

Winter

Einführung in die Stochastik

Dauer: 120 min. Lösung: offiziell Bestanden mit: 24 P.
Bemerkungen: doppelseitig, handschriftlich beschriebenes DIN A4 Blatt

Aufgabe 1 (1+1+1+1+2+2=8 Punkte)

Tragen Sie bitte Ihre Antworten zu den nachfolgenden Fragen jeweils in die rechte Spalte ein. Es sind keine Begründungen notwendig und Binomialkoeffizienten müssen nicht ausgerechnet werden.

	Antwort
1. Bestimmen Sie $c > 0$ so, dass die nachfolgende Funktion eine Dichte ist. $f(x, y) = \begin{cases} c(x + y), & \text{falls } x + y \geq 1, x \leq 1, y \leq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$	$\frac{3}{2}$
2. Es seien X_1, \dots, X_n unabhängig und jeweils gleichverteilt auf der Menge $\{1, \dots, m\}$, $m \in \mathbb{N}$, und $k \in \{1, \dots, m\}$. Geben Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(\min\{X_1, \dots, X_n\} \leq k)$ an.	$1 - \left(\frac{m-k}{m}\right)^n$
3. Sie möchten einen Obstkorb zusammenstellen und haben 8 verschiedene Obstsorten zur Verfügung. Wie viele Möglichkeiten gibt es für den Inhalt eines Obstkorbes, der genau 5 (nicht notwendigerweise verschiedene) Früchte enthält?	$\binom{12}{5} = \binom{12}{7}$
4. Es seien X, Y, Z unabhängig mit $X \sim G(\frac{1}{3})$, $Y \sim \text{Nb}(5, \frac{1}{3})$ und $Z \sim \text{Po}(5)$. Welche Verteilung besitzt $X + Y$ unter der Bedingung $Z = 5$?	$\text{Nb}(6, \frac{1}{3})$
5. Es seien U_1, U_2 unabhängig und gleichverteilt auf $(0, 1)$. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(U_1 + U_2 \leq \frac{1}{2})$.	$\frac{1}{8}$
6. Es sei $n \geq 2$ und F_n die Anzahl der Fixpunkte einer rein zufälligen bijektiven Abbildung $\{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$. Geben Sie $\mathbb{E}[F_n^2]$ an.	2

Aufgabe 2 (1+1+1+1+2+2+2 = 10 Punkte)

Ein fairer Würfel wird n -mal ($n \geq 7$) nacheinander geworfen.

a) Geben Sie ein geeignetes Laplace-Modell an.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse.

b) Es wird nie eine 6 gewürfelt.

c) Beim 3. und 4. Wurf wird die gleiche Augenzahl gewürfelt.

d) In den ersten drei Würfeln werden unterschiedliche Augenzahlen gewürfelt.

e) Die Summe der Augenzahlen der ersten beiden Würfe ist 3 und die Summe des 5. und 7. Wurfes ist 7.

f) Die Summe der Augenzahlen der ersten beiden Würfe ist 3 und die Summe des 2. und 3. Wurfes ist 7.

g) Mindestens einmal wird eine 6 gewürfelt, aber nie eine 1.

Aufgabe 3 (2+1+1+3 = 7 Punkte)

Ein zweistufiges Experiment werde wie folgt durchgeführt. Zunächst wird ein Glücksrad mit 8 gleichgroßen Sektoren gedreht, die mit den Zahlen von 1 bis 8 markiert sind. Auf diese Weise wird rein zufällig eine Zahl $N \in \{1, \dots, 8\}$ gewählt. Nun werden in eine Lostrommel N Gewinnlose und $8 - N$ Nieten gelegt. Abschließend werden 7 Lose aus dieser Lostrommel ohne Zurücklegen gezogen.

- Es sei A_i das Ereignis, dass die Zahl „ i “ beim Drehen des Glücksrads erzielt wird, und B das Ereignis, dass alle sieben Lose Gewinne sind. Bestimmen Sie die bedingten Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(B|A_i)$ für $i = 1, \dots, 8$.
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind alle sieben gezogenen Lose Gewinne?
- Wie groß ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass eine „8“ beim Drehen des Glücksrads erzielt wurde, falls alle sieben gezogenen Lose Gewinne sind?
- Bestimmen Sie die erwartete Anzahl der Gewinnlose unter den gezogenen Losen.

