Winter

Einführung in die Stochastik

Dauer: 120 min. Lösung: offiziell Bestanden mit: 24 P.

Bemerkungen: dopppelseitig, handschriftlich beschriebenes DIN A4 Blatt

Aufgabe 1 (1+1+2+2+2 = 8 Punkte)

Neun Spielkarten - vier Asse, drei Könige und zwei Damen (jeweils **ununterscheidbar**) - liegen in einer rein zufälligen Anordnung verdeckt auf dem Tisch und werden nacheinander aufgedeckt.

a) Wie viele mögliche Anordnungen gibt es?

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

b) Die letzte Karte ist ein Ass.

c) Die beiden Damen liegen nebeneinander.

d) Die ersten drei aufgedeckten Karten sind gleich.

e) Alle identischen Karten liegen nebeneinander, d.h. sowohl die vier Asse als auch die drei Könige als auch die beiden Damen liegen nebeneinander.

Aufgabe 2 (2+2+2+3 = 9 Punkte)

Ein zufälliges Rechteck wird wie folgt konstruiert: Die Breite B des Rechtecks ist eine auf der Menge $\{1, \dots, 6\}$ gleichverteilte Zufallsvariable. Bei gegebener Breite $B = k$ ist die Höhe H des Rechtecks gleichverteilt auf der Menge $\{1, \dots, k\}$.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das Rechteck ein Quadrat?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Rechteck die Höhe 4 besitzt?

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(B = k \mid H = 4)$ für $k \in \{1, \dots, 6\}$.

d) Bestimmen Sie den erwarteten Flächeninhalt des Rechtecks.

Aufgabe 3 (2+2+2+3+2 = 11 Punkte)

Eine $\mathbb{N}_0$-wertige Zufallsvariable Z habe die erzeugende Funktion

$$g_Z(t) = \frac{1}{9}\left((t+1)^3 + 1\right), \quad t \in [-1, 1].$$

(a) Bestimmen Sie die Zähldichte f_Z von Z.

(b) Berechnen Sie $\mathbb{E}[Z]$ und $\mathbb{V}(Z)$.

Es sei $n \in \mathbb{N}$ fest. Weiter seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige, identisch verteilte, $\mathbb{N}_0$-wertige Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[X_1] < \infty$ und erzeugender Funktion h. Sei ferner N gleichverteilt auf der Menge $\{1, \dots, n\}$ und unabhängig von $X_1, \dots, X_n$. Schließlich sei

$$S := \sum_{i=1}^{N} X_i.$$

(c) Für $\ell = 1, \dots, n$ sei $S_\ell := \sum_{i=1}^{\ell} X_i$. Zeigen Sie, dass für die Zähldichte f_S von S gilt:

$$f_S(k) = \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} \mathbb{P}(S_\ell = k), \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

(d) Zeigen Sie, dass für die erzeugende Funktion g_S von S gilt:

$$g_S(t) = \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n}(h(t))^{\ell}, \quad |t| \leq 1.$$

(e) Seien $X_1, \ldots, X_n$ wie oben mit $X_i \sim \mathrm{Bin}(1,p)$, $p \in (0,1)$. Bestimmen Sie $\mathbb{E}[S]$.

Aufgabe 4 (2+1+2+2+3 = 10 Punkte)

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ seien die Zufallsvariablen $X_{n,1}, \ldots, X_{n,n}$, unabhängig und mit dem Parameter $\frac{n-1}{n}$ identisch Bernoulli-verteilt. Weiter sei $S_n := X_{n,1} + \ldots + X_{n,n}$, $n \in \mathbb{N}$.

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(S_3 \leq 1)$.

(b) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \mathbb{V}(S_n)$.

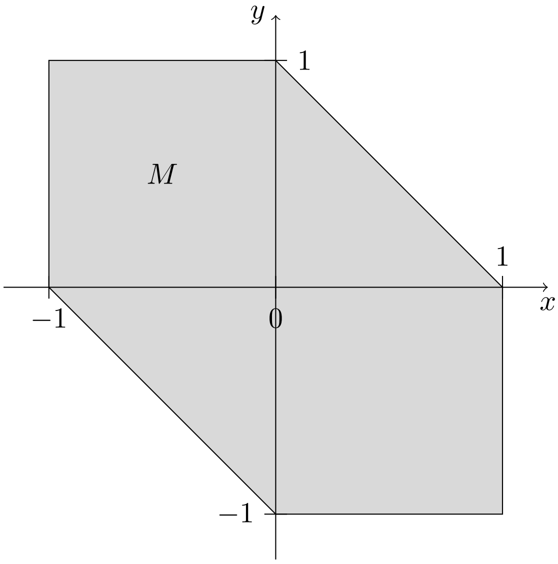
(c) Bestimmen Sie die Kovarianz $\mathbb{C}(S_n, X_{n,n})$.

