Hug

Einführung in die Stochastik

Dauer: 120 min. Lösung: offiziell Bestanden mit: 20 P.

Bemerkungen: beidseitig handbeschriebenes DinA4 Blatt

Aufgabe 1 (4+3=7 Punkte)

a) Sie haben 7 verschiedene Farben (rot, grün, blau und 4 weitere Farben), um 5 von 1 bis 5 nummerierte Felder einzufärben. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Felder einzufärben, wenn

  i) es keine Einschränkungen gibt,
  ii) jedes Feld eine andere Farbe haben soll,
  iii) benachbarte Felder unterschiedlich gefärbt sein sollen,
  iv) es genau zwei rote, zwei blaue und ein grünes Feld geben soll?

Hinweis: Die Ergebnisse müssen nicht explizit ausgerechnet werden. Geben Sie jeweils eine kurze Begründung für Ihren Lösungsansatz.

b) Zwei Spieler ziehen abwechselnd eine Kugel aus einer Urne, in der sich eine schwarze und vier weiße Kugeln befinden. Nach jeder Ziehung wird die Kugel wieder zurück gelegt. Der Spieler, der als erster die schwarze Kugel zieht, hat gewonnen.

Wie groß ist die Gewinn-Wahrscheinlichkeit für den beginnenden Spieler?

Aufgabe 2 (3+2+3=8 Punkte)

Martin und seine Freunde spielen zusammen ein Online-Spiel. Jede Wiederholung des Spiels, die die Gruppe entweder gewinnt oder verliert ("Unentschieden" gibt es nicht), dauert 5 Minuten. Sei $p \in (0,1)$ die Wahrscheinlichkeit, dass die Gruppe das Spiel gewinnt. Sie können annehmen, dass die Spiele unabhängig voneinander und stets unter denselben Bedingungen stattfinden.

a) Die Gruppe legt zunächst fest, dass sie n Runden spielen. Mit X sei die Anzahl der gewonnenen Spiele bezeichnet.

   i) Welche Verteilung besitzt X?

   ii) Wie groß muss die Gewinnwahrscheinlichkeit p sein, damit die Gruppe mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 50% alle n Spiele gewinnt?

b) Martin erhält einen Anruf von seiner Schwester Claudia, die mit ihm eine Pizza essen gehen möchte. Martin willigt ein und verspricht ihr, dass er geht, sobald die Gruppe das nächste Spiel gewonnen hat.

   i) Es sei Y die Zufallsvariable, die die Anzahl der Runden vor dem nächsten Gewinn beschreibt. Welche Verteilung besitzt Y?

   ii) Wie hoch ist die erwartete Anzahl an Runden, bis Martin den Computer ausschaltet und sich auf den Weg zu Claudia macht?

c) Wir nehmen nun an, dass es nach den angesetzten 5 Minuten in jeder Runde eine Nachspielzeit gibt. Die Länge der Nachspielzeit (in Minuten) in Runde j, gegeben durch die Zufallsvariable Z_j, $j \in \mathbb{N}$, sei für alle j unabhängig von der Anzahl der Runden Y und besitze jeweils eine Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda > 0$.

   i) Stellen Sie die Zufallsvariable T, die die Zeit beschreibt, bis Martin den Computer ausschaltet, mit Hilfe der Zufallsvariablen Y und Z_j, $j \in \mathbb{N}$, dar.

   ii) Wie lange dauert es im Mittel bis Martin den Computer ausschaltet?

   Hinweis: Sie dürfen (ohne Nachweis) die folgende Aussage verwenden.

   Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ seien

   - $X_1, X_2, \ldots$ identisch verteilte Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}|X_1| < \infty$,
   - N eine $\mathbb{N}_0$-wertige Zufallsvariable mit $\mathbb{E}[N] < \infty$,
   - N und X_j stochastisch unabhängig für jedes $j \in \mathbb{N}$.

