

- $\binom{26}{2}$ Möglichkeiten, die beiden Fächer zu wählen, die belegt werden,
- $2^{26}$ Möglichkeiten, die Buchstaben auf die beiden Fächer zu verteilen,
- 2 Möglichkeiten, die Buchstaben auf die beiden Fächer zu verteilen, sodass eines der beiden Fächer leer bleibt (alle Buchstaben in das erste bzw. zweite gewählte Fach),

und daher gilt $|A_3| = \binom{26}{2} \cdot (2^{26} - 2)$, woraus die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}(A_3) = \frac{\binom{26}{2} \cdot (2^{26} - 2)}{26^{26}} = \frac{25(2^{25} - 1)}{26^{25}}$$

folgt. $\boxed{\textbf{1.5P}}$

(e) Es bezeichne $A_4 \subset \Omega$ das Ereignis, dass genau ein Fach leer bleibt. Um sicherzustellen, dass genau ein Fach leer bleibt, wählen wir zunächst das Fach aus, das leer bleiben soll. Anschließend wählen wir zwei Spielsteine aus, die gemeinsam in einem Fach platziert werden sollen und wählen danach das Fach aus, in dem diese beiden Steine positioniert werden sollen. Zuletzt verteilen wir die verbleibenden 24 Buchstaben auf die verbleibenden 24 Fächer, sodass in jedem dieser 24 Fächer genau ein Spielstein landet. Daher gilt

$$|A_4| = 26 \cdot \binom{26}{2} \cdot 25 \cdot 24!$$

und wir erhalten die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}(A_4) = \frac{26 \cdot \binom{26}{2} \cdot 25 \cdot 24!}{26^{26}} = \binom{26}{2} \frac{25!}{26^{25}} = \frac{25 \cdot 25!}{2 \cdot 26^{24}}. \boxed{\textbf{1.5P}}$$

**Aufgabe 2 (1+1+2+2+2 = 8 Punkte)**
**Lösungsvorschlag:**

(a) $S_i$ bezeichnet die Anzahl der Treffer $i$-ter Art, wobei ein Treffer $i$-ter Art mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ erzielt wird. Dies entspricht gerade der Definition eines multinomialverteilten Zufallsvektors und es gilt

$$(S_1, S_2, S_3) \sim \text{Mult}\left(n; \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right). \;\boxed{\mathbf{1P}}$$

(b) Mit Satz 13.2 der Vorlesung gelten (bzw. ist dies auch direkt ersichtlich) $S_1 \sim \text{Bin}\left(n, \frac{1}{3}\right)$ $\boxed{\mathbf{0.5P}}$ und $S_1 + S_2 \sim \text{Bin}\left(n, \frac{2}{3}\right)$. $\boxed{\mathbf{0.5P}}$

(c) Aufgrund der Unabhängigkeit von $X_1, \ldots, X_n$ gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{C}(S_1, X_1) &= \mathbb{C}\left(\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}\{X_k = 1\}, X_1\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{C}(\mathbf{1}\{X_k = 1\}, X_1) \\ &= \mathbb{C}(\mathbf{1}\{X_1 = 1\}, X_1) + \sum_{k=2}^{n} \underbrace{\mathbb{C}(\mathbf{1}\{X_k = 1\}, X_1)}_{=0} \\ &= \mathbb{E}[\mathbf{1}\{X_1 = 1\} X_1] - \mathbb{E}[\mathbf{1}\{X_1 = 1\}] \cdot \mathbb{E}[X_1]. \;\boxed{\mathbf{1P}} \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbf{1}\{X_1 = 1\} X_1] &= 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}, \\ \mathbb{E}[\mathbf{1}\{X_1 = 1\}] &= \mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{3}, \\ \mathbb{E}[X_1] &= 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} = 2 \end{aligned}$$

folgt

$$\mathbb{C}(S_1, X_1) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot 2 = -\frac{1}{3}. \;\boxed{\mathbf{1P}}$$

(d) Es ist $\mathbb{V}(S_1) = n \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2n}{9}$ $\boxed{\mathbf{0.5P}}$ und