(d) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n \geq n-1)$.

(e) Es sei $T_n := n - S_n$. Welche Verteilung besitzt T_n? Bestimmen Sie für $k \in \mathbb{N}_0$ den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(T_n = k)$.

Aufgabe 5 (1+2+3+2+1+2 = 11 Punkte)

Der zweidimensionale Zufallsvektor (X, Y) sei gleichverteilt auf der Menge M, die in folgendem Bild skizziert ist:



(a) Begründen Sie, dass (X, Y) die Dichte $f(x,y) = \frac{1}{3}\mathbb{1}_M(x,y)$, $x, y \in \mathbb{R}$, besitzt.

(b) Bestimmen Sie die Dichte der Randverteilung von X.

(c) Zeigen Sie, dass die Verteilungsfunktion F_X von X gegeben ist durch

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ \frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}, & x \in (-1, 0], \\ -\frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}, & x \in (0, 1), \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

(d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(Y > 2X)$.

Hinweis: Nutzen Sie die Symmetrie von M.

(e) Entscheiden Sie, ob die Zufallsvariablen X und Y unabhängig sind.

(f) Es seien X' und Y' unabhängige Zufallsvariablen mit $X' \sim X$ und $Y' \sim Y$. Geben Sie die gemeinsame Dichte $h : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ von X' und Y' an.

Aufgabe 6 (3+5+3 = 11 Punkte)

Es seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit identischer Verteilung

$$\mathbb{P}_\vartheta(X_1 = k) = \frac{1}{\vartheta + 1} \frac{\ln(\vartheta + 1)^k}{k!}, \qquad k \in \mathbb{N}_0,$$

wobei $\vartheta \in \tilde{\Theta} := [0, \infty)$ ein unbekannter Parameter sei.

(a) Zeigen Sie: $\mathbb{E}_\vartheta[X_1] = \ln(\vartheta + 1)$ und $\mathbb{E}_\vartheta\left[e^{aX_1}\right] = (\vartheta + 1)^{e^a - 1}$ für $a \in \mathbb{R}$.

(b) Der Parameter ϑ sei unbekannt. Zeigen Sie, dass der Maximum-Likelihood-Schätzer $\widehat{\vartheta}_n \in \tilde{\Theta}$ für ϑ zu jeder Stichprobe $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}_0^n$ gegeben ist durch

$$\widehat{\vartheta}_n(x) = \exp\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j\right) - 1.$$

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass die zweite Ableitung der Log-Likelihood-Funktion für alle $\vartheta \in (0, \infty)$ negativ ist.

(c) Ist der Maximum-Likelihood–Schätzer erwartungstreu?

Hinweis: Vielleicht finden Sie die Formeln aus Teil (a) hilfreich. Sie dürfen verwenden, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $e > (1 + \frac{1}{n})^n$ gilt.

Aufgabe 1 (1+1+2+2+2 = 8 Punkte)
Lösungsvorschlag:

a) Es gibt $\binom{9}{4}$ Möglichkeiten, die vier Asse auf die neun Stellen zu verteilen, und nach Verteilung der Asse noch $\binom{5}{3}$ Möglichkeiten, die drei Könige zu verteilen. Da dadurch nur noch eine Möglichkeit für die beiden Damen bleibt, existieren also $\binom{9}{4}\binom{5}{3} = 1260$ mögliche Anordnungen.

b) Die Wahrscheinlichkeit, dass die letzte Karte ein Ass ist, ist aus Symmetriegründen genau so hoch wie die Wahrscheinlichkeit, dass die erste aufgedeckte Karte ein Ass ist. Dies geschieht mit Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{9}$.