   Dann gilt (die Waldsche Gleichung)

$$\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{N} X_j\right] = \mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{E}[X_1].$$

Aufgabe 3 (1+2+1+2+1+1=8 Punkte)

Es sei (X, Y) ein Zufallsvektor mit $X \in \{-1, 1\}$ und $Y \in \{-1, 0, 1\}$. Die folgende Tabelle soll die gemeinsame Verteilung $f_{X,Y}(i, j) = \mathbb{P}(X = i, Y = j)$ des Zufallsvektors (X, Y) für die Werte $i \in \{-1, 1\}$ und $j \in \{-1, 0, 1\}$ angeben. Dabei sind $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ konstant.

$i \setminus j$	-1	0	1
-1	c_1	c_1	c_2
1	c_1	$2c_1$	$3c_1$

a) Bestimmen Sie die Menge aller $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$, sodass $f_{X,Y}$ eine Zähldichte ist.

b) Bestimmen Sie $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ so, dass $f_{X,Y}$ eine Zähldichte ist und zudem $\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{5}{8}$ gilt.

Für die restliche Aufgabe sei $c_1 = \frac{1}{8}$ und $c_2 = 0$.

c) Bestimmen Sie die Zähldichte f_X von X.

d) Bestimmen Sie

$$\mathbb{P}(\{X = -1\} \cup \{Y = 0\}) + \mathbb{P}(\{X = -1\} \cap \{Y = 0\})$$

und

$$\mathbb{P}(X = -1 \mid Y = -1).$$

e) Berechnen Sie den Erwartungswert von Y.

f) Sind die Zufallsvariablen X und Y stochastisch unabhängig?

Aufgabe 4 (4+2+3+2=11 Punkte)

Für $a > 0$ sei X eine auf dem Intervall $(0, 2a)$ gleichverteilte Zufallsvariable. Sei $Y := \min\{X, a\}$.

a) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von Y sowie $\mathbb{P}(Y = a)$. Hat die Verteilung von Y eine Lebesgue-Dichte?

b) Zeigen Sie

$$\mathbb{E}\left[Y^k\right] = \frac{k+2}{2(k+1)} \cdot a^k \quad \text{für } k \in \mathbb{N}.$$

c) Zeigen Sie mit Hilfe der Tschebyscheff-Ungleichung die Abschätzung

$$\mathbb{P}\left(Y > \frac{1}{4}a\right) \geq \frac{7}{12}.$$

d) Seien $Y_1, Y_2, \ldots$ unabhängige Zufallsvariablen mit der gleichen Verteilung wie Y. Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \frac{3}{4}a\right) \leq t\right) \quad \text{für } t \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 5 (4+4=8 Punkte)

a) Es seien X und Y unabhängige Zufallsvariablen mit Lebesgue-Dichten $f_X : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ und $f_Y : \mathbb{R} \to [0, \infty)$. Zeigen Sie, dass eine Lebesgue-Dichte des Quotienten $\frac{X}{Y}$ wie folgt gegeben ist

$$f_{\frac{X}{Y}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(ts) f_Y(s) |s| \, \mathrm{d}s, \; t \in \mathbb{R}.$$

b) Es seien X und Y unabhängige und je $\mathcal{N}(0,1)$-verteilte Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass der Quotient $\frac{X}{Y}$ Cauchy-verteilt ist. Dabei ist die Dichte einer Cauchy-verteilten Zufallsvariable gegeben durch

$$f(t) = \frac{1}{\pi(1+t^2)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Hinweis: Für eine differenzierbare Funktion h ist $G(x) = \exp(h(x))$ eine Stammfunktion von $g(x) = h'(x) \exp(h(x))$.

Aufgabe 6 (4+3+1=8 Punkte)

Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und identisch $\mathcal{N}(0, \vartheta)$-verteilte Zufallsvariablen, wobei $\vartheta > 0$. Also hat X_1 die Dichte

$$f_\vartheta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\vartheta}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\vartheta}\right), \; x \in \mathbb{R}.$$

a) Zeigen Sie, dass

$$\widehat{\vartheta}_n(X_1, \ldots, X_n) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

der auf $X_1, \ldots, X_n$ basierende Maximum-Likelihood-Schätzer für den Parameter ϑ ist.

b) Zeigen Sie, dass die Folge $(\widehat{\vartheta}_n)$ erwartungstreu und konsistent ist.

c) Berechnen Sie die mittlere quadratische Abweichung $\mathrm{MQA}_{\widehat{\vartheta}_n}(\vartheta) = \mathbb{E}_\vartheta[(\widehat{\vartheta}_n - \vartheta)^2]$.

