

## Lösungen zu Tutoriumsblatt 2

### Aufgabe T1 (Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsmaßen)

Es sei  $(\Omega, \mathbb{P})$  ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum. Zeigen Sie die nachfolgenden Eigenschaften.

(a) Für Ereignisse  $A_1, \dots, A_n \subseteq \Omega$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , gilt

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) \geq \mathbb{P}(A_1) + \dots + \mathbb{P}(A_n) - (n-1).$$

(b) Für zwei Ereignisse  $A, B \subseteq \Omega$  gilt

$$\mathbb{P}(A \triangle B) = 0 \implies \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B).$$

Dabei ist die symmetrische Differenz  $A \triangle B$  definiert durch

$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

(c) Gilt in (b) auch die Umkehrung?

### Lösung

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) &= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^n A_j^c\right) \geq 1 - \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(A_j^c) \\ &= 1 - n + \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(A_j) = \mathbb{P}(A_1) + \dots + \mathbb{P}(A_n) - (n-1). \end{aligned}$$

Alternativ lässt sich die Aussage auch durch Induktion über  $n \in \mathbb{N}$  nachweisen. Gilt die Aussage für ein  $n \in \mathbb{N}$ , so folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n \cap A_{n+1}) &= \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}((A_1 \cap \dots \cap A_n) \cup A_{n+1}) \\ &\geq \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - 1 \\ &\geq \mathbb{P}(A_1) + \dots + \mathbb{P}(A_n) - (n-1) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - 1 \\ &= \mathbb{P}(A_1) + \dots + \mathbb{P}(A_{n+1}) - n, \end{aligned}$$

wobei für die zweite Ungleichung die Induktionsvoraussetzung verwendet wurde.

(b) Aus

$$0 = \mathbb{P}(A \triangle B) = \mathbb{P}(A \setminus B + B \setminus A) = \underbrace{\mathbb{P}(A \setminus B)}_{\geq 0} + \underbrace{\mathbb{P}(B \setminus A)}_{\geq 0}$$

folgt  $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(B \setminus A) = 0$  und somit

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B).$$

(c) Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht. Wähle dazu

$$\Omega = \{1, 2\}, \quad A = \{1\}, \quad B = \{2\},$$

mit der Gleichverteilung  $\mathbb{P}$  auf  $\Omega$ . Dann gilt  $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$ , aber  $\mathbb{P}(A \triangle B) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$ .

### Aufgabe T2 (Zähldichten)

Es seien  $\Omega = \mathbb{N}_0$ ,  $p \in (0, 1)$  und  $(p_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  wie folgt festgelegt:

(a)  $p_k := \frac{1}{(k+1)(k+2)}$ .

(b)  $p_k := (1-p)p^k$ .

(c)  $p_k := e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$  für  $\lambda > 0$ .

(d)  $p_k := \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$  für  $k \in \{0, \dots, n\}$  und  $p_k := 0$  für  $k \geq n+1$ .

Zeigen Sie, dass dann jeweils durch  $p(k) := p_k$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ , eine Zähldichte auf  $\mathbb{N}_0$  festgelegt ist.

### Lösungsvorschlag:

Wir müssen zeigen, dass  $p$  jeweils die Eigenschaften aus Satz 3.7 erfüllt, also nur nicht-negative Werte annimmt und

$$\sum_{k \in \mathbb{N}_0} p(k) = 1$$

erfüllt. Dass  $p_k \geq 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}_0$  in (a)-(d) gilt, ist offensichtlich und wir müssen nur die zweite Eigenschaft nachweisen.

(a) Wir beginnen mit einer Partialbruchzerlegung. Mit dem Ansatz

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{A}{k+1} + \frac{B}{k+2}$$

erhalten wir die Gleichung

$$1 = (A+B) \cdot k + 2A + B.$$

Da obige Gleichung für jedes  $k \in \mathbb{N}_0$  gelten muss, ergibt ein Koeffizientenvergleich, dass  $A$  und  $B$  das folgende Gleichungssystem lösen müssen

$$A + B = 0, \quad 2A + B = 1.$$

Dieses hat die eindeutige Lösung  $A = 1$ ,  $B = -1$ . Für den Reihenwert betrachten wir zunächst die  $N$ -te Partialsumme für  $N \in \mathbb{N}$ . Es gilt (Teleskopsumme)

$$\sum_{k=0}^N \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=0}^N \frac{1}{k+1} - \sum_{k=0}^N \frac{1}{k+2} = 1 - \frac{1}{N+2}.$$

Damit ergibt sich

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{N+2} \right) = 1.$$

(b) Hier können wir den Reihenwert direkt unter Verwendung der Formel für die geometrische Reihe berechnen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1-p)p^k = (1-p) \sum_{k=0}^{\infty} p^k = (1-p) \cdot \frac{1}{1-p} = 1.$$

(c) Mithilfe der Potenzreihendarstellung der Exponentialfunktion erhalten wir

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}}_{=e^{\lambda}} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1.$$

(d) Da  $p_k = 0$  für  $k \geq n + 1$  gilt, wird die Reihe zu einer endlichen Summe und wir können den binomischen Lehrsatz verwenden:

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p + 1 - p)^n = 1^n = 1.$$

### Aufgabe T3 (Kombinatorik)

Gegeben seien die 5 Buchstaben  $\{A, B, M, N, S\}$ . Ein Wort mit  $k$  Buchstaben ist ein  $k$ -Tupel  $(a_1, \dots, a_k)$  mit  $a_i \in \{A, B, M, N, S\}$  für  $i = 1, \dots, k$ .

- Wie viele verschiedene dreibuchstabile Wörter lassen sich aus diesen 5 Buchstaben bilden?
- Wie viele verschiedene dreibuchstabile Wörter lassen sich aus diesen 5 Buchstaben bilden, wenn kein Buchstabe mehrfach auftreten darf?
- Wie viele neue Wörter lassen sich durch Umstellen der Buchstaben aus dem Wort „ANANAS“ gewinnen?

### Lösungsvorschlag:

- $|\text{Per}_3^5(\text{mW})| = 5^3 = 125$ .
- $|\text{Per}_3^5(\text{oW})| = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ .
- Betrachte die unterscheidbaren Buchstaben  $\{A_1, N_1, A_2, N_2, A_3, S\}$  statt den Buchstaben  $\{A, N, S\}$ . Durch Umstellen lassen sich hiervon  $6!$  ( $=|\text{Per}_6^6(\text{oW})|$ ) verschiedene Buchstabenkombinationen bilden. Permutiert man in jeder solchen Buchstabenkombination die A's (3! Möglichkeiten) oder die N's (2! Möglichkeiten), so erhält man stets dasselbe Wort. Folglich gibt es

$$\frac{6!}{3!2!} - 1 = 59$$

neue Wörter.