c) Decken wir nur zwei beliebige Karten auf, so ist die Wahrscheinlichkeit zwei Damen zu erhalten $\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8}$. Da es 8 Möglichkeiten gibt, zwei benachbarte Karten zu wählen, ergibt sich die Wahrscheinlichkeit $8 \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{2}{9}$.

d) Die Wahrscheinlichkeit, dass die ersten drei Karten genau die drei Könige sind, beträgt $\frac{1}{\binom{9}{3}} = \frac{1}{84}$. Dahingegen ist die Wahrscheinlichkeit für drei Asse als erste drei Karten $\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{1}{21}$. Insgesamt ergibt sich für die gewünschte Wahrscheinlichkeit der Wert

$$\frac{1}{84} + \frac{1}{21} = \frac{5}{84}.$$

e) Es gibt lediglich 6 Anordnungen mit der gewünschten Eigenschaft, da eine solche Anordnung dadurch charakterisiert ist, in welcher Reihenfolge die drei Bildwerte auftauchen (wofür es $3! = 6$ Möglichkeiten gibt). Nach Teil a) ist die gewünschte Wahrscheinlichkeit also gegeben durch

$$\frac{6}{1260} = \frac{1}{210}.$$

Aufgabe 2 (2+2+2+3 = 9 Punkte)
Lösungsvorschlag:

a) Das Rechteck ist genau dann ein Quadrat, wenn $H = B$ gilt. Deswegen folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(H = B) &= \sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}(H = k, B = k) \\
&= \sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}(B = k)\mathbb{P}(H = k | B = k) = \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{k} \\
&= \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) \\
&= \frac{1}{6} \cdot \frac{147}{60} = \frac{49}{120}.
\end{aligned}$$

b) Mit der Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(H = 4) &= \sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}(B = k)\,\mathbb{P}(H = 4 \mid B = k) \\
&= \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{k} \cdot \mathbb{1}\{k \geq 4\} \\
&= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) \\
&= \frac{1}{6} \cdot \frac{15 + 12 + 10}{60} = \frac{37}{360}.
\end{aligned}$$

c) Mit der Formel von Bayes und Teil b) folgt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B=k \mid H=4) &= \frac{\mathbb{P}(B=k)\,\mathbb{P}(H=4 \mid B=k)}{\mathbb{P}(H=4)}\\ &= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{k}\cdot \mathbb{1}\{k\geq 4\}\cdot\frac{360}{37}\\ &= \begin{cases}\frac{60}{37k}, & k\geq 4,\\ 0, & k\leq 3.\end{cases}\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (2+2+2+3+2 = 11 Punkte)

Lösungsvorschlag:

(a) Ausmultiplizieren ergibt

$$g_X(t) = \frac{2}{9}+\frac{1}{3}\cdot t+\frac{1}{3}\cdot t^2+\frac{1}{9}\cdot t^3, \quad t\in[-1,1].$$

Also ist

$$\mathbb{P}(X=0)=\frac{2}{9}, \quad \mathbb{P}(X=1)=\mathbb{P}(X=2)=\frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(X=3)=\frac{1}{9},$$

und $\mathbb{P}(X=k)=0$ für $k\geq 4$. $\boxed{\mathbf{2P}}$

(b) Es gilt nach Vorlesung

$$\mathbb{E}[X] = g_X'(1-) = \frac{3}{9}(t+1)^2|_{t=1} = \frac{4}{3}. \ \boxed{\mathbf{1P}}$$

Ferner ist

$$\mathbb{E}[X(X-1)] = g_X''(1-) = \frac{2}{3}(t+1)|_{t=1} = \frac{4}{3}.$$

Es folgt

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[X(X-1)]+\mathbb{E}[X]-\mathbb{E}[X]^2 = \frac{4}{3}+\frac{4}{3}-\frac{4^2}{3^2} = \frac{1}{9}(4\cdot 3+4\cdot 3-4^2) = \frac{8}{9}. \ \boxed{\mathbf{1P}}$$

Alternativ kann $\mathbb{E}[X]$ und $\mathbb{E}[X^2]$ direkt über die Zähldichte bestimmt werden. Man erhält dabei $\mathbb{E}(X^2)=\frac{8}{3}$.

