

Hug

Einführung in die Stochastik

Dauer: 120 min. Lösung: offiziell Bestanden mit: 20 P.  
Bemerkungen: beidseitig handbeschriebenes DinA4 Blatt

**Aufgabe 1 (1+1+1+1+1+1+2 = 8 Punkte)**

- a) Eine Studentenbar hat 6 Getränke zur Auswahl. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 4 dieser Getränke (die unter Umständen auch mehrfach vorkommen dürfen) auszuwählen? Dabei soll nur berücksichtigt werden, wie oft jedes Getränk ausgewählt wurde, aber nicht in welcher Reihenfolge die Getränke konsumiert wurden.
- b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, 4 dieser Getränke auszuwählen, wenn jedes dieser Getränke höchstens einmal vorkommen darf?
- c) Zum Ende der Klausurenphase bietet die Bar 6 verschiedene Cocktails („Long Integral Ice Tea“, „Cuba Lipschitz“, „Zentraler Grenzwertsaft“, „Math on the Beach“ und zwei weitere) an. Nun bestellen 4 (zu unterscheidende) Personen jeweils einen dieser Cocktails. Wie viele mögliche Bestellungen gibt es?
- d) Wie viele mögliche Bestellungen gibt es in c), wenn jede der 4 Personen einen anderen Cocktail trinken soll?
- e) Wie viele mögliche Bestellungen gibt es in c), wenn der Cocktail „Math on the Beach“ mindestens einmal bestellt wird?
- f) Wie viele mögliche Bestellungen gibt es in c), wenn sowohl der Cocktail „Math on the Beach“ als auch der Cocktail „Long Integral Ice Tea“ je mindestens einmal bestellt werden?
- g) Der Barkeeper hat sich bei der Bestellung alle Getränke aufgeschrieben, weiß aber nicht mehr, welcher Cocktail von welcher Person bestellt wurde. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit (unter einer jeweiligen Laplace-Annahme), dass er ohne Nachfrage jeder Person den von ihr bestellten Cocktail serviert, wenn
  - i) alle Personen unterschiedliche Cocktails bestellt haben?
  - ii) 2 Personen das gleiche und die beiden anderen Personen verschiedene Cocktails bestellt haben?

## Aufgabe 2 (2+2+3+2 = 9 Punkte)

In einer Stadt sind  $\frac{1}{3}$  der Tage eines Jahres verregnet. Die Zuverlässigkeit der Wettervorhersage hängt von der jeweiligen Wetterlage ab. An den Tagen, an denen es regnet, stimmt die Vorhersage für diesen Tag in  $\frac{2}{3}$  aller Fälle, an den anderen Tagen in  $\frac{3}{4}$  aller Fälle.

Sie können annehmen, dass die Wettervorhersagen verschiedener Tage stochastisch unabhängig sind. Sie können zudem annehmen, dass die Ereignisse, dass es an unterschiedlichen Tagen regnet, ebenfalls unabhängig sind.

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird an einem (rein zufälligen) Tag des Jahres Regen vorhergesagt?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es wirklich regnet, wenn Regen vorhergesagt ist?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Wettervorhersage an 3 Tagen in Folge korrekt?
- Geben Sie explizit einen 4-elementigen Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathbb{P})$  und Ereignisse  $R, V \subset \Omega$  an, sodass

$$\mathbb{P}(R) = \frac{1}{3}, \mathbb{P}(V|R) = \frac{2}{3}, \mathbb{P}(V^c|R^c) = \frac{3}{4}.$$

## Aufgabe 3 (6+2+1 = 9 Punkte)

Seien  $X, Y$  stochastisch unabhängige Zufallsvariablen auf einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathbb{P})$  mit

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 1) &= a = 1 - \mathbb{P}(X = -1) \\ \mathbb{P}(Y = 1) &= b = 1 - \mathbb{P}(Y = -1),\end{aligned}$$

wobei  $a, b \in (0, 1)$ . Ferner sei  $Z := X \cdot Y$ .

- Für welche  $a, b \in (0, 1)$  sind  $X, Y, Z$  paarweise stochastisch unabhängig?
- Prüfen Sie, ob  $X, Y, Z$  insgesamt stochastisch unabhängig sind.
- Zeigen Sie: Sind  $A, B, C \subset \Omega$  stochastisch unabhängige Ereignisse, so sind auch  $A^c \cup C, B$  stochastisch unabhängig.