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[X_1^2\right] &= 1 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{3} + 9 \cdot \frac{1}{3} = \frac{14}{3}, \\ \mathbb{V}(X_1) &= \mathbb{E}\left[X_1^2\right] - (\mathbb{E}X_1)^2 = \frac{14}{3} - 4 = \frac{2}{3}, \boxed{\mathbf{1P}} \end{aligned}$$

also

$$\varrho(S_1, X_1) = \frac{\mathbb{C}(S_1, X_1)}{\sqrt{\mathbb{V}(S_1)\mathbb{V}(X_1)}} = \frac{-\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{2n}{9} \cdot \frac{2}{3}}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{n}}. \;\boxed{\mathbf{0.5P}}$$

(e) Aus $S_1 + S_2 \sim \text{Bin}\left(n, \frac{2}{3}\right)$ und der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit folgt für $i = 0, 1, \ldots, k$ und $k = 1, 2, \ldots, n$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_1 = i \mid S_1 + S_2 = k) &= \frac{\mathbb{P}(S_1 = i, S_1 + S_2 = k)}{\mathbb{P}(S_1 + S_2 = k)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(S_1 = i, S_2 = k - i, S_3 = n - k)}{\mathbb{P}(S_1 + S_2 = k)} \\
&= \frac{\frac{n!}{i!(k-i)!(n-k)!} \left(\frac{1}{3}\right)^i \left(\frac{1}{3}\right)^{k-i} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}}{\binom{n}{k} \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}} \\
&= \frac{n!\,k!\,(n-k)!}{i!\,(k-i)!\,(n-k)!\,n!} \cdot \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{2^k \left(\frac{1}{3}\right)^n} \\
&= \binom{k}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^k. \quad \boxed{\textbf{2P}}
\end{aligned}
$$

**Aufgabe 3 (0.5+2+2.5+3=8 Punkte)**
**Lösungsvorschlag:**

(a) Da Claudia beginnt, gewinnt sie im dritten Wurf genau dann, wenn die Würfe wie folgt ablaufen:

1. Claudia trifft nicht $\rightarrow$ Wahrscheinlichkeit $1 - p_C$,
2. Martin trifft nicht $\rightarrow$ Wahrscheinlichkeit $1 - p_M$,
3. Claudia trifft $\rightarrow$ Wahrscheinlichkeit $p_C$.

Da die Würfe nach Voraussetzung unabhängig sind, gilt

$$\mathbb{P}(\text{„Claudia gewinnt im dritten Wurf“}) = \mathbb{P}(X = 3) = (1 - p_C)(1 - p_M)p_C. \quad \boxed{\textbf{0.5P}}$$

(b) Claudia gewinnt, falls $X$ eine ungerade Zahl ist; Martin gewinnt, falls $X$ eine gerade Zahl ist. Dabei gelten

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = 2k + 1) &= (1 - p_C)^k (1 - p_M)^k p_C, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad \boxed{\textbf{1P}} \\
\mathbb{P}(X = 2k) &= (1 - p_C)^k (1 - p_M)^{k-1} p_M, \quad k = 1, 2, \ldots. \quad \boxed{\textbf{1P}}
\end{aligned}
$$

(c) Es seien $P_C$ die Wahrscheinlichkeit, dass Claudia gewinnt, und $P_M$ die Wahrscheinlichkeit, dass Martin gewinnt. Dann gelten

$$
\begin{aligned}
P_C &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} \{X = 2k + 1\}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = 2k + 1) \\
&= p_C \sum_{k=0}^{\infty} (1 - p_C)^k (1 - p_M)^k = \frac{p_C}{1 - (1 - p_C)(1 - p_M)}, \quad \boxed{\textbf{1P}} \\
P_M &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \{X = 2k\}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = 2k) \\
&= (1 - p_C)p_M \sum_{k=1}^{\infty} (1 - p_C)^{k-1} (1 - p_M)^{k-1} = \frac{(1 - p_C)p_M}{1 - (1 - p_C)(1 - p_M)}. \quad \boxed{\textbf{1P}}
\end{aligned}
$$

Es gilt $P_C = P_M$ genau dann, wenn $p_M = \frac{p_C}{1 - p_C}$ ist. $\boxed{\textbf{0.5P}}$

**Anmerkungen:**

- Damit die obige Bedingung erfüllt ist, muss wegen $p_M < 1$ notwendigerweise $p_C < \frac{1}{2}$ gelten.
- Wenn $p_C \to \frac{1}{2}$, dann muss $p_M \to 1$ gelten, wenn die Gewinnwahrscheinlichkeiten gleich groß sein sollen.
- Wegen $P_C + P_M = 1$ endet das Spiel fast sicher in endlicher Zeit.