(c) Nach Definition von f_S gilt für $k\in\mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}f_S(k) = \mathbb{P}(S=k) &= \sum_{\ell=1}^n \mathbb{P}(S=k, N=\ell) = \sum_{\ell=1}^n \mathbb{P}(S=k|N=\ell)\mathbb{P}(N=\ell)\\ &= \sum_{\ell=1}^n \mathbb{P}(S_\ell=k)\mathbb{P}(N=\ell) = \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^n \mathbb{P}(S_\ell=k),\end{aligned}$$

wie behauptet. Hierbei wurde für $\ell\in\{1,\dots,n\}$ die Beziehung

$$\mathbb{P}(S=k|N=\ell) = \mathbb{P}(S_\ell=k|N=\ell) = \mathbb{P}(S_\ell=k)$$

genutzt, wobei in die zweite Gleichheit die Unabhängigkeit von S_k und N (nach Blockungslemma) eingegangen ist.

(d) Nach Definition der erzeugenden Funktion und unter Verwendung von Teil (c) gilt

$$\begin{aligned}g_S(t) = \mathbb{E}\left[t^S\right] &= \sum_{k=0}^\infty t^k\cdot f_S(k) = \sum_{k=0}^\infty t^k\cdot\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^n \mathbb{P}(S_\ell=k)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^n\sum_{k=0}^\infty t^k\cdot\mathbb{P}(S_\ell=k) = \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^n g_{S_\ell}(t),\end{aligned}$$

wobei g_{S_ℓ} die erzeugende Funktion von S_ℓ bezeichnet. Da die Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_\ell$ unabhängig und identisch verteilt sind, gilt nun $g_{S_\ell} = g_{X_1} \cdot \ldots \cdot g_{X_\ell} = h^\ell$ und damit ist die Behauptung gezeigt.

(e) Zunächst besitzen die Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_N$ die erzeugende Funktion $h(t) = pt + (1-p)$, $|t| \le 1$. Nach Teil (d) und einem Satz aus Vorlesung gilt weiter mit der Kettenregel

$$\mathbb{E}[S] = g_S'(1-) = \lim_{t \nearrow 1} \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n} \ell \cdot (h(t))^{\ell-1}\, h'(t). \quad \boxed{\textbf{2P}}$$

Wegen $h'(t) = p$ und $h(t) \to 1$ für $t \to 1$ folgt somit

$$\mathbb{E}[S] = \frac{p}{n} \sum_{\ell=1}^{n} \ell = p \cdot \frac{n+1}{2}.$$

Alternativ kann $\mathbb{E}[S]$ über die Zähldichte von S aus Teil (c) bestimmt werden. Dafür ist es hilfreich einzusehen, dass

$$\mathbb{E}[S] = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot f_S(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n} \mathbb{P}(S_\ell = k) = \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \mathbb{P}(S_\ell = k) = \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n} \mathbb{E}[S_\ell]$$

gilt. Oder man nutzt direkt die (in der Übung bewiesene) Waldsche Gleichung.

Aufgabe 4 (2+1+2+2+3 = 10 Punkte)
Lösungsvorschlag:

(a) Es gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(S_n \le 1) = \mathbb{P}(S_n = 0) + \mathbb{P}(S_n = 1) = \left(\frac{1}{n}\right)^n + n\frac{n-1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{n}\right)^n (n^2 - n + 1).$$

Für $n = 3$ ergibt sich damit $\mathbb{P}(S_3 \le 1) = 3^{-3}(3^2 - 3 + 1) = \frac{7}{27}$.

(b) Es gilt offenbar $S_n \sim \mathrm{Bin}(n, \frac{n-1}{n})$ und somit

$$\mathbb{V}(S_n) = n \cdot \frac{n-1}{n}\frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$, also $\lim_{n\to\infty} \mathbb{V}(S_n) = 1$.

(c) Mit der Bilinearität der Kovarianz und der Unabhängigkeit der Variablen $X_{n,1}, \dots, X_{n,n}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathbb{C}(S_n, X_{n,n}) &= \mathbb{C}\left(\sum_{j=1}^{n} X_{n,j}, X_{n,n}\right) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{C}(X_{n,j}, X_{n,n}) = \mathbb{C}(X_{n,n}, X_{n,n}) \\ &= \mathbb{V}(X_{n,n}) = \frac{n-1}{n^2}.\end{aligned}$$

(d) Analog zu Teil (a) gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_n \ge n-1) &= \mathbb{P}(S_n = n) + \mathbb{P}(S_n = n-1) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n + n \cdot \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} \\ &= \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{n}{n-1}\right) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{n}{n-1}\right)\end{aligned}$$

und damit $\mathbb{P}(S_n \ge n-1) \to 2e^{-1}$ für $n \to \infty$.