Aufgabe 4 (1+1+2+3 = 7 Punkte)

Es sei X eine \mathbb{N}_0 -wertige Zufallsvariable mit erzeugender Funktion

$$g_X(t) = \frac{c}{1 - ct}, \quad |t| \leq 1$$

für eine geeignete Konstante $c > 0$.

- Bestimmen Sie die Konstante c .
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(X = 0)$ und $\mathbb{P}(X = 2)$.

Hinweis: Falls Sie Teil a) nicht gelöst haben, so können Sie die Wahrscheinlichkeiten auch mit unbestimmtem c angeben, ebenso den Erwartungswert in Teil c).

- Bestimmen Sie den Erwartungswert von X .

Es seien nun Y und Z unabhängige \mathbb{N}_0 -wertige Zufallsvariablen. Y sei gleichverteilt auf der Menge $\{0, 1, 2\}$. Die erzeugende Funktion von $Y + Z$ sei gegeben durch

$$g_{Y+Z}(t) = \frac{1}{6} (t^3 + 2t^2 + 2t + 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

- Bestimmen Sie die Verteilung von Z .

Aufgabe 5 (2+1+4+3+3=13 Punkte)

Auf eine Dartscheibe wird mehrfach geworfen. Der Mittelpunkt der Dartscheibe sei der Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems. Die Koordinaten der Auftreffpunkte $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots$ werden als Realisierungen von unabhängigen, $N(1, 4)$ -verteilten Zufallsvariablen $X_1, Y_1, X_2, Y_2, \dots$ modelliert.

- Welche Verteilung besitzt $X_1 - 2X_2$?
- Welchen Erwartungswert besitzt $X_1 - 2X_2$?
- Es sei $Q := [0, 3]^2$ der rechte obere Quadrant der Dartscheibe. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit w , dass Q in den ersten 5 Würfeln nicht getroffen wird.
- Die Wahrscheinlichkeit, mit der ein gewisser Sektor F der Dartscheibe getroffen wird, sei $p = \frac{1}{5}$. Es bezeichne S_n die Anzahl der Treffer von F in n Würfeln. Bestimmen Sie eine Konstante $c > 0$ so, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

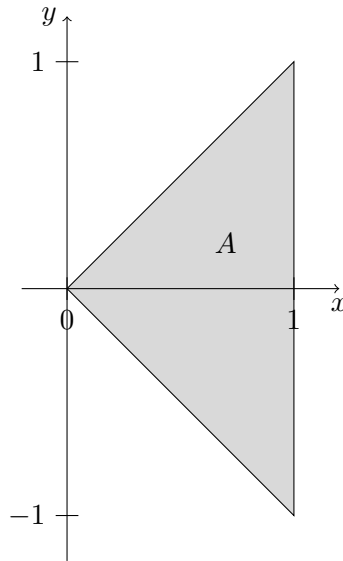
$$0 < \mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{n} S_n - p \right| \geq c \right) \leq \frac{1}{n}.$$

- Bestimmen Sie die Menge T aller $t > 0$ so, dass gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} (|S_n - np| \geq t\sqrt{n}) \geq 0.05.$$

Aufgabe 6 (1+3+3+1=8 Punkte)

Der zweidimensionale Zufallsvektor (X, Y) sei gleichverteilt auf der Menge A , die in folgendem Bild skizziert ist:



- Geben Sie die Dichtefunktion $f_{X,Y}(x, y)$ von (X, Y) an.
- Bestimmen Sie jeweils die Dichte der Randverteilung von X bzw. Y , sowie die Verteilungsfunktion von X .
- Bestimmen Sie die Kovarianz $\mathbb{C}(X, Y)$.
- Setzen Sie in der folgenden Tabelle genau ein Kreuz in das Kästchen, bei dem sowohl die Eigenschaft in der Zeile als auch die in der Spalte auf X und Y zutrifft:

	X, Y unkorreliert	X, Y korreliert
X, Y unabhängig		
X, Y abhängig		

Aufgabe 7 (1+6= 7 Punkte)

In einer Urne seien $s \in \mathbb{N}$ schwarze und $\vartheta \in \mathbb{N} \subset \tilde{\Theta} := [0, \infty]$ rote Kugeln, wobei ϑ unbekannt sei und wir annehmen, dass mindestens eine Kugel jeder Farbe in der Urne liegt. Nach gutem Mischen werde jeweils eine Kugel mit Zurücklegen gezogen und eine 1 notiert, falls die gezogene Kugel rot ist, eine 0 sonst. Dieser Vorgang wird insgesamt $n \in \mathbb{N}$ mal wiederholt. Die Zufallsvariable X_j gebe das Ergebnis im j -ten Zug an, $j = 1, \dots, n$.

- Zeigen Sie, dass die Zähldichte von X_1 gegeben ist durch

$$f(k, \vartheta) = \frac{\vartheta^k s^{1-k}}{s + \vartheta}, \quad k = 0, 1.$$

- Zeigen Sie, dass der Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\vartheta}_n \in \tilde{\Theta}$ für ϑ zu jeder Stichprobe $x = (x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n$ gegeben ist durch

$$\hat{\vartheta}_n(x) := \begin{cases} s \frac{\bar{x}_n}{1 - \bar{x}_n}, & \bar{x}_n \in [0, 1), \\ \infty, & \bar{x}_n = 1, \end{cases}$$

wobei $\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j$ ist.

Verteilungsfunktion $\Phi(x)$ der Standard-Normalverteilung $N(0, 1)$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7793	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Aufgabe 1 (1+1+1+1+2+2=8 Punkte)

Lösungsvorschlag:

1. Es muss gelten

$$1 = \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \, d(x, y) = c \int_0^1 \int_{1-x}^1 (x+y) \, dy \, dx = c \cdot \frac{2}{3}.$$

Also folgt $c = \frac{3}{2}$.

2. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\min\{X_1, \dots, X_n\} \leq k) &= 1 - \mathbb{P}(X_1 > k, \dots, X_n > k) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n \frac{m-k}{m} \\ &= 1 - \left(\frac{m-k}{m}\right)^n. \end{aligned}$$

3. Die Anzahl der Möglichkeiten entspricht der Anzahl von 5-Kombinationen aus einer 8-elementigen Menge mit Wiederholung, Diese ist nach Vorlesung gegeben durch

$$|\text{Kom}_5^8(mW)| = \binom{12}{5}.$$

4. Da
- $X + Y$
- und
- Z
- nach dem Blockungslemma unabhängig sind, spielt die Bedingung auf
- $Z = 5$
- keine Rolle. Mit dem Additionsgesetz für die negative Binomialverteilung (und
- $G(p) = \text{Nb}(1, p)$
-) folgt
- $X + Y \sim \text{Nb}(6, \frac{1}{3})$
- .

5. Nach der Faltungsformel besitzt
- $U_1 + U_2$
- die Dichte

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}\{x \in (0, 1), t-x \in (0, 1)\} \, dx.$$

Also folgt

$$\mathbb{P}(U_1 + U_2 \leq \frac{1}{2}) = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^t \, dx \, dt = \int_0^{\frac{1}{2}} t \, dt = \frac{1}{8}.$$

Alternativ kann sich die Antwort auch graphisch überlegt werden. Der Vektor (U_1, U_2) ist gleichverteilt auf $[0, 1]^2$ und die Menge $\{(x, y) \in [0, 1]^2 \mid x + y \leq \frac{1}{2}\}$ bildet ein Dreieck, das die Hälfte eines Quadranten von $[0, 1]^2$ und somit ein Achtel von $[0, 1]^2$ bildet.