Hinweis: Sie können ohne Beweis verwenden, dass $\mathbb{E}_\vartheta[X_1^4] = 3\vartheta^2$ ist.

Aufgabe 1 (4+3=7 Punkte)

Lösungsvorschlag:

a) i) $|\mathrm{Per}_5^7(mW)| = 7^5 = 16807.$ $\boxed{\textbf{1P}}$

ii) $|\mathrm{Per}_5^7(oW)| = 7^{\underline{5}} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520.$ $\boxed{\textbf{1P}}$

iii) Für das erste Feld stehen alle 7 Farben zur Auswahl. Für die anderen 4 Felder stehen dann nur jeweils 6 Farben zur Verfügung, da die Farbe des vorherigen Feldes nicht verwendet werden darf: $7 \cdot 6^4 = 9072$. $\boxed{\textbf{1P}}$

iv) Wir betrachten die Anzahl der Möglichkeiten den Feldern die Farben zuzuordnen, wobei es sich jeweils um eine Kombination ohne Wiederholung handelt (die Felder sind unterscheidbar, die Reihenfolge der Ziehung aber nicht relevant). Es gibt $\binom{5}{2}$ Möglichkeiten 2 Felder rot zu färben und anschließend $\binom{3}{2}$ Möglichkeiten 2 weitere Felder blau zu färben. Das letzte verbleibende Feld wird grün gefärbt: $\binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{1}{1} = 30.$ $\boxed{\textbf{1P}}$

b) Sei A_j das Ereignis, dass der beginnende Spieler in seinem j-ten Zug eine schwarze Kugel zieht und beide Spieler in den vorherigen $j-1$ Zügen nur weiße Kugeln gezogen haben. Die Ereignisse A_j sind disjunkt und es gilt

$$\mathbb{P}(\text{„beginnender Spieler gewinnt“}) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j),$$

wobei $\mathbb{P}(A_j) = \left(\frac{4}{5}\right)^{2(j-1)} \cdot \frac{1}{5}$. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\text{„beginnender Spieler gewinnt“}) &= \frac{1}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot \frac{1}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^4 \cdot \frac{1}{5} + \dots \\
&= \frac{1}{5} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^{2(j-1)} \\
&= \frac{1}{5} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^{2j} \\
&= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} \\
&= \frac{5}{9}. \quad \boxed{\textbf{3P}}
\end{aligned}$$

Alternativer Lösungsweg: Wir betrachten die ersten beiden Züge aus der Sicht des beginnenden Spielers. Im ersten Zug zieht er mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{5}$ die schwarze Kugel. Falls er im ersten Zug eine weiße Kugel zieht, so ist danach der andere Spieler an der Reihe. Zieht dieser eine schwarze Kugel, ist das Spiel beendet und der erste Spieler kann nicht mehr gewinnen. Zieht aber der zweite Spieler ebenfalls eine weiße Kugel (dies geschieht mit Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{5}$), so ist Spieler 1 wieder an der Reihe und besitzt die selben Gewinnchancen wie in seinem ersten Zug. Daher gilt, falls G_1 das Ereignis bezeichnet, dass der beginnende Spieler gewinnt,

$$\mathbb{P}(G_1) = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \mathbb{P}(G_1).$$

Diese Gleichung können wir nach $\mathbb{P}(G_1)$ auflösen und erhalten

$$\mathbb{P}(G_1) = \frac{5}{9}.$$

Weitere Lösungsvariante (stärker formalisiert): Zur Beschreibung des Spiels verwenden wir den diskreten WRaum $\Omega = \{\omega_j : j \in \mathbb{N}_0\}$, wobei

$$\omega_j = (\underbrace{w, \dots, w}_{j-\text{mal}}, s)$$

mit zunächst j Einträgen w für $j \in \mathbb{N}_0$ (also jeweils eine weiße Kugel in den ersten j Zügen und eine schwarze im $(j+1)$-ten Zug). Wir setzen $\mathbb{P}(\{\omega_j\}) = \left(\frac{4}{5}\right)^j \frac{1}{5}$. Dies ist offenbar eine geometrische Verteilung mit Parameter $p = \frac{1}{5}$. Sei G_1 das Ereignis, dass der beginnende Spieler gewinnt. Dann gilt $G_1 = \{\omega_{2i} : i \in \mathbb{N}_0\}$. Es folgt

$$\mathbb{P}(G_1) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^{2i} \frac{1}{5} = \frac{1}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^2 \underbrace{\frac{1}{5} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^{2(i-1)}}_{=\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^{2i} \frac{1}{5} = \mathbb{P}(G_1)} = \frac{1}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot \mathbb{P}(G_1).$$