Aufgabe 5 (1+2+3+2+1+2 = 11 Punkte)

Lösungsvorschlag:

(a) Die Menge M hat den Flächeninhalt 3.

(b) Für die Dichte der Randverteilung f_X von X gilt $f_X(x) = 0$ falls $x \notin [-1,1]$ sowie

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} \tfrac{1}{3}\mathbb{1}_M(x,y)dy = \begin{cases} \frac{1}{3}\int_{-1}^{1-x} dy = \frac{1}{3}(2-x), & \text{falls } x \in [0,1], \\ \frac{1}{3}\int_{-1-x}^{1} dy = \frac{1}{3}(2+x), & \text{falls } x \in [-1,0), \end{cases}$$

also insgesamt $f_X(x) = \mathbb{1}_{[-1,1]}(x) \cdot \frac{1}{3}(2-|x|)$, $x \in \mathbb{R}$.

(c) Für die Verteilungsfunktion F_X gilt $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$ und damit zunächst $F_X(x) = 0$ für $x \leq -1$. Weiter ergibt sich für $x \in (-1,0]$

$$F_x(x) = \int_{-1}^{x} \tfrac{1}{3}(2+t)\,dt = \tfrac{1}{3}\left[2t + \tfrac{1}{2}t^2\right]_{-1}^{x} = \tfrac{1}{3}((2x+\tfrac{1}{2}x^2) - (-2+\tfrac{1}{2})) = \tfrac{1}{6}x^2 + \tfrac{2}{3}x + \tfrac{1}{2}.$$

Insbesondere gilt $F_X(0) = \frac{1}{2}$. Wegen der Symmetrie $f_X(t) = f_X(-t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, gilt $F_X(x) = 1 - F_X(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und damit folgen die restlichen Fälle, also $F_X(x) = 1$ für $x \geq 1$ sowie

$$F_X(x) = 1 - (\tfrac{1}{6}(-x)^2 + \tfrac{2}{3}(-x) + \tfrac{1}{2}) = -\tfrac{1}{6}x^2 + \tfrac{2}{3}x + \tfrac{1}{2} \qquad \text{für } x \in (0,1].$$

(d) Es gilt

$$\mathbb{P}(X > 2Y) = \mathbb{P}(Y < \tfrac{1}{2}X) = \mathbb{P}(\{(x,y) \in M : y < \tfrac{1}{2}x\}) = \tfrac{1}{3}\lambda_2(\{(x,y) \in M : y < \tfrac{1}{2}x\}) = \tfrac{1}{2},$$

da die Gerade $y = \frac{1}{2}x$ die Menge M in zwei kongruente (also inbesondere flächengleiche) Teilmengen teilt.

(e) Es gilt aus Symmetriegründen offenbar $\mathbb{P}(X \geq 0) = \mathbb{P}(Y \geq 0) = \frac{1}{2}$, aber

$$\mathbb{P}(X \geq 0, Y \geq 0) = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{4} = \mathbb{P}(X \geq 0) \cdot \mathbb{P}(Y \geq 0).$$

Deshalb können X und Y nicht stochastisch unabhängig sein.

(f) Aus Symmetriegründen besitzen X und Y dieselbe Verteilung und damit auch X' und Y'. Die Dichte von X wurde in Teil (b) bereits bestimmt. Also gilt

$$f_{X'}(t) = f_{Y'}(t) = \mathbb{1}_{[-1,1]}(t)\tfrac{1}{3}(2-|t|), \qquad \text{für } t \in \mathbb{R}.$$

Wegen der Unabhängigkeit von X' und Y' folgt für die gemeinsame Dichte

$$\begin{aligned} h(x,y) &= f_{X'}(x) \cdot f_{Y'}(y) = \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)\tfrac{1}{3}(2-|x|) \cdot \mathbb{1}_{[-1,1]}(y)\tfrac{1}{3}(2-|y|) \\ &= \mathbb{1}_{[-1,1]^2}(x,y)\tfrac{1}{9}(2-|x|)(2-|y|). \end{aligned}$$