6. Es gilt
- $F_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}\{i \text{ ist Fixpunkt}\}$
- und somit folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[F_n^2] &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbb{E}[\mathbf{1}\{i, j \text{ sind Fixpunkte}\}] \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(i \text{ ist Fixpunkt}) + \sum_{\substack{i, j=1, \\ i \neq j}}^n \mathbb{P}(i, j \text{ sind Fixpunkte}) \\ &= n \frac{1}{n} + n(n-1) \frac{1}{n(n-1)} = 2. \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (1+1+1+1+2+2+2 = 10 Punkte)

Lösungsvorschlag:

- a) Als Grundmenge wählen wir

$$\Omega = \{1, \dots, 6\}^n = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \mid \omega_i \in \{1, \dots, 6\}, i = 1, \dots, n\} = \text{Per}_n^6(mW)$$

versehen mit der Gleichverteilung \mathbb{P} auf Ω . Somit gilt $|\Omega| = 6^n$.

- b) Das Ereignis lässt sich formal beschreiben durch $B := \{1, \dots, 5\}^n \subseteq \Omega$ und es folgt $\mathbb{P}(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \left(\frac{5}{6}\right)^n$.

- c) Das Ereignis lässt sich formal beschreiben durch $C := \{\omega \in \Omega \mid \omega_3 = \omega_4\}$ mit $|C| = 6^{n-1}$ und deshalb gilt $\mathbb{P}(C) = \frac{6^{n-1}}{6^n} = \frac{1}{6}$.

- d) Das Ereignis lässt sich formal beschreiben durch $D := \{\omega \in \Omega \mid \omega_1 \neq \omega_2 \neq \omega_3 \neq \omega_1\}$ mit $|D| = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 6^{n-3}$ und deshalb gilt $\mathbb{P}(D) = \frac{5 \cdot 4 \cdot 6^{n-2}}{6^n} = \frac{5}{9}$.

- e) Das Ereignis lässt sich formal beschreiben durch

$$E := \{\omega \in \Omega \mid (\omega_1, \omega_2) \in \{(1, 2), (2, 1)\}, (\omega_5, \omega_7) \in \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}\}.$$

Also folgt $|E| = 2 \cdot 6 \cdot 6^{n-4}$ und somit $\mathbb{P}(E) = \frac{2 \cdot 6^{n-3}}{6^n} = \frac{1}{3 \cdot 6^2}$.

- f) Das Ereignis lässt sich formal beschreiben durch

$$F = \{\omega \in \Omega \mid (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \{(1, 2, 5), (2, 1, 6)\}\}$$

Also folgt $|F| = 2 \cdot 6^{n-3}$ und somit $\mathbb{P}(F) = \frac{2 \cdot 6^{n-3}}{6^n} = \frac{1}{3 \cdot 6^2}$.

- g) Das Ereignis lässt sich formal beschreiben durch

$$G = \{\omega \in \Omega \mid \omega_i \in \{2, \dots, 6\}, \exists i \in \{1, \dots, n\} \text{ mit } \omega_i = 6\} = G_1 \setminus G_2$$

mit $G_1 := \{\omega \in \Omega \mid \omega_i \in \{2, \dots, 6\}\}$ und $G_2 := \{\omega \in \Omega \mid \omega_i \in \{2, \dots, 5\}\}$. Wegen $G_2 \subseteq G_1$ folgt $|G| = |G_1| - |G_2| = 5^n - 4^n$ und damit $\mathbb{P}(G) = \frac{5^n - 4^n}{6^n}$.

Aufgabe 3 (2+1+1+3 = 7 Punkte)

Lösungsvorschlag:

- a) Als Grundmenge wählen wir

$$\Omega = \{1, \dots, 6\}^n = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \mid \omega_i \in \{1, \dots, 6\}, i = 1, \dots, n\} = \text{Per}_n^6(mW)$$

versehen mit der Gleichverteilung \mathbb{P} auf Ω . Somit gilt $|\Omega| = 6^n$.

- b) Das Ereignis lässt sich formal beschreiben durch $B := \{1, \dots, 5\}^n \subseteq \Omega$ und es folgt $\mathbb{P}(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \left(\frac{5}{6}\right)^n$.

- c) Das Ereignis lässt sich formal beschreiben durch $C := \{\omega \in \Omega \mid \omega_3 = \omega_4\}$ mit $|C| = 6^{n-1}$ und deshalb gilt $\mathbb{P}(C) = \frac{6^{n-1}}{6^n} = \frac{1}{6}$.