(d) Das Ergebnis des Münzwurfs kann als unabhängig vom Spielverlauf angenommen werden. $\boxed{\textbf{0.5P}}$ Falls die Münze Kopf zeigt, was mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ eintritt, und damit Claudia beginnt, so gewinnt Claudia mit Wahrscheinlichkeit $P_C$. Falls die Münze Zahl zeigt, was ebenfalls mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ eintritt, so gewinnt Claudia mit Wahrscheinlichkeit $P_C^*$, wobei

$$P_C^* = \frac{(1-p_M)p_C}{1-(1-p_C)(1-p_M)}. \quad \boxed{\textbf{0.5P}}$$

Man erhält dies, ohne dass die Rechnung erneut durchgeführt werden muss, aus der für Martin berechneten Gewinnwahrscheinlichkeit nach Vertauschen von $p_C$ und $p_M$. $\boxed{\textbf{0.5P}}$ Insgesamt folgt somit als Gewinnwahrscheinlichkeit von Claudia

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{\text{Kopf}\}) \cdot P_C + \mathbb{P}(\{\text{Zahl}\}) \cdot P_C^* &= \frac{1}{2}\frac{p_C}{1-(1-p_C)(1-p_M)} + \frac{1}{2}\frac{(1-p_M)p_C}{1-(1-p_C)(1-p_M)} \\ &= \frac{p_C\left(1-\frac{p_M}{2}\right)}{p_C+p_M-p_Cp_M} < P_C. \quad \boxed{\textbf{1P}}\end{aligned}$$

Die Gewinnwahrscheinlichkeit für Martin ist analog

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{\text{Kopf}\}) \cdot P_M + \mathbb{P}(\{\text{Zahl}\}) \cdot P_M^* &= \frac{1}{2}\frac{(1-p_C)p_M}{1-(1-p_C)(1-p_M)} + \frac{1}{2}\frac{p_M}{1-(1-p_C)(1-p_M)} \\ &= \frac{p_M\left(1-\frac{p_C}{2}\right)}{p_C+p_M-p_Cp_M} > P_M. \quad \boxed{\textbf{0.5P}}\end{aligned}$$

**Aufgabe 4 (2+1.5+1+1.5+(1.5+1.5)=9 Punkte)**

**Lösungsvorschlag:**

(a) Eine korrekte Modellierung ergibt $\boxed{\textbf{2P}}$ . Das kann zum Beispiel so aussehen:

Mit den Ereignissen

$$\begin{aligned}A_r &:= \{\text{„Im ersten Zug rot“}\} = \{r\} \times \{r,s\}\ , \\ A_s &:= \{\text{„Im ersten Zug schwarz“}\} = \{s\} \times \{r,s\}\ , \\ B_r &:= \{\text{„Im zweiten Zug rot“}\} = \{r,s\} \times \{r\}\ , \\ B_s &:= \{\text{„Im zweiten Zug schwarz“}\} = \{r,s\} \times \{s\}\end{aligned}$$

gilt nach Voraussetzung

$\mathbb{P}(A_r) = P(A_s) = \frac{1}{2}$ und

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_r|A_r) &= \tfrac{4}{7}\ , \quad \mathbb{P}(B_r|A_s) = \tfrac{3}{7}\ , \\ \mathbb{P}(B_s|A_r) &= \tfrac{3}{7}\ , \quad \mathbb{P}(B_s|A_s) = \tfrac{4}{7}\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{array}{rclclcl} \mathbb{P}(A_r \cap B_r) &=& \mathbb{P}(B_r|A_r) \cdot \mathbb{P}(A_r) &=& \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} &=& \frac{4}{14}\,, \\ \mathbb{P}(A_r \cap B_s) &=& \mathbb{P}(B_s|A_r) \cdot \mathbb{P}(A_r) &=& \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{2} &=& \frac{3}{14}\,, \\ \mathbb{P}(A_s \cap B_r) &=& \mathbb{P}(B_r|A_s) \cdot \mathbb{P}(A_s) &=& \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{2} &=& \frac{3}{14}\,, \\ \mathbb{P}(A_s \cap B_s) &=& \mathbb{P}(B_s|A_s) \cdot \mathbb{P}(A_s) &=& \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} &=& \frac{4}{14}\,. \end{array}$$

