Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Stochastik

Einführung in die Stochastik (WS2024/25)
PD Dr. Steffen Winter
Dr. Tamara Göll, Dr. Dominik Pabst

Lösungen zu Tutoriumsblatt 1

Aufgabe T1 (Ereignisse formulieren)

Es seien A, B, C, D Ereignisse in einem Grundraum Ω. Wie lauten die folgenden Ereignisse in Mengenschreibweise?

(a) Es tritt das Ereignis A, aber nicht das Ereignis B ein.

(b) Es tritt Ereignis A oder Ereignis C ein.

(c) Von den Ereignissen B, D tritt genau ein Ereignis ein.

(d) Unter den vier Ereignissen tritt nur das Ereignis C ein.

(e) Es treten genau zwei der vier Ereignisse ein.

(f) Es treten mindestens drei der vier Ereignisse ein.

(g) Es tritt höchstens eines der vier Ereignisse ein.

Lösungsvorschlag:

(a) $A \cap B^c$

(b) $A \cup C$

(c) $(B \setminus D) \cup (D \setminus B)$

(d) $A^c \cap B^c \cap C \cap D^c \;=\; C \cap (A \cup B \cup D)^c$

(e) $(A \cap B \cap C^c \cap D^c) \,\cup\, (A \cap B^c \cap C \cap D^c) \,\cup\, (A \cap B^c \cap C^c \cap D) \,\cup\, (A^c \cap B \cap C \cap D^c) \,\cup\, (A^c \cap B \cap C^c \cap D) \,\cup\, (A^c \cap B^c \cap C \cap D)$

(f) $(A \cap B \cap C \cap D^c) \,\cup\, (A \cap B \cap C^c \cap D) \,\cup\, (A \cap B^c \cap C \cap D) \,\cup\, (A^c \cap B \cap C \cap D) \,\cup\, (A \cap B \cap C \cap D)$

(g) $(A^c \cap B^c \cap C^c \cap D^c) \cup (A \cap B^c \cap C^c \cap D^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c \cap D^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C \cap D^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C^c \cap D)$

Aufgabe T2 (Wahrscheinlichkeiten ausknobeln)

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit von $A \cup B \cup C$ für drei Ereignisse A, B, C mit

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= 1/4, & \mathbb{P}(B^c) &= 2/3, & \mathbb{P}(C) &= 1/2, \\ \mathbb{P}(A^c \cap B) &= 1/4, & \mathbb{P}(B^c \cup C^c) &= 5/6, & \mathbb{P}(A \cap C) &= 0. \end{aligned}$$

Lösungsvorschlag:
Es gilt

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)\,.$$

Für die einzelnen Summanden in dieser Formel gilt:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \frac{1}{4}\,, \text{ nach Aufgabenstellung,}\\
\mathbb{P}(B) &= 1-\mathbb{P}(B^c) \;=\; 1-\frac{2}{3} \;=\; \frac{1}{3}\,,\\
\mathbb{P}(C) &= \frac{1}{2}\,, \text{ nach Aufgabenstellung,}\\
\mathbb{P}(A\cap B) &= \mathbb{P}((A\cap B)\cup(B\cap B^c)) = \mathbb{P}(B\cap(A\cup B^c)) = \mathbb{P}(B\setminus(A^c\cap B)) \;=\; \mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A^c\cap B)\\
&= \frac{1}{3}-\frac{1}{4} \;=\; \frac{4}{12}-\frac{3}{12} \;=\; \frac{1}{12}\,,\\
\mathbb{P}(A\cap C) &= 0\,, \text{ nach Aufgabenstellung,}\\
\mathbb{P}(B\cap C) &= 1-\mathbb{P}((B\cap C)^c) \;=\; 1-\mathbb{P}(B^c\cup C^c) \;=\; 1-\frac{5}{6}\\
&= \frac{1}{6}\,, \text{ nach den de Morganschen Regeln,}\\
\mathbb{P}(A\cap B\cap C) &\leqslant \mathbb{P}(A\cap C) \;=\; 0\,.
\end{aligned}
$$

Also folgt

$$
\mathbb{P}(A\cup B\cup C) = \frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{12}-0-\frac{1}{6}+0 = \frac{3}{12}+\frac{4}{12}+\frac{6}{12}-\frac{1}{12}-\frac{2}{12} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}\,.
$$

Aufgabe T3 (Wahrscheinlichkeiten abschätzen)

Es seien $(\Omega, \mathbb{P})$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \subseteq \Omega$ zwei Ereignisse mit $\mathbb{P}(A) = 3/4$ und $\mathbb{P}(B) = 3/8$. Zeigen Sie:

(a) $3/4 \leqslant \mathbb{P}(A\cup B)$,

(b) $1/8 \leqslant \mathbb{P}(A\cap B) \leqslant 3/8$.