## Aufgabe 4 (3+3 = 6 Punkte)

Es seien  $X_1, \dots, X_n$  unabhängige  $U([0, 1])$ -verteilte Zufallsvariablen.

- Seien  $Y_n = \min(X_1, \dots, X_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , und  $Z$  eine Zufallsvariable mit  $\mathbb{P}(Z = 0) = 1$ . Es seien  $F_{Y_n}$  die Verteilungsfunktionen von  $Y_n$  und  $F_Z$  die Verteilungsfunktion von  $Z$ . Zeigen Sie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{Y_n}(t) = F_Z(t) \text{ für alle } t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

- Es seien  $V_n = n \cdot \min(X_1, \dots, X_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , und  $W \sim \text{Exp}(1)$  mit zugehörigen Verteilungsfunktionen  $F_{V_n}$  und  $F_W$ . Zeigen Sie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{V_n}(t) = F_W(t) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}.$$

**Hinweis:** Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

### Aufgabe 5 (2+4+3 = 9 Punkte)

Sei  $\lambda > 0$ . Seien  $X_1, X_2, \dots$  Zufallsvariablen mit  $X_i \sim \text{Po}(\lambda)$  für  $i \in \mathbb{N}$ . Seien außerdem  $n \in \mathbb{N}$  und  $p \in (0, 1)$  sowie  $N \sim \text{Bin}(n, p)$ . Die Zufallsvariablen  $N, X_1, X_2, \dots$  seien stochastisch unabhängig.

- Bestimmen Sie die erzeugende Funktion von  $S_N := \sum_{i=1}^N X_i$ , wobei  $S_0 := 0$ .
- Ermitteln Sie den Erwartungswert und die Varianz von  $S_N$ .
- Sei  $a \in \mathbb{R}$ . Zeigen Sie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n\lambda} \sum_{k=0}^{\lfloor (\lambda + a\sqrt{\lambda})n \rfloor} \frac{(n\lambda)^k}{k!} = \begin{cases} 1, & a > 0, \\ \frac{1}{2}, & a = 0, \\ 0, & a < 0. \end{cases}$$

### Aufgabe 6 (2+2+3+2 = 9 Punkte)

Es sei

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} c(x+y)^{-2-a}, & \text{für } x \geq 1, y > 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

für Konstanten  $a, c > 0$ .

- Bestimmen Sie **alle** Paare  $(a, c)$ , sodass  $f_{X,Y}$  eine Dichtefunktion ist.
- Bestimmen Sie die Randdichte  $f_Y$  von  $Y$ .

**Für alle folgenden Teilaufgaben sei  $a = 4$ ,  $c = 20$  und der Zufallsvektor  $(X, Y)$  besitze die Dichtefunktion  $f_{X,Y}$ . Die Randdichte von  $X$  ist dann durch**

$$f_X(x) = 4x^{-5} \cdot \mathbf{1}_{\{x \geq 1\}}$$

gegeben, was Sie ohne Nachweis verwenden können.

- Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von  $X$ .
- Es sei  $Z = \ln X$ . Bestimmen Sie die Verteilung von  $Z$ . Geben Sie Name und Parameter dieser Verteilung an.

**Aufgabe 1 (1+1+1+1+1+1+2 = 8 Punkte)****Lösungsvorschlag:**

a)  $|Kom_4^6(mW)| = \binom{n+k-1}{k} = \binom{6+4-1}{4} = \binom{9}{4} = 126$  1P

b)  $|Kom_4^6(oW)| = \binom{n}{k} = \binom{6}{4} = 15$  1P

c)  $|Per_4^6(mW)| = 6^4 = 1296$  1P

d)  $|Per_4^6(oW)| = 6^4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$  1P

e)  $6^4 - 5^4 = 671$  1P

f)  $6^4 - (2 \cdot 5^4 - 4^4) = 302$  1P

g) i)  $\frac{1}{4} \frac{1}{3} \frac{1}{2} \frac{1}{1} = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$  1P

ii)  $\frac{1}{\binom{4}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{12}$  oder  $\frac{1}{4} \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{12}$  oder  $\frac{1}{\binom{3}{2}} \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{12}$  oder  $\left(\frac{4!}{2!}\right)^{-1} = \frac{1}{12}$  1P