Löst man nach $\mathbb{P}(G_1)$ auf, so erhält man $\mathbb{P}(G_1) = \frac{5}{9}$.

Aufgabe 2 (3+2+3=8 Punkte)

Lösungsvorschlag:

a) i) $X \sim \text{Bin}(n, p)$ $\boxed{\textbf{1P}}$

ii) Es gilt $\mathbb{P}(X = n) = p^n$. $\boxed{\textbf{1P}}$ Also muss gelten

$$p^n \geq 0.5 \iff p \geq 0.5^{1/n}. \quad \boxed{\textbf{1P}}$$

b) i) Da Y die Anzahl der Runden vor dem nächsten Gewinn, also „vor dem ersten Treffer“ beschreibt, ist Y geometrisch verteilt mit Parameter p. $\boxed{\textbf{1P}}$

ii) Da Y die Anzahl der Runden <u>vor</u> dem nächsten Gewinn beschreibt, beschreibt $Y + 1$ die Anzahl der Runden bis Martin das Spiel beendet. Also ist die gesuchte erwartete Anzahl gerade

$$\mathbb{E}[Y + 1] = \frac{1 - p}{p} + 1 = \frac{1}{p}. \quad \boxed{\textbf{1P}}$$

c) i) Jede Runde geht 5 Minuten zzgl. Nachspielzeit, die Anzahl der Runden beträgt $Y+1$. Daher gilt

$$T = 5 \cdot (Y + 1) + \sum_{j=1}^{Y+1} Z_j. \quad \boxed{\textbf{1P}}$$

ii) Gesucht ist der Erwartungswert von T. Mit dem Hinweis können wir diesen wie folgt berechnen:

$$\mathbb{E}[T] = 5 \cdot \mathbb{E}[Y + 1] + \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{Y+1} Z_j\right] = 5 \cdot \frac{1}{p} + \mathbb{E}[Y + 1] \cdot \mathbb{E}[Z_1] = \frac{5}{p} + \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{\lambda}. \quad \boxed{\textbf{2P}}$$

Dabei wurde verwendet, dass der Erwartungswert einer $\mathrm{Exp}(\lambda)$-Verteilung λ^{-1} ist.

Nachweis der Hilfsaussage (war nicht gefordert): Wir betrachten zunächst die Zufallsvariablen $|X_j|$ für $j \in \mathbb{N}$, welche ebenfalls von N unabhängig und gleichverteilt sind (mit endlichem Erwartungswert). Dann gilt mit dem Satz von der monotonen Konvergenz (für die Vertauschung von Summation und Erwartungswert)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{N} |X_j|\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{1}\{N=i\} \sum_{j=1}^{N} |X_j|\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{i} \mathbf{1}\{N=i\}\, |X_j|\right] \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{i} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}\{N=i\}\, |X_j|\right] \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{i} \mathbb{P}(N=i)\, \mathbb{E}[|X_j|] \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} i\, \mathbb{P}(N=i) \cdot \mathbb{E}[|X_1|] \\
&= \mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{E}[|X_1|].
\end{aligned}$$

Damit ist die erforderliche Integrierbarkeit nachgewiesen. Das Argument kann daher auch ohne Beträge wiederholt werden, nun auf der Grundlage des Satzes von der dominierten Konvergenz.