Lösungsvorschlag:

(a) Aus $A \subseteq A\cup B$ und $B \subseteq A\cup B$ folgen $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(A\cup B)$ und $\mathbb{P}(B) \leqslant \mathbb{P}(A\cup B)$. Daher gilt

$$\mathbb{P}(A\cup B) \geqslant \max\{\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)\} = 3/4.$$

(b) Aus $A \supseteq A\cap B$ und $B \supseteq A\cap B$ folgen $\mathbb{P}(A) \geqslant \mathbb{P}(A\cap B)$ und $\mathbb{P}(B) \geqslant \mathbb{P}(A\cap B)$. Daher gilt

$$\mathbb{P}(A\cap B) \leqslant \min\{\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)\} = 3/8.$$

Wegen $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cup B)$ und $\mathbb{P}(A\cup B) \leqslant 1$ erhalten wir die Ungleichung $\mathbb{P}(A\cap B) \geqslant \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-1$. Es ergibt sich

$$\mathbb{P}(A\cap B) \geqslant \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-1 = 1/8.$$

Aufgabe T4 (Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsmaßen)

Zeigen Sie für zwei Ereignisse A, B in einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$:

(a) $\mathbb{P}(A^c\cap B^c)+\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(A^c\cap B) = 1$,

(b) $\mathbb{P}(A\cap B)-\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A^c\cap B^c)-\mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B^c)$.

Lösungsvorschlag:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A^c \cap B^c) + \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c \cap B) &= 1 - \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \\ &= 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \\ &= 1.\end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) &= 1 - \mathbb{P}(A^c \cup B^c) - (1 - \mathbb{P}(A^c))(1 - \mathbb{P}(B^c)) \\ &= 1 - \mathbb{P}(A^c) - \mathbb{P}(B^c) + \mathbb{P}(A^c \cap B^c) - (1 - \mathbb{P}(B^c) - \mathbb{P}(A^c) + \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B^c)) \\ &= \mathbb{P}(A^c \cap B^c) - \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B^c).\end{aligned}$$

Aufgabe T5 (Wahrscheinlichkeitsmaße)

(a) (Laplace-Wahrscheinlichkeitsmaß) Es sei Ω eine endliche Menge und $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ die Abbildung definiert durch

$$\mathbb{P}(A) := \frac{|A|}{|\Omega|}, \qquad A \in \mathcal{P}(\Omega).$$

Zeigen Sie, dass es sich bei $\mathbb{P}$ um ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{P}(\Omega)$ handelt.

(b) (Zähldichte) Es sei Ω endlich oder abzählbar und $p : \Omega \to [0,1]$ eine Abbildung mit $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$. Zeigen Sie, dass durch

$$\mathbb{P}(A) := \sum_{\omega \in A} p(\omega), \qquad A \in \mathcal{P}(\Omega),$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{P}(\Omega)$ definiert wird.

Lösungsvorschlag:

Wir müssen jeweils zeigen, dass $\mathbb{P}$ nur Werte in $[0,1]$ annimmt, $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ gilt und $\mathbb{P}$ σ-additiv ist.

(a) Offensichtlich gilt $\mathbb{P}(A) \geqslant 0$ für alle $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. Zudem gilt wegen $A \subseteq \Omega$ auch $|A| \leqslant |\Omega|$ und somit $\mathbb{P}(A) \leqslant 1$ für alle $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. Weiter gilt nach Definition von $\mathbb{P}$

$$\mathbb{P}(\Omega) = \frac{|\Omega|}{|\Omega|} = 1.$$

Es bleibt also die σ-Additivität zu zeigen. Dazu seien $A_1, A_2, \ldots \subseteq \Omega$ paarweise disjunkt. (Wegen der Endlichkeit von Ω können nur endliche viele dieser Mengen nichtleer sein).

$$\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \frac{|\sum_{k=1}^{\infty} A_k|}{|\Omega|} \overset{(*)}{=} \frac{\sum_{k=1}^{\infty} |A_k|}{|\Omega|} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|A_k|}{|\Omega|} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k).$$

Beachte, dass $(*)$ nur erfüllt ist, da die A_k, $k = 1, 2, \ldots$, paarweise disjunkt sind.