(b) Offenbar ist $X_1 \in \{0,1,2\}$. Es ist

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(X_1 = 0) &=& \mathbb{P}(A_s \cap B_s) \;=\; \frac{2}{7}\,, \;\boxed{\textbf{0.5P}} \\ \mathbb{P}(X_1 = 1) &=& \mathbb{P}(A_r \cap B_s) + \mathbb{P}(A_s \cap B_r) \;=\; \frac{3}{7}\,, \;\boxed{\textbf{0.5P}} \\ \mathbb{P}(X_1 = 2) &=& \mathbb{P}(A_r \cap B_r) \;=\; \frac{2}{7}\,. \;\boxed{\textbf{0.5P}} \end{array}$$

(c) Es ist

$$\mathbb{P}(A_s \,|X_1 = 1) \;=\; \frac{\mathbb{P}(A_s \cap \{X_1 = 1\})}{\mathbb{P}(X_1 = 1)} \;=\; \frac{\mathbb{P}(A_s \cap B_r)}{\mathbb{P}(X_1 = 1)} \;=\; \frac{\frac{3}{14}}{\frac{6}{14}} \;=\; \frac{1}{2}\,. \;\boxed{\textbf{1P}}$$

(d) Es ist

$$\begin{array}{rclcl} \mathbb{E}\,X_1 &=& 0 \cdot \frac{2}{7} + 1 \cdot \frac{3}{7} + 2 \cdot \frac{2}{7} &=& 1\,, \;\boxed{\textbf{0.5P}} \\ \mathbb{E}\,X_1^2 &=& 0 \cdot \frac{2}{7} + 1 \cdot \frac{3}{7} + 4 \cdot \frac{2}{7} &=& \frac{11}{7}\,, \;\boxed{\textbf{0.5P}} \\ \mathbb{V}(X_1) &=& \mathbb{E}\,X_1^2 - (\mathbb{E}\,X_1)^2 &=& \frac{11}{7} - 1 \;=\; \frac{4}{7}\,. \;\boxed{\textbf{0.5P}} \end{array}$$

(e) (i) Es ist

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}S_n &=& n \cdot \mathbb{E}X_1 \;=\; n\,, \;\boxed{\textbf{0.5P}} \\ \mathbb{V}(S_n) &=& \sum_{j=1}^{n} \mathbb{V}(X_j) \;=\; n \cdot \frac{4}{7} \;\boxed{\textbf{0.5P}} \qquad (\text{Unabhängigkeit! } \boxed{\textbf{0.5P}}\,). \end{array}$$

(ii) Wir verwenden den ZGWS von Lindeberg–Lévy: $\boxed{\textbf{0.5P}}$

$$\mathbb{P}(S_n \le n) \;=\; \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{\frac{4}{7}\,n}} \;\le\; 0\right) \;\longrightarrow\; \Phi(0) \;=\; \frac{1}{2} \qquad (n \to \infty)\,. \;\boxed{\textbf{1P}}$$

**Aufgabe 5 (2.5+3+2+2.5=10 Punkte)**

**Lösungsvorschlag:**

(a) Es gilt

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^2 t \cdot f(t)\,dt = \tfrac{1}{2} \cdot \int_0^2 t \cdot (2-t)\,dt = \tfrac{2}{3}. \;\boxed{\textbf{1P}}$$

Weiter gilt

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_0^2 t^2 \cdot f(t)\, dt = \tfrac{1}{2} \cdot \int_0^2 t^2 \cdot (2-t)\, dt = \tfrac{2}{3} \quad \boxed{\mathbf{1P}}$$

und folglich

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \tfrac{2}{9}. \quad \boxed{\mathbf{0.5P}}$$

(b) Es bezeichne $F$ die Verteilungsfunktion von $X$. Für $x < 0$ ist $F(x) = 0$. $\boxed{\mathbf{0.5P}}$ Für $x \in [0, 2]$ gilt

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{2}(2-t)\, dt = \frac{1}{2}\left[2t - \frac{1}{2}t^2\right]_0^x = x - \frac{1}{4}x^2. \boxed{\mathbf{1P}}$$

Ferner gilt $F(x) = 1$ für $x \geq 2$. $\boxed{\mathbf{0.5P}}$ Wegen der Unabhängigkeit erhält man dann

$$\mathbb{P}(X \leq 1, Y \leq 1) = \mathbb{P}(X \leq 1)\mathbb{P}(Y \leq 1) = F(1)^2 = \frac{9}{16}. \boxed{\mathbf{1P}}$$