**Aufgabe 2 (2+2+3+2 = 9 Punkte)****Lösungsvorschlag:**

Sei  $R$  das Ereignis, dass es regnet und  $V$  das Ereignis, dass Regen vorhergesagt wird. Es ist gegeben, dass

$$\mathbb{P}(R) = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(V|R) = \frac{2}{3}, \quad \mathbb{P}(V^c|R^c) = \frac{3}{4}.$$

a) Mit der Formel der totalen Wahrscheinlichkeit gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V) &= \mathbb{P}(V|R) \cdot \mathbb{P}(R) + \mathbb{P}(V|R^c) \cdot \mathbb{P}(R^c) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \left(1 - \frac{3}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{7}{18} \approx 0.3889. \end{aligned}$$
 2P

b) Mit der Formel von Bayes und a) gilt

$$\mathbb{P}(R|V) = \frac{\mathbb{P}(R \cap V)}{\mathbb{P}(V)} = \frac{\mathbb{P}(V|R) \cdot \mathbb{P}(R)}{\mathbb{P}(V)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{7}{18}} = \frac{4}{7} \approx 0.5714. \quad \text{2P}$$

c) Wir bestimmen zunächst die Wahrscheinlichkeit, dass die Wettervorhersage für einen Tag korrekt ist. Dafür sei  $K$  das Ereignis, dass die Vorhersage für einen bestimmten Tag richtig ist. Dieses tritt ein, falls es regnet und Regen vorhergesagt wurde oder falls es nicht regnet und kein Regen vorhergesagt wurde. Daher gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(K) &= \mathbb{P}(R \cap V) + \mathbb{P}(R^c \cap V^c) = \mathbb{P}(V|R) \cdot \mathbb{P}(R) + \mathbb{P}(V^c|R^c) \cdot \mathbb{P}(R^c) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{13}{18} \approx 0.722. \end{aligned}$$
 2P

Sei nun  $K_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , das Ereignis, dass die Wettervorhersage an Tag  $j$  korrekt ist. Nach Konstruktion sind die Ereignisse unabhängig und besitzen jeweils dieselbe Wahrscheinlichkeit, d.h.  $\mathbb{P}(K_j) = \mathbb{P}(K)$  für  $j = 1, 2, 3$ . Daraus folgt

$$\mathbb{P}(K_1 \cap K_2 \cap K_3) = \prod_{j=1}^3 \mathbb{P}(K_j) = \mathbb{P}(K)^3 = \left(\frac{13}{18}\right)^3 \approx 0.377. \quad \text{1P}$$

d) Der  $W$ -Raum könnte z.B. so aussehen: Sei  $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$  mit

$$\mathbb{P}(\{1\}) = \frac{1}{9}, \mathbb{P}(\{2\}) = \frac{2}{9}, \mathbb{P}(\{3\}) = \frac{1}{6}, \mathbb{P}(\{4\}) = \frac{1}{2}.$$

Definiere dann die Ereignisse

$$R = \{1, 2\}, V = \{2, 3\}.$$

Dann gelten

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(R) &= \mathbb{P}(\{1, 2\}) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{1}{3}, \checkmark \\ \mathbb{P}(V|R) &= \frac{\mathbb{P}(V \cap R)}{\mathbb{P}(R)} = \frac{\mathbb{P}(\{2\})}{\mathbb{P}(\{1, 2\})} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}, \checkmark \\ \mathbb{P}(V^c|R^c) &= \frac{\mathbb{P}(V^c \cap R^c)}{\mathbb{P}(R^c)} = \frac{\mathbb{P}(\{4\})}{\mathbb{P}(\{3, 4\})} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}. \checkmark \quad \boxed{2P} \end{aligned}$$

### Aufgabe 3 (6+2+1 = 9 Punkte)

#### Lösungsvorschlag:

a) 5P für Herleitung von  $a = b = \frac{1}{2}$ , 1P für Unabhängigkeit.