Aufgabe 3 (1+2+1+2+1+1=8 Punkte)

Lösungsvorschlag:

a) Da für eine Zähldichte die Gleichung $1 = \sum_{i=-1,1} \sum_{j=-1,0,1} f_{X,Y}(i,j)$ gelten muss und $c_1, c_2 \geq 0$ erfüllt sein muss, ist die Lösung gegeben durch

$$\{(c_1, c_2) \in [0,1]^2 \mid 1 = 8c_1 + c_2\}. \boxed{\mathbf{1P}}$$

b) Nun gilt zusätzlich

$$\frac{5}{8} = \mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}(Y=1, X=-1) + \mathbb{P}(Y=1, X=1) = c_2 + 3c_1, \quad \boxed{\mathbf{1P}}$$

was als einzige Lösung $c_1 = \frac{3}{40}$ und $c_2 = \frac{2}{5}$ $\boxed{\mathbf{1P}}$ zulässt.

c) Es gilt

$$f_X(-1) = \sum_j \mathbb{P}(X=-1, Y=j) = 2 \cdot c_1 + c_2 = 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4} \boxed{\mathbf{0.5P}}$$

und analog $f_X(1) = 6 \cdot c_1 = \frac{3}{4}$. $\boxed{\mathbf{0.5P}}$

d) Die Additivität eines W'maßes liefert

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\{X=-1\}\cup\{Y=0\}\right)+\mathbb{P}(\{X=-1\}\cap\{Y=0\}) &= \mathbb{P}(X=-1)+\mathbb{P}(Y=0)\\ &= 2c_1+3c_1=\frac{5}{8}.\boxed{\textbf{1P}}\end{aligned}$$

Mit $\mathbb{P}(Y=-1)=2c_1=\frac{2}{8}$ und der Definition der bedingten W'keit erhalten wir

$$\mathbb{P}(X=-1\mid Y=-1)=\frac{\mathbb{P}(X=-1,Y=-1)}{\mathbb{P}(Y=-1)}=\frac{1}{2}.\boxed{\textbf{1P}}$$

e) Es gilt nach Definition des Erwartungswertes

$$\mathbb{E}(Y)=-1\cdot 2c_1+1\cdot(c_2+3c_1)=\frac{1}{8}.\boxed{\textbf{1P}}$$

f) Die Zufallsvariablen sind nicht stochastisch unabhängig $\boxed{\textbf{0.5P}}$, da z.B.

$$\mathbb{P}(X=-1,Y=-1)=\frac{1}{8}\neq\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{8}=\mathbb{P}(X=-1)\cdot\mathbb{P}(Y=-1)\boxed{\textbf{0.5P}}$$

gilt.

Aufgabe 4 (4+2+3+2=11 Punkte)

Lösungsvorschlag:

a) Es gilt

$$\mathbb{P}(Y\le t)=\begin{cases}0, & t\le 0, \boxed{\textbf{0.5P}}\\ 1, & t\ge a, \boxed{\textbf{0.5P}}\\ \frac{t}{2a}, & 0<t<a.\end{cases}$$

Hierbei wurde im Fall $0<t<a$ verwendet, dass

$$\mathbb{P}(Y\le t)=\frac{1}{2a}\int_0^{2a}\mathbf{1}\{\min\{x,a\}\le t\}\,dx=\frac{1}{2a}\int_0^{2a}\mathbf{1}\{x\le t\}\,dx=\frac{t}{2a}.\boxed{\textbf{1P}}$$

Nun gilt

$$\mathbb{P}(Y=a)=\mathbb{P}(Y\le a)-\lim_{t\uparrow a}\mathbb{P}(Y\le t)=1-\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}\neq 0.\boxed{\textbf{1P}}$$

Somit hat die Verteilung $\mathbb{P}^Y$ von Y keine Lebesgue-Dichte. $\boxed{\textbf{1P}}$

b) Sei $k\in\mathbb{N}$. Durch Aufspalten des Integrationsbereichs erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[Y^k\right] &= \frac{1}{2a}\int_0^{2a}\min\{x,a\}^k\,dx=\frac{1}{2a}\int_0^{a}x^k\,dx+\frac{1}{2a}\int_a^{2a}a^k\,dx\\ &= \frac{1}{2a}\frac{1}{k+1}a^{k+1}+\frac{1}{2a}\cdot a\cdot a^k=\frac{k+2}{2(k+1)}\cdot a^k.\boxed{\textbf{2P}}\end{aligned}$$