- d) Das Ereignis lässt sich formal beschreiben durch $D := \{\omega \in \Omega \mid \omega_1 \neq \omega_2 \neq \omega_3 \neq \omega_1\}$ mit $|D| = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 6^{n-3}$ und deshalb gilt $\mathbb{P}(D) = \frac{5 \cdot 4 \cdot 6^{n-2}}{6^n} = \frac{5}{9}$.

- e) Das Ereignis lässt sich formal beschreiben durch

$$E := \{\omega \in \Omega \mid (\omega_1, \omega_2) \in \{(1, 2), (2, 1)\}, (\omega_5, \omega_7) \in \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}\}.$$

Also folgt $|E| = 2 \cdot 6 \cdot 6^{n-4}$ und somit $\mathbb{P}(E) = \frac{2 \cdot 6^{n-3}}{6^n} = \frac{1}{3 \cdot 6^2}$.

f) Das Ereignis lässt sich formal beschreiben durch

$$F = \{\omega \in \Omega \mid (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \{(1, 2, 5), (2, 1, 6)\}\}$$

Also folgt $|F| = 2 \cdot 6^{n-3}$ und somit $\mathbb{P}(F) = \frac{2 \cdot 6^{n-3}}{6^n} = \frac{1}{3 \cdot 6^2}$.

g) Das Ereignis lässt sich formal beschreiben durch

$$G = \{\omega \in \Omega \mid \omega_i \in \{2, \dots, 6\}, \exists i \in \{1, \dots, n\} \text{ mit } \omega_i = 6\} = G_1 \setminus G_2$$

mit $G_1 := \{\omega \in \Omega \mid \omega_i \in \{2, \dots, 6\}\}$ und $G_2 := \{\omega \in \Omega \mid \omega_i \in \{2, \dots, 5\}\}$. Wegen $G_2 \subseteq G_1$ folgt $|G| = |G_1| - |G_2| = 5^n - 4^n$ und damit $\mathbb{P}(G) = \frac{5^n - 4^n}{6^n}$.

Aufgabe 4 (1+1+2+3 = 7 Punkte)

Lösungsvorschlag:

a) Es gilt zunächst (für $|ct| < 1$)

$$g_X(t) = c \frac{1}{1-ct} = c \sum_{k=0}^{\infty} (ct)^k = \sum_{k=0}^{\infty} c^{k+1} t^k,$$

woraus für die Zähldichte f von X folgt: $f(k) = \mathbb{P}(X = k) = c^{k+1}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Wegen der Normierungseigenschaft $\sum_{k \in \mathbb{N}_0} f(k) = 1$ ergibt sich daraus $c = \frac{1}{2}$, denn

$$\sum_{k=0}^{\infty} c^{k+1} = \frac{c}{1-c} = 1 \iff c = \frac{1}{2}.$$

b) Die gesuchten Wahrscheinlichkeiten können nun direkt aus der Zähldichte ausgelesen werden. Es folgt $\mathbb{P}(X = 0) = c = \frac{1}{2}$ und $\mathbb{P}(X = 2) = c^3 = \frac{1}{8}$.

c) Nach Satz 17.6 gilt $\mathbb{E}[X] = g'_X(1-)$. Wegen

$$g'_X(t) = \frac{c^2}{(1-ct)^2} = \frac{1}{4(1-\frac{t}{2})^2} \quad \text{für } t \in (-2, 2)$$

und da diese Funktion stetig ist an der Stelle $t = 1$, folgt $\mathbb{E}[X] = g'_X(1) = 1$.

Hinweis: Alternativ kann $\mathbb{E}[X]$ auch über die bereits bestimmte Zähldichte berechnet werden.

d) Wegen der angenommenen Unabhängigkeit von Y und Z gilt $g_{Y+Z} = g_Y \cdot g_Z$ und somit $g_Z = g_{Y+Z}/g_Y$. (Man beachte hierbei, dass erzeugende Funktionen strikt positiv sind.) Aus der Verteilungsannahme für Y folgt $g_Y(t) = \frac{1}{3}(t^2 + t + 1)$. Polynomdivision ergibt nun

$$g_Z(t) = g_{Y+Z}(t)/g_Y(t) = \frac{\frac{1}{6}(t^3 + 2t^2 + 2t + 1)}{\frac{1}{3}(t^2 + t + 1)} = \frac{1}{2}(t + 1).$$

Somit hat Z die Zähldichte $f_Z(0) = f_Z(1) = \frac{1}{2}$ (und $f_Z(k) = 0$ sonst), d.h. Z ist diskret gleichverteilt auf der Menge $\{0, 1\}$.