Aufgabe 6 (3+5+3 = 11 Punkte)

Lösungsvorschlag:

(a) Es gilt

$$\mathbb{E}_\vartheta[X_1] = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{1}{\vartheta+1}\frac{\ln(\vartheta+1)^k}{k!} = \frac{1}{\vartheta+1}\ln(\vartheta+1)\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln(\vartheta+1)^{k-1}}{(k-1)!}}_{=\exp(\ln(\vartheta+1))=\vartheta+1} = \ln(\vartheta+1).$$

Alternativ kann auch argumentiert werden, dass es sich bei der gegebenen Verteilung um eine Poissonverteilung mit Parameter $\ln(\vartheta+1)$ handelt und der Erwartungswert der Poissonverteilung dem Parameter entspricht. Außerdem gilt

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_\vartheta\left[e^{aX_1}\right] &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{ak} \frac{1}{\vartheta+1} \frac{\ln(\vartheta+1)^k}{k!} \\
&= \frac{1}{\vartheta+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^a \ln(\vartheta+1))^k}{k!} \\
&= \frac{1}{\vartheta+1} \exp(e^a \ln(\vartheta+1)) \\
&= (\vartheta+1)^{e^a-1}.
\end{aligned}
$$

(b) Sei $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}_0^n$ eine Stichprobe. Die Likelihood-Funktion ist dann

$$
\begin{aligned}
L_x(\vartheta) = \mathbb{P}_\vartheta(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) &\overset{\text{Unabh.}}{=} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}_\vartheta(X_i = x_i) \\
= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\vartheta+1} \frac{\ln(\vartheta+1)^{x_i}}{x_i!} &= \frac{1}{(\vartheta+1)^n} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{n} \ln(\vartheta+1)^{x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}.
\end{aligned}
$$

Die Log-Likelihood-Funktion ist folglich

$$
\ln(L_x(\vartheta)) = -n \ln(\vartheta+1) + \sum_{i=1}^{n} x_i \ln(\ln(\vartheta+1)) - \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i!).
$$

Differenzieren nach ϑ und Bestimmen der Nullstelle ergibt

$$
\begin{aligned}
\ln(L_x(\vartheta))' = -\frac{n}{\vartheta+1} + \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{1}{\ln(\vartheta+1)} \frac{1}{\vartheta+1} &\overset{!}{=} 0 \\
\iff -n + \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{1}{\ln(\vartheta+1)} &= 0 \\
\iff \ln(\vartheta+1) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \\
\iff \vartheta &= \exp\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i\right) - 1.
\end{aligned}
$$

Nach dem Hinweis handelt es sich hierbei um ein Maximum, sofern $\bar{x} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \neq 0$ gilt. (Im Fall $\bar{x} = 0$ ergibt sich $\vartheta = 0$. Da sich die Log-Likelihood-Funktion in diesem Fall zu $\ln(L_x(\vartheta)) = -n \ln(\vartheta+1)$ vereinfacht und streng monoton fallend in ϑ auf ganz $\tilde{\Theta}$ ist, handelt es sich in diesem Fall bei 0 ebenfalls um ein Maximum.) Insgesamt ergibt sich wie behauptet der Maximum-Likelihood-Schätzer

$$
\widehat{\vartheta}_n(x) = \exp\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j\right) - 1.
$$

(c) Der Schätzer ist nicht erwartungstreu, denn es gilt

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_\vartheta\left[\widehat{\vartheta}_n(X)\right] &= \mathbb{E}_\vartheta\left[e^{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j}\right] - 1 \\
&= \mathbb{E}_\vartheta\left[\prod_{i=1}^{n} e^{\frac{1}{n} X_i}\right] - 1 \\
&\overset{\text{Unabh.}}{=} \left(\prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}_\vartheta\left[e^{\frac{1}{n} X_i}\right]\right) - 1 \\
&\overset{(a)}{=} \left(\prod_{i=1}^{n} (\vartheta+1)^{\sqrt[n]{e}-1}\right) - 1 \\
&= (\vartheta+1)^{n(\sqrt[n]{e}-1)} - 1 \\
&> \vartheta + 1 - 1 = \vartheta.
\end{aligned}
$$