c) Nach b) ist $\mathbb{E}[Y] = \frac{3}{4}a$, $\mathbb{E}[Y^2] = \frac{2}{3}a^2$ und daher $\mathbb{V}(Y) = \frac{5}{48}a^2$. $\boxed{\textbf{1P}}$ Es folgt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(Y > \frac{1}{4}a\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(Y \leq \frac{1}{4}a\right) = 1 - \mathbb{P}\left(Y - \frac{3}{4}a \leq -\frac{1}{2}a\right)\\ &\geq 1 - \mathbb{P}\left(\left|Y - \frac{3}{4}a\right| \geq \frac{1}{2}a\right)\\ &\geq 1 - \frac{4\mathbb{V}(Y)}{a^2} = 1 - 4\cdot\frac{5}{48} = \frac{7}{12}. \boxed{\textbf{2P}}\end{aligned}$$

d) Sei $S_n := Y_1 + \cdots + Y_n$. Es gilt $\mathbb{E}[Y_i] = \frac{3}{4}a$, $\mathbb{V}(Y_i) = \frac{5}{48}a^2$ und daher $\mathbb{E}[S_n] = n\cdot\frac{3}{4}a$ und $\mathbb{V}(S_n) = n\cdot\frac{5}{48}a^2$ aufgrund der Unabhängigkeits- und Gleichverteilungsannahmen. $\boxed{\textbf{1P}}$ Für $t \in \mathbb{R}$ erhält man nun mit dem zentralen Grenzwertsatz

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \frac{3}{4}a\right) \leq t\right) &= \lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{\mathbb{V}[S_n]}} \leq t\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{48}}a}\right)\\ &= \Phi\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\cdot\frac{4t}{a}\right). \boxed{\textbf{1P}}\end{aligned}$$

Aufgabe 5 (4+4=8 Punkte)

Lösungsvorschlag:

a) Sei $A \in \mathcal{B}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\frac{X}{Y} \in A\right) &= \int_{\mathbb{R}^2}\mathbf{1}\left\{\frac{x}{y}\in A\right\}\mathbb{P}^{(X,Y)}(\mathrm{d}(x,y))\\ &\overset{\text{Fub.}}{=} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{1}\left\{\frac{x}{y}\in A\right\}f_X(x)f_Y(y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &= \int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{1}\left\{\frac{x}{y}\in A\right\}f_X(x)f_Y(y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &\quad + \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{1}\left\{\frac{x}{y}\in A\right\}f_X(x)f_Y(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = (*).\end{aligned}$$

Wir substituieren $x = ty$ (Grenzen beachten!). Damit gilt weiter

$$\begin{aligned}(*) &= \int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{1}\{t\in A\}f_X(ty)f_Y(y)y\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y + \int_{-\infty}^{0}\int_{\infty}^{-\infty}\mathbf{1}\{t\in A\}f_X(ty)f_Y(y)y\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y\\ &= \int_{0}^{\infty}\int_{A}f_X(ty)f_Y(y)y\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y - \int_{-\infty}^{0}\int_{A}f_X(ty)f_Y(y)y\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{A}f_X(ty)f_Y(y)|y|\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y\\ &\overset{\text{Fub.}}{=} \int_{A}\underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty}f_X(ty)f_Y(y)|y|\,\mathrm{d}y\right)}_{=:h(t)}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Da $A \in \mathcal{B}$ beliebig war, ist h eine Dichte von $\frac{X}{Y}$. $\boxed{\textbf{4P}}$

b) Aus der Vorlesung wissen wir, dass die Dichte der Standardnormalverteilung durch

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right),\ x \in \mathbb{R},$$

gegeben ist. Daher folgt mit Hilfe der Aussage aus Teil a) für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f_{\frac{X}{Y}}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(ts)\varphi(s)|s| \,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |s| \exp\left(-\frac{s^2}{2}(1+t^2)\right) \mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \cdot \int_{0}^{\infty} s \exp\left(-\frac{s^2}{2}(1+t^2)\right) \mathrm{d}s. \qquad \text{(Symmetrie)} \end{aligned}$$