Es gilt zunächst  $\mathbb{P}(X = 1) = a, \mathbb{P}(Y = 1) = b,$

$$\mathbb{P}(X = 1, Z = 1) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1) = ab \quad \boxed{1P} \quad (1)$$

und

$$\mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(XY = 1) = \mathbb{P}(X = Y = 1) + \mathbb{P}(X = Y = -1) = ab + (1-a)(1-b). \quad \boxed{1.5P} \quad (2)$$

Sind  $X, Z$  stochastisch unabhängig, so muss also gelten

$$\begin{aligned} ab = a[ab + (1-a)(1-b)] &\stackrel{a \neq 0}{\iff} b = ab + (1-a)(1-b) \iff (1-a)b = (1-a)(1-b) \\ &\stackrel{a \neq 1}{\iff} b = 1-b \iff b = \frac{1}{2}. \quad \boxed{1P} \end{aligned}$$

Analog folgt aus der stochastischen Unabhängigkeit von  $Y$  und  $Z$ , dass

$$\begin{aligned} ab = b[ab + (1-a)(1-b)] &\stackrel{b \neq 0}{\iff} a = ab + (1-a)(1-b) \iff (1-b)a = (1-a)(1-b) \\ &\stackrel{b \neq 1}{\iff} a = 1-a \iff a = \frac{1}{2}. \quad \boxed{1P} \end{aligned}$$

Also ist  $a = b = \frac{1}{2}$  eine notwendige Bedingung für die Unabhängigkeit von  $X$  und  $Y$ . **0.5P**

Es bleibt zu zeigen, dass  $X, Y, Z$  dann tatsächlich paarweise unabhängig sind. Für  $a = \frac{1}{2} = b$  folgt mit Hilfe von (2), dass

$$\mathbb{P}(Z = 1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(Z = -1)$$

und daher erhalten wir exemplarisch für  $X$  wegen (1), dass

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 1, Z = 1) &= \frac{1}{4} = \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Z = 1), \\ \mathbb{P}(X = 1, Z = -1) &= \mathbb{P}(X = 1, Y = -1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Z = -1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = -1, Z = 1) &= \mathbb{P}(X = -1, Y = -1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(X = -1)\mathbb{P}(Z = -1), \\ \mathbb{P}(X = -1, Z = -1) &= \mathbb{P}(X = -1, Y = 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(X = -1)\mathbb{P}(Z = -1).\end{aligned}$$

Also sind  $X$  und  $Z$  unabhängig. Die Argumentation für die Unabhängigkeit von  $Y$  und  $Z$  erfolgt vollkommen analog. **1P**

**Alternativer Lösungsweg:** Es gilt zunächst  $\mathbb{P}(X = 1) = a$ ,  $\mathbb{P}(Y = 1) = b$ ,

$$\mathbb{P}(X = 1, Z = 1) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1) = ab \quad \mathbf{1P}$$

und

$$\mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(XY = 1) = \mathbb{P}(X = Y = 1) + \mathbb{P}(X = Y = -1) = ab + (1 - a)(1 - b). \quad \mathbf{1P}$$

Sind  $X, Z$  stochastisch unabhängig, so muss also gelten

$$ab = a[ab + (1 - a)(1 - b)] \Leftrightarrow 2ab + 1 = a + 2b. \quad \mathbf{1P}$$

Sind  $Y, Z$  stochastisch unabhängig, so muss entsprechend gelten

$$ab = b[ab + (1 - a)(1 - b)] \Leftrightarrow 2ab + 1 = b + 2a. \quad \mathbf{0.5P}$$

Sind also  $X, Y, Z$  paarweise stochastisch unabhängig, so muss  $a + 2b = b + 2a$  gelten, das heißt aber  $a = b$ . Setzt man dies in  $2ab + 1 = b + 2a$  ein, so ergibt sich die Bedingung  $2a^2 + 1 = 3a$ . Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen  $a = 1$  und  $a = \frac{1}{2}$ . Wegen  $a \in (0, 1)$  erhält man also  $a = b = \frac{1}{2}$ . **1.5P** Dass diese Bedingung auch hinreichend dafür ist, dass  $X, Y, Z$  paarweise stochastisch unabhängig sind, folgt aus obigen Bedingungen sowie wegen  $\{X = -1\} = \{X = 1\}^c$  etc. mit Hilfe von Satz 10.2. **1P**

b) Die Zufallsvariablen  $X, Y, Z$  sind nicht stochastisch unabhängig, da sonst  $a = b = \frac{1}{2}$  gelten müsste **0.5P**, andererseits aber ist