Aufgabe 5 (2+1+4+3+3=13 Punkte)

Lösungsvorschlag:

- a) Nach Vorlesung ist die Summe zweier unabhängiger normalverteilter Zufallsvariablen wieder normalverteilt. Erwartungswerte und Varianzen werden dabei jeweils addiert. Zudem ist $-2X_2 \sim N(-2, 16)$. Daher gilt $X_1 - 2X_2 \sim N(-1, 20)$.
- b) Es gilt $\mathbb{E}[X_1 - 2X_2] = \mathbb{E}[X_1] - 2\mathbb{E}[X_2] = -1$ aufgrund der Linearität oder wegen Teil a).
- c) Wir bestimmen zunächst die Wahrscheinlichkeit q , mit welcher der Quadrant Q in einem Wurf (etwa im ersten) getroffen wird. Wegen der Unabhängigkeit der Koordinaten gilt

$$q = \mathbb{P}((X_1, Y_1) \in Q) = \mathbb{P}(X_1 \in [0, 3], Y_1 \in [0, 3]) = \mathbb{P}(0 < X_1 \leq 3)\mathbb{P}(0 < Y_1 \leq 3)$$

und da X_1 und Y_1 dieselbe Verteilung, nämlich $N(1, 4)$, besitzen, folgt weiter

$$\begin{aligned} q &= \mathbb{P}(0 < X_1 \leq 3)^2 = \mathbb{P}(-1 < X_1 - 1 \leq 2)^2 = \mathbb{P}\left(-\frac{1}{2} < \frac{X_1 - 1}{2} \leq 1\right)^2 \\ &= \left(\Phi(1) - \Phi\left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 = \left(\Phi(1) - 1 + \Phi\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 \\ &\approx (0.8413 + 0.6915 - 1)^2 = 0.5328^2 \approx 0.284. \end{aligned}$$

Da die einzelnen Würfe unabhängig mit Trefferwahrscheinlichkeit q die Menge Q treffen, ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit w nun genau die Wahrscheinlichkeit, mit der eine $\text{Bin}(5, q)$ -verteilte Zufallsvariable X den Wert $k = 0$ annimmt, d.h.,

$$w = \mathbb{P}(X = 0) = \binom{5}{0} q^0 (1 - q)^{5-0} = (1 - q)^5 \approx (1 - 0.284)^5 \approx 0.53.$$

- d) Wegen $\mathbb{E}[S_n] = np$ und $\mathbb{V}(S_n) = np(1 - p)$ gilt nach der Tschebyscheff-Ungleichung zunächst

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}S_n - p\right| \geq c\right) = \mathbb{P}(|S_n - np| \geq nc) \leq \frac{\mathbb{V}(S_n)}{(nc)^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{p(1 - p)}{c^2}.$$

Die gewünschte (rechte) Ungleichung ist für ein $c > 0$ also erfüllt, falls $p(1 - p)c^{-2} \leq 1$ gilt, d.h., falls $c^2 \geq p(1 - p) = \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} = \left(\frac{2}{5}\right)^2$ oder $c \geq \frac{2}{5}$ gilt. Die Konstante $c = \frac{2}{5}$ erfüllt auch die linke Ungleichung, denn es gilt

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}S_n - \frac{1}{5}\right| \geq \frac{2}{5}\right) \geq \mathbb{P}(S_n = n) > 0,$$

und hat damit alle geforderten Eigenschaften.