Betrachten wir die zu integrierende Funktion, so fällt auf, dass die Stammfunktion wegen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \exp\left(-\frac{s^2}{2}(1+t^2)\right) = -s(1+t^2) \exp\left(-\frac{s^2}{2}(1+t^2)\right)$$

durch

$$-\frac{1}{1+t^2} \exp\left(-\frac{s^2}{2}(1+t^2)\right)$$

gegeben ist (bzw. indem wir den Hinweis verwenden). Daraus folgt

$$\begin{aligned} f_{\frac{X}{Y}}(t) &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{1+t^2} \exp\left(-\frac{s^2}{2}(1+t^2)\right)\right]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{\pi(1+t^2)}. \boxed{\textbf{4P}} \end{aligned}$$

Da dies gerade der Dichte der Cauchy-Verteilung ist, folgt die Behauptung.

Aufgabe 6 (4+3+1=8 Punkte)

Lösungsvorschlag:

a) Die Funktion $f_\vartheta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\vartheta}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\vartheta}\right)$ $(x \in \mathbb{R})$ ist eine Dichte von X_1. Für $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ ist die zu maximierende Likelihood-Funktion

$$L_x(\vartheta) = \prod_{i=1}^{n} f_\vartheta(x_i) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\vartheta}}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2\vartheta}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right). \qquad \boxed{\textbf{1P}}$$

Wir untersuchen jetzt die Funktion

$$h_x(\vartheta) := \ln(L_x(\vartheta)) = -\frac{n}{2}\log(2\pi\vartheta) - \frac{1}{2\vartheta}\sum_{i=1}^{n} x_i^2. \qquad \boxed{\textbf{1P}}$$

Es ist

$$\frac{d}{d\vartheta}(h_x(\vartheta)) = -\frac{n}{2\vartheta} + \frac{1}{2\vartheta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \iff \vartheta = \widehat{\vartheta}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2. \qquad \boxed{\textbf{1P}}$$

Wegen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}(h_x(\vartheta)) > 0$ für $\vartheta < \widehat{\vartheta}_n(x)$ und $\frac{d}{d\vartheta}(h_x(\vartheta)) < 0$ für $\vartheta > \widehat{\vartheta}_n(x)$ ist $\widehat{\vartheta}_n$ Stelle eines globalen Maximums. **1P**

b) Da $X_1, \ldots, X_n$ identisch verteilt sind, gilt

$$\mathbb{E}_\vartheta[\widehat{\vartheta}_n(X_1, \ldots, X_n)] = \mathbb{E}_\vartheta[X_1^2] = \mathbb{V}_\vartheta(X_1) = \vartheta.$$

$\widehat{\vartheta}_n$ ist also erwartungstreu. **1P**

Aus der Unabhängigkeit der X_j und dem Hinweis folgt

$$\mathbb{V}_\vartheta(\widehat{\vartheta}_n) = \frac{1}{n^2}\mathbb{V}_\vartheta\left(\sum_{j=1}^n X_j^2\right) = \frac{1}{n}\mathbb{V}_\vartheta(X_1^2) = \frac{1}{n}\left(\mathbb{E}_\vartheta[X_1^4] - (\mathbb{E}_\vartheta[X_1^2])^2\right) = \frac{2\vartheta^2}{n}. \qquad \boxed{\mathbf{1P}}$$

Die Tschebyscheff–Ungleichung liefert $\forall\, \varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}_\vartheta\left(\left|\widehat{\vartheta}_n(X_1, \ldots, X_n) - \vartheta\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{V}(\widehat{\vartheta}_n)}{\varepsilon^2} = \frac{2\vartheta^2}{n\,\varepsilon^2} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\ . \qquad \boxed{\mathbf{1P}}$$

Alternativ: Man kann auch Satz 20.6 der Vorlesung verwenden, dann benötigt man nur die Formel für die Varianz (die gegen Null konvergiert) und die Erwartungstreue.

c) Da $\widehat{\vartheta}_n$ erwartungstreu ist, gilt $\mathrm{MQA}_{\widehat{\vartheta}_n}(\vartheta) = \mathbb{V}_\vartheta(\widehat{\vartheta}_n)$. Also gilt nach Teil b)

$$\mathrm{MQA}_{\widehat{\vartheta}_n}(\vartheta) = \frac{2\vartheta^2}{n}. \qquad \boxed{\mathbf{1P}}$$