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 1, Y = 1, Z = 1) &= \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{4} \\ &\neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1)\mathbb{P}(Z = 1). \quad \mathbf{1.5P}\end{aligned}$$

**Alternativ:**

$$\mathbb{P}(X = 1, Y = -1, Z = 1) = 0, \text{ aber } \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = -1)\mathbb{P}(Z = 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \neq 0.$$

c) Dies folgt direkt aus Satz 10.3, da

$$A^c \cup C = [A^c \cap C] + [A^c \cap C^c] + [A \cap C]$$

eine mengentheoretische Funktion von  $A$  und  $C$  ist. **1P**

**Alternativ:** Man kann das Blockungslemma für Zufallsvariablen verwenden, die stochastische Unabhängigkeit von  $\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B, \mathbf{1}_C$  sowie  $\mathbf{1}_{A^c \cup C} = 1 - \mathbf{1}_A \cdot (1 - \mathbf{1}_C)$ .

**Aufgabe 4 (3+3 = 6 Punkte)****Lösungsvorschlag:**

a) Die Verteilungsfunktion von  $Z$  ist gegeben durch

$$F_Z(t) = \mathbb{P}(Z \leq t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} F_{Y_n}(t) &= \mathbb{P}(Y_n \leq t) = \mathbb{P}(\min(X_1, \dots, X_n) \leq t) = 1 - \mathbb{P}(\min(X_1, \dots, X_n) > t) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X_1 > t)^n = 1 - (1 - \mathbb{P}(X_1 \leq t))^n \\ &= \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 1 - (1 - t)^n, & 0 < t < 1, \\ 1, & t \geq 1 \end{cases} \quad \boxed{2\text{P}} \end{aligned}$$

und somit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{Y_n}(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 1, & 0 < t < 1, \\ 1, & t \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases} \quad \boxed{1\text{P}}$$

Das war zu zeigen.

b) Die Verteilungsfunktion von  $W$  ist gegeben durch

$$F_W(t) = \mathbb{P}(W \leq t) = \begin{cases} 1 - e^{-t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Wegen  $V_n = n \cdot Y_n$  gilt

$$\begin{aligned} F_{V_n}(t) &= \mathbb{P}(V_n \leq t) = \mathbb{P}(n \cdot Y_n \leq t) = 1 - \mathbb{P}\left(Y_n > \frac{t}{n}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(X_1 > \frac{t}{n}\right)^n \\ &= \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n, & 0 < t < n, \\ 1, & t \geq n \end{cases} \quad \boxed{2\text{P}} \end{aligned}$$

und somit

$$\mathbb{P}(V_n \leq t) \rightarrow \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1 - e^{-t}, & t \geq 0. \end{cases} \quad \boxed{1\text{P}}$$

Das war zu zeigen.

**Aufgabe 5 (2+4+3 = 9 Punkte)****Lösungsvorschlag:**

a) Für die erzeugenden Funktionen  $g$  von  $X_i$  und  $\varphi$  von  $N$  gilt

$$g(t) = e^{\lambda(t-1)}, \quad |t| \leq 1 \quad \text{und} \quad \varphi(s) = (1 - p + ps)^n, \quad |s| \leq 1. \quad \boxed{1\text{P}}$$

Mit Hilfe von Satz 16.8 der Vorlesung erhält man somit

$$g_{S_N}(t) = \varphi \circ g(t) = (1 - p + pe^{\lambda(t-1)})^n, \quad |t| \leq 1. \quad \boxed{1\text{P}}$$

b) Setze  $q := 1 - p$ . Dann folgt für  $|t| \leq 1$  aus (a) und mit Hilfe der Kettenregel

$$g'_{S_N}(t) = np\lambda e^{\lambda(t-1)} (q + pe^{\lambda(t-1)})^{n-1}, \quad \boxed{1P}$$

$$g''_{S_N}(t) = np\lambda^2 e^{\lambda(t-1)} \cdot (q + pe^{\lambda(t-1)})^{n-2} [q + npe^{\lambda(t-1)}]; \quad \boxed{1P}$$

bei der Herleitung des Ausdrucks für die zweite Ableitung sind die Fälle  $n = 1$  und  $n \geq 2$  zu unterscheiden. Aus Satz 16.6 der Vorlesung folgt nun