Anmerkung: Mindestens jede Konstante $c \in [\frac{2}{5}, \frac{4}{5}]$ erfüllt ebenfalls die gewünschten Ungleichungen, da dann ebenso $\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}S_n - \frac{1}{5}\right| \geq c\right) \geq \mathbb{P}(S_n = n) > 0$ gilt. Für $c > \frac{4}{5}$ gilt hingegen $\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}S_n - \frac{1}{5}\right| \geq c\right) = 0$. Es könnte noch weitere Werte $0 < c < \frac{2}{5}$ geben, für die beide Ungleichungen erfüllt sind. Die Tschebyscheff-Ungleichung ist nicht scharf.

- e) Es gilt zunächst für jedes $n \in \mathbb{N}$ und die Standardisierung $\tilde{S}_n := \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1 - p)}}$ von S_n

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|S_n - np| \geq t\sqrt{n}) &= \mathbb{P}\left(\left|\tilde{S}_n\right| \geq \frac{t\sqrt{n}}{\sqrt{np(1 - p)}}\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\left|\tilde{S}_n\right| < \frac{t}{\sqrt{p(1 - p)}}\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\left|\tilde{S}_n\right| < \frac{5}{2}t\right) = 1 - \mathbb{P}\left(-\frac{5}{2}t < \tilde{S}_n < \frac{5}{2}t\right), \end{aligned}$$

wobei in der letzten Zeile $\sqrt{p(1-p)} = \frac{2}{5}$ eingesetzt wurde. Nach dem zentralen Grenzwertsatz von Moivre-Laplace konvergiert der letzte Ausdruck für $n \rightarrow \infty$ gegen

$$1 - (\Phi(\frac{5}{2}t) - \Phi(-\frac{5}{2}t)) = 2(1 - \Phi(\frac{5}{2}t)).$$

Die gewünschte Ungleichung gilt deshalb für alle $t > 0$, für welche

$$1 - \Phi(\frac{5}{2}t) \geq 0.025 \quad \text{bzw.} \quad \Phi(\frac{5}{2}t) \leq 0.975$$

gilt. Dies ist nach der Tabelle auf S.2 für $t > 0$ erfüllt, für die $\frac{5}{2}t \leq 1.96$ gilt, und somit für alle $t \leq 0.784$. Es folgt $T = (0, 0.784]$.

Aufgabe 6 (1+3+3+1=8 Punkte)

Lösungsvorschlag:

Zunächst stellen wir fest, dass A formal gegeben ist durch

$$A = \{(x, y) \in [0, 1] \times [-1, 1] : -x \leq y \leq x\}.$$

- a) Da wir es mit einer Gleichverteilung zu tun haben, ist $f_{X,Y}(x, y) = \frac{\mathbb{1}_A(x, y)}{\lambda^2(A)}$ die Dichte von (X, Y) . Dabei ist $\lambda^2(A)$ das Lebesgue-Maß von A , in diesem Fall also der Flächeninhalt. Die beiden Teildreiecke lassen sich zu einem Quadrat mit Seitenlänge 1 zusammensetzen, also gilt $\lambda^2(A) = 1$ und $f_{X,Y}(x, y) = \mathbb{1}_A(x, y)$.

- b) Die Dichte der Randverteilung von X ist gegeben durch $f_X(x) = 0$ für $x \notin (0, 1)$ und

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy = \int_{-1}^1 \mathbb{1}_A(x, y) dy = \int_{-x}^x 1 dy = 2x, \quad 0 < x < 1.$$

Daraus ergibt sich für die Verteilungsfunktion von X

$$F_X(x) = \int_0^x f_X(t) dt = x^2, \quad 0 < x < 1$$

sowie $F_X(x) = 0$ für $x \leq 0$ und $F_X(x) = 1$ für $x \geq 1$.

Die Dichte der Randverteilung von Y ist gegeben durch $f_Y(y) = 0$ für $y \notin (-1, 1)$ und

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx = \int_0^1 \mathbb{1}_A(x, y) dx = \begin{cases} \int_{-y}^1 1 dx = 1 + y, & -1 < y \leq 0, \\ \int_y^1 1 dx = 1 - y, & 0 < y < 1. \end{cases}$$

- c) Es gilt

$$\mathbb{C}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3}, \\ \mathbb{E}[Y] &= \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = \int_{-1}^0 y(1+y) dy + \int_0^1 y(1-y) dy \\ &= \left[\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 \right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 \right]_0^1 = 0. \end{aligned}$$