(c) Es gilt

$$\mathbb{E}[e^X] = \tfrac{1}{2} \cdot \int_0^2 e^t \cdot (2-t)\, dt = \tfrac{1}{2} \cdot [3 \cdot e^t - t \cdot e^t]_0^2 = \tfrac{1}{2} \cdot (e^2 - 3). \quad \boxed{\mathbf{1P}}$$

Ferner ist wegen Unabhängigkeit

$$\mathbb{E}[e^{X+Y}] = \mathbb{E}[e^X \cdot e^Y] = \mathbb{E}[e^X] \cdot \mathbb{E}[e^Y] = (\mathbb{E}[e^X])^2 = \frac{1}{4}(e^2-3)^2. \boxed{\mathbf{1P}}$$

(d) Man erhält aufgrund der Unabhängigkeit die Lebesgue-Dichte der gemeinsamen Verteilung von $(X, Y)$ als das Produkt der Lebesgue-Dichten. Hieraus folgt mit Hilfe des Satzes von Fubini

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X + Y \leq 1) &= \frac{1}{4}\int_0^2 \int_0^2 \mathbf{1}\{x \leq 1 - y\}(2-x)\, dx\, (2-y)\, dy \\
&= \frac{1}{4}\int_0^1 \left[2x - \frac{1}{2}x^2\right]_0^{1-y} (2-y)\, dy \\
&= \frac{1}{4}\int_0^1 \left(\frac{3}{2} - y - \frac{1}{2}y^2\right)(2-y)\, dy \\
&= \frac{1}{4}\int_0^1 \left(3 - \frac{7}{2}y + \frac{1}{2}y^3\right)\, dy \\
&= \frac{1}{4}\left[3y - \frac{7}{4}y^2 + \frac{1}{8}y^4\right]_0^1 = \frac{11}{32}. \boxed{\mathbf{2.5P}}
\end{aligned}$$

**Alternative Lösung:** Mittels Faltungsformel kann man auch erst die Lebesgue-Dichte von $X+Y$ bestimmen. Da diese für die Lösung der Aufgabe nur in $(-\infty, 1]$ benötigt wird, genügt die folgende Rechnung. Zunächst ist $f_{X+Y}(t) = 0$ für $t \leq 0$. Für $t \in (0, 1]$ gilt

$$
\begin{aligned}
f_{X+Y}(t) &= \int_0^2 \frac{1}{2}(2-s)\frac{1}{2}(2-(t-s))\,\mathbf{1}\{0<t-s<2\}\,ds \\
&= \frac{1}{4}\int_0^t (2-s)(2-t+s)\,ds \\
&= \frac{1}{4}\int_0^t -s^2+st-2t+4\,ds \\
&= t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{24}.
\end{aligned}
$$

Hiermit erhält man

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X+Y\le 1) &= \int_0^1 f_{X+Y}(t)\,dt = \int_0^1 t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{24}\,dt \\
&= \frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{4\cdot 24} = \frac{11}{32}.
\end{aligned}
$$

**Ergänzung:** Allgemein erhält man

$$
f_{X+Y}(t) = \begin{cases} t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{24}, & 0<t<2, \\ \frac{(4-t)^3}{24}, & 2\le t<4, \\ 0, & t\notin(0,4). \end{cases}
$$

**Aufgabe 6 (1+3+2+2+1=9 Punkte)**

**Lösungsvorschlag:**

(a) Differenzieren von $F_\vartheta$ liefert

$$
f_\vartheta(t) = \vartheta(1+e^t)^{-\vartheta-1}e^t \;>\; 0,\ t\in\mathbb{R}.\boxed{\mathbf{1P}}
$$

(b) Mit der Lebesgue-Dichte aus Teil (a) ist die Likelihoodfunktion gegeben durch

$$
L_\vartheta(x) = \prod_{j=1}^n f_\vartheta(x_j) = \prod_{j=1}^n \vartheta(1+e^{x_j})^{-\vartheta-1}e^{x_j} = \vartheta^n\prod_{j=1}^n(1+e^{x_j})^{-\vartheta-1}e^{x_j}.\boxed{\mathbf{1P}}
$$