$$\mathbb{E}[S_N] = g'_{S_N}(1-) = g'_{S_N}(1) = np\lambda, \quad \boxed{0.5 P}$$

$$\mathbb{E}[S_N(S_N - 1)] = g''_{S_N}(1-) = g''_{S_N}(1) = np\lambda^2(1 + (n - 1)p), \quad \boxed{1P}$$

insbesondere existieren die ersten beiden Momente von  $S_N$ , da  $g'_{S_N}$  und  $g''_{S_N}$  linksseitig stetig in 1 sind. Schließlich erhält man

$$\mathbb{V}(S_N) = np\lambda^2(1 + (n - 1)p) + np\lambda - (np\lambda)^2 = np\lambda(1 + q\lambda). \quad \boxed{0.5P}$$

c) Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n\lambda} \sum_{k=0}^{\lfloor (\lambda + a\sqrt{\lambda})n \rfloor} \frac{(n\lambda)^k}{k!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(S_n \leq (\lambda + a\sqrt{\lambda})n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n - \lambda n}{\sqrt{\lambda n}} \leq a\sqrt{n}\right)$$

$$= \begin{cases} \Phi(\infty), & a > 0, \\ \Phi(0), & a = 0, \\ \Phi(-\infty), & a < 0, \end{cases} = \begin{cases} 1, & a > 0, \\ \frac{1}{2}, & a = 0, \\ 0, & a < 0, \end{cases}$$

wobei der zentrale Grenzwertsatz,  $\mathbb{E}(S_n) = \lambda n = \text{Var}(S_n)$  und Aufgabe 1 (a) von Übungsblatt 6 verwendet wurden.  $\boxed{3P}$

**Alternativ** kann man in Teil (b) Erwartungswert und Varianz durch eine direkte Rechnung wie folgt erhalten. Aus der Vorlesung ist  $\mathbb{E}[X_i] = \lambda$  und  $\mathbb{E}[X_i^2] = \lambda + \lambda^2$  bekannt. Wegen

$$\mathbb{E}[S_k] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^k X_i\right] = \sum_{i=1}^k \mathbb{E}[X_i] = k\lambda$$

folgt man aufgrund der Linearität des Erwartungswerts und der vorausgesetzten stochastischen Unabhängigkeit mit dem Blockungslemma (für die zweite Gleichung)

$$\mathbb{E}[S_N] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^n \mathbf{1}\{N = k\} S_k^2\right] = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[\mathbf{1}\{N = k\}] \mathbb{E}(S_k) = \lambda \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(N = k) = \lambda \mathbb{E}(N) = \lambda np.$$

Analog kann man für die Bestimmung der Varianz vorgehen. Zunächst ist

$$\mathbb{E}[S_k^2] = \sum_{i=1}^k \mathbb{E}(X_i^2) + k(k-1)\mathbb{E}(X_1 X_2) = k(\lambda + \lambda^2) + k(k-1)\lambda^2 = k\lambda + k^2\lambda^2.$$

Damit erhält man aufgrund der Linearität des Erwartungswerts und der vorausgesetzten stochastischen Unabhängigkeit mit dem Blockungslemma (für die zweite Gleichung)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_N^2] &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[\mathbf{1}\{N=k\}S_k^2] = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(N=k)\mathbb{E}[S_k^2] \\ &= \lambda \sum_{k=1}^n k\mathbb{P}(N=k) + \lambda^2 \sum_{k=1}^n k^2\mathbb{P}(N=k) = \lambda\mathbb{E}[N] + \lambda\mathbb{E}[N^2] \\ &= \lambda np + \lambda^2 npq + \lambda^2 n^2 p^2\end{aligned}$$

und schließlich

$$\mathbb{V}(S_N^2) = \lambda np + \lambda^2 npq + \lambda^2 n^2 p^2 - (\lambda np)^2 = np\lambda(1 + q\lambda).$$

**Anmerkung.** Man kann in der Situation der Aufgabenstellung (bzw. allgemeiner) zeigen, dass

$$\mathbb{E}[S_N] = \mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{E}[X_1] \quad \text{und} \quad \mathbb{V}[S_N] = \mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{V}[X_1] + \mathbb{V}[N] \cdot (\mathbb{E}[X_1])^2.$$

Dann muss man nur noch die aus der Vorlesung bekannten Größen einsetzen. Man erhält diese Relationen ganz analog zu obiger Rechnung oder auch mittels erzeugender Funktionen.