Alternativ kann man auch argumentieren, dass die Verteilung von Y symmetrisch zu null ist und deshalb $\mathbb{E}[Y] = 0$ gelten muss. Außerdem gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[XY] &= \int_A xy \cdot f_{X,Y}(x,y) \, d(x,y) \\ &= \int_0^1 \int_{-x}^x xy \, dy \, dx = \int_0^1 x \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}(-x)^2 \right) \, dx = 0.\end{aligned}$$

Insgesamt folgt

$$\mathbb{C}(X, Y) = 0 - \frac{2}{3} \cdot 0 = 0.$$

d) Wegen $\mathbb{C}(X, Y) = 0$ sind die Zufallsvariablen unkorreliert. Andererseits gilt z. B.

$$\mathbb{P}(X \leq 0,5, Y \geq 0,5) = 0 \neq \mathbb{P}(X \leq 0,5)\mathbb{P}(Y \geq 0,5).$$

Richtig ist also

	X, Y unkorreliert	X, Y korreliert
X, Y unabhängig		
X, Y abhängig	×	

Aufgabe 7 (1+6= 7 Punkte)

Lösungsvorschlag:

a) Es gibt insgesamt $s+\vartheta$ Kugeln, wir ziehen mit zurücklegen, dabei ist die Trefferwahrscheinlichkeit $p = \frac{\vartheta}{s+\vartheta}$. Also gilt $X_1 \sim \text{Bin}(1, p)$ verteilt und somit für die Zähldichte

$$f(k, \vartheta) = \left(\frac{\vartheta}{s+\vartheta} \right)^k \left(\frac{s}{s+\vartheta} \right)^{1-k} = \frac{\vartheta^k s^{1-k}}{s+\vartheta}, \quad k = 0, 1.$$

b) Die Likelihoodfunktion zur Stichprobe $x = (x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n$ lautet

$$L_x(\vartheta) = \prod_{j=1}^n f(x_j, \vartheta) = \frac{1}{(s+\vartheta)^n} \vartheta^{\sum_{j=1}^n x_j} s^{n-\sum_{j=1}^n x_j} = \frac{1}{(s+\vartheta)^n} \vartheta^{n\bar{x}} s^{n(1-\bar{x})}.$$

Die Log-Likelihood-Funktion lautet dann

$$\ln L_x(\vartheta) = -n \ln(s+\vartheta) + n\bar{x}_n \ln(\vartheta) + n(1-\bar{x}_n) \ln s.$$

Ableiten nach ϑ und Nullsetzen der Ableitung liefert die stationären Punkte von $\ln L_x$:

$$\frac{d \ln L_x(\vartheta)}{d\vartheta} = -\frac{n}{s+\vartheta} + \frac{n\bar{x}_n}{\vartheta} \stackrel{!}{=} 0 \iff \bar{x}_n(s+\vartheta) = \vartheta.$$

Gilt $\bar{x}_n \notin \{0, 1\}$, so ergibt sich $\hat{\vartheta}_n(x) := s \frac{\bar{x}_n}{1-\bar{x}_n}$ als einziger stationärer Punkt der Log-Likelihood-Funktion, der wegen des Vorzeichenwechsels ihrer Ableitung von $+$ nach $-$ in diesem Punkt ein Maximum ist.

Randpunkte: Für $\bar{x}_n = 0$ nimmt die Likelihood-Funktion ihr Maximum für $\hat{\vartheta}_n = 0$ an. Im Fall $\bar{x}_n = 1$ gilt

$$L_x(\vartheta) = \frac{\vartheta^n}{(s+\vartheta)^n} = \left(1 - \frac{s}{s+\vartheta} \right)^n$$

und somit ist diese Funktion monoton wachsend in ϑ . Also nimmt die Likelihood-Funktion ihr Maximum für $\hat{\vartheta}_n = \infty$ an. Damit ist der Maximum-Likelihood-Schätzer wie oben angegeben.

Bemerkung: Im Allg. gilt nicht $\hat{\vartheta}_n(x) \in \mathbb{N}$. In der Praxis würde man auf die nächste ganze Zahl runden.