(b) Da p nur Werte in $[0,1]$ annimmt, gilt offensichtlich $\mathbb{P}(A) \geqslant 0$ für alle $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. Zudem gilt für $A \in \mathcal{P}(\Omega)$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega) \leqslant \sum_{\omega \in A} p(\omega) + \sum_{\omega \in A^c} p(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1.$$

Weiter gilt direkt nach Definition von $\mathbb{P}$ auch $\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$. Es bleibt also die σ-Additivität zu zeigen. Dazu seien $A_1, A_2, \ldots \subseteq \Omega$ paarweise disjunkt. Dann gilt

$$\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{\omega \in \sum_{k=1}^{\infty} A_k} p(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\omega \in A_k} p(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k).$$

Aufgabe T6 (Modellierung von Zufallsexperimenten)

Geben Sie für folgende Zufallsexperimente geeignete Ergebnismengen an:

(a) Aus einer Schachtel, welche n von 1 bis n nummerierte Kugeln enthält, werden $k \leqslant n$ Kugeln mit einem Griff gezogen.

(b) Zwei nicht unterscheidbare Würfel werden dreimal hintereinander jeweils gleichzeitig geworfen.

(c) Ziehung der Lottozahlen mit Zusatzzahl und Superzahl.
Bemerkung: Beim Lotto werden 6 Zahlen aus den Zahlen 1 bis 49 gezogen. Dabei soll die Reihenfolge, in der die Zahlen gezogen werden, keine Rolle spielen. Danach wird aus den verbleibenden 43 Zahlen eine weitere Zahl, die sogenannte Zusatzzahl, gezogen. Zusätzlich wird unabhängig davon noch die sogenannte Superzahl gezogen, bei der es sich um eine Zahl zwischen 0 und 9 handelt.

(d) Verteilung von 32 Spielkarten an 4 Spieler, wobei jeder 8 Karten erhält.

Lösungsvorschlag:

Zunächst wollen wir bemerken, dass es mehrere unterschiedliche Modellierungsansätze und dementsprechend auch andere richtige Lösungen, als die hier vorgestellten, gibt.

(a) Den Inhalt der Schachtel modellieren wir als $S = \{1, \dots, n\}$. Es werden nun k Kugeln mit einem Griff daraus gezogen, d.h. die Reihenfolge der Kugeln spielt hier keine Rolle. Wir erhalten also eine k-elementige Teilmenge von S. Deshalb wählen wir die Ergebnismenge als

$$\Omega = \left\{ K \subseteq S \,\middle|\, k = |K| \right\}.$$

(b) Jeder Würfel zeigt eine Zahl aus $\{1, \dots, 6\}$. Da die beiden Würfel ununterscheidbar sind und gleichzeitig geworfen werden, lässt sich jeder der drei Doppelwürfe als Element von

$$W := \left\{ (w_1, w_2) \,\middle|\, 1 \leqslant w_1 \leqslant w_2 \leqslant 6 \right\}$$

auffassen. Dreimaliges Wiederholen ergibt

$$\Omega = W^3.$$

(c) Beim deutschen Lotto werden aus 49 durchnummerierten Kugeln 6 ohne Zurücklegen entnommen. Die Zusatzzahl wird dann als siebte aus den verbleibenden gezogen. Die Superzahl ist eine unabhängig davon gezogene Zahl zwischen 0 und 9. Es ergibt sich

$$\Omega = \left\{ (\ell_1, \dots, \ell_6, z, s) \,\middle|\, 1 \leqslant \ell_1 < \dots < \ell_6 \leqslant 49, z \in \{1, \dots, 49\}, z \neq \ell_i \text{ für alle } i \in \{1, \dots, 6\}, s \in \{0, \dots, 9\} \right\}.$$

(d) Üblicherweise würde man Spielkarten nicht durchnummerieren, sondern, im Falle von 32 Karten, ein Skatblatt annehmen. Jede Karte besitzt hier eine Farbe (Karo, Herz, Pik oder Kreuz) und einen Typ (7, 8, 9, Bube, Dame, König, 10, Ass). Notieren lässt sie sich also als Element der Menge

$$K := \{\text{Karo}, \text{Herz}, \text{Pik}, \text{Kreuz}\} \times \{7, 8, 9, \text{Bube}, \text{Dame}, \text{König}, 10, \text{Ass}\}.$$

Ein Spieler erhält 8 verschiedene Karten, also ein Element der Menge

$$\left\{ S \subseteq K \,\middle|\, 8 = |S| \right\}.$$

Um die Kartenverteilung für alle Spieler gleichzeitig zu modellieren, wählen wir

$$\Omega = \left\{ (S_1, S_2, S_3, S_4) \,\middle|\, S_i \subset K,\ |S_i| = 8,\ S_i \cap S_j = \emptyset,\ i \neq j \right\}.$$