**Aufgabe 6 (2+2+3+2 = 9 Punkte)**

**Lösungsvorschlag:**

a) Es muss gelten

$$\begin{aligned}1 &\stackrel{!}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy dx \\ &= \int_1^{\infty} \int_0^{\infty} c(x+y)^{-2-a} dy dx \\ &= c \int_1^{\infty} \frac{1}{-1-a} (x+y)^{-1-a} \Big|_{y=0}^{\infty} dx \\ &= \frac{c}{a+1} \int_1^{\infty} x^{-1-a} dx \\ &= \frac{c}{a+1} \cdot \frac{1}{-a} x^{-a} \Big|_{x=1}^{\infty} \\ &= \frac{c}{a(a+1)}.\end{aligned}$$

Folglich ist  $f_{X,Y}$  für alle  $a, c > 0$  mit  $c = a(a+1)$  eine Dichtefunktion. **2P**

b) Es gilt

$$\begin{aligned}f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dx = \mathbf{1}_{\{y>0\}} \int_1^{\infty} c(x+y)^{-2-a} dx \\ &= \mathbf{1}_{\{y>0\}} \cdot \frac{c}{-1-a} \cdot (x+y)^{-1-a} \Big|_{x=1}^{\infty} = \underbrace{\frac{c}{1+a}}_{=a} (y+1)^{-1-a} \cdot \mathbf{1}_{\{y>0\}}.\end{aligned}$$
**2P**

**Alternativ** kann man in Teil (b) Erwartungswert und Varianz durch eine direkte Rechnung wie folgt erhalten. Aus der Vorlesung ist  $\mathbb{E}[X_i] = \lambda$  und  $\mathbb{E}[X_i^2] = \lambda + \lambda^2$  bekannt. Wegen

$$\mathbb{E}[S_k] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^k X_i\right] = \sum_{i=1}^k \mathbb{E}[X_i] = k\lambda$$

folgt man aufgrund der Linearität des Erwartungswerts und der vorausgesetzten stochastischen Unabhängigkeit mit dem Blockungslemma (für die zweite Gleichung)

$$\mathbb{E}[S_N] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^n \mathbf{1}\{N = k\} S_k^2\right] = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[\mathbf{1}\{N = k\}] \mathbb{E}(S_k) = \lambda \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(N = k) = \lambda \mathbb{E}(N) = \lambda np.$$

Analog kann man für die Bestimmung der Varianz vorgehen. Zunächst ist

$$\mathbb{E}[S_k^2] = \sum_{i=1}^k \mathbb{E}(X_i^2) + k(k-1)\mathbb{E}(X_1 X_2) = k(\lambda + \lambda^2) + k(k-1)\lambda^2 = k\lambda + k^2\lambda^2.$$

Damit erhält man aufgrund der Linearität des Erwartungswerts und der vorausgesetzten stochastischen Unabhängigkeit mit dem Blockungslemma (für die zweite Gleichung)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_N^2] &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[\mathbf{1}\{N = k\} S_k^2] = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(N = k) \mathbb{E}[S_k^2] \\ &= \lambda \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(N = k) + \lambda^2 \sum_{k=1}^n k^2 \mathbb{P}(N = k) = \lambda \mathbb{E}[N] + \lambda \mathbb{E}[N^2] \\ &= \lambda np + \lambda^2 npq + \lambda^2 n^2 p^2 \end{aligned}$$

und schließlich

$$\mathbb{V}(S_N^2) = \lambda np + \lambda^2 npq + \lambda^2 n^2 p^2 - (\lambda np)^2 = np\lambda(1 + q\lambda).$$

**Anmerkung.** Man kann in der Situation der Aufgabenstellung (bzw. allgemeiner) zeigen, dass

$$\mathbb{E}[S_N] = \mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{E}[X_1] \quad \text{und} \quad \mathbb{V}[S_N] = \mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{V}[X_1] + \mathbb{V}[N] \cdot (\mathbb{E}[X_1])^2.$$

Dann muss man nur noch die aus der Vorlesung bekannten Größen einsetzen. Man erhält diese Relationen ganz analog zu obiger Rechnung oder auch mittels erzeugender Funktionen.