Die Log-Likelihood-Funktion ist dann

$$
\begin{aligned}
\ln L_\vartheta(x) &= n\ln\vartheta + \sum_{j=1}^n \ln\left[(1+e^{x_j})^{-\vartheta-1}\right] + \sum_{j=1}^n \ln e^{x_j} \\
&= n\ln\vartheta - (\vartheta+1)\sum_{j=1}^n \ln(1+e^{x_j}) + \sum_{j=1}^n x_j.\boxed{\mathbf{0.5P}}
\end{aligned}
$$

Differenzieren nach $\vartheta$ (zur Bestimmung der Maximalstelle) liefert

$$
\frac{\partial}{\partial\vartheta}\ln L_\vartheta(x) = \frac{n}{\vartheta} - \sum_{j=1}^n \ln(1+e^{x_j}) \overset{!}{=} 0,\boxed{\mathbf{0.5P}}
$$

also

$$
\hat{\vartheta}_n = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \ln(1+e^{x_j})}.\boxed{\mathbf{0.5P}}
$$

Wegen $\frac{\partial^2}{\partial^2\vartheta}\ln L_\vartheta(x) = -\frac{n}{\vartheta^2} < 0$ ist $\hat{\vartheta}_n$ der ML-Schätzer für $\vartheta$. $\boxed{\mathbf{0.5P}}$

(c) Für $t \leq 0$ gilt $\mathbb{P}(Y_1 \leq t) = 0$ $\boxed{\mathbf{0.5P}}$. Weiter ist für $t > 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_1 \leq t) &= \mathbb{P}(\ln(1+e^{X_1}) \leq t) \\
&= \mathbb{P}(1+e^{X_1} \leq e^t) \\
&= \mathbb{P}(X_1 \leq \ln(e^t - 1)) \\
&= F_\vartheta(\ln(e^t-1)) \\
&= 1 - \left(1 + e^{\ln(e^t-1)}\right)^{-\vartheta} \\
&= 1 - e^{-\vartheta t}, \boxed{\mathbf{1.5P}}
\end{aligned}$$

also ist $Y_1 \sim \mathrm{Exp}(\vartheta)$.

(d) Mit (c) und nach Vorlesung ist $Z := \sum_{j=1}^n \ln(1+e^{X_j}) \sim \Gamma(\vartheta, n)$ und für $n \geq 2$ folgt daher

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\vartheta(\hat{\vartheta}_n) &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \ln(1+e^{X_j})}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\frac{n}{Z}\right) \\
&= n \int_0^\infty \frac{1}{z} \frac{\vartheta^n}{\Gamma(n)} z^{n-1} e^{-\vartheta z} \, \mathrm{dz} \\
&= \frac{n}{n-1} \vartheta \int_0^\infty \frac{\vartheta^{n-1}}{\Gamma(n-1)} z^{n-2} e^{-\vartheta z} \, \mathrm{dz} \\
&= \frac{n}{n-1}\vartheta. \boxed{\mathbf{1.5P}}
\end{aligned}$$

Also ist $\hat{\vartheta}_n$ kein erwartungstreuer Schätzer. $\boxed{\mathbf{0.5P}}$

**Alternative Lösungsmöglichkeit:** Laut Vorlesung gilt für eine gammaverteilte Zufallsvariable $V \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ und $p > -\alpha$

$$\mathbb{E}[V^p] = \frac{\Gamma(\alpha + p)}{\Gamma(\alpha)\beta^p}.$$

Da $Z := \sum_{j=1}^n \ln(1+e^{X_j}) \sim \Gamma(\vartheta, n)$, folgt mit $\Gamma(n) = (n-1)!$

$$\mathbb{E}[Z^{-1}] = \frac{\Gamma(n-1)}{\Gamma(n)\vartheta^{-1}} = \frac{\vartheta}{n-1}$$

und daher

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\vartheta(\hat{\vartheta}_n) &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \ln(1+e^{X_j})}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\frac{n}{Z}\right) = \vartheta \cdot \frac{n}{n-1}. \boxed{\mathbf{1.5P}}
\end{aligned}$$

Also ist $\hat{\vartheta}_n$ kein erwartungstreuer Schätzer. $\boxed{\mathbf{0.5P}}$

(e) Wegen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n-1}\vartheta = \vartheta$$

ist $\hat{\vartheta}_n$ ein asymptotisch erwartungstreuer Schätzer. $\boxed{\mathbf{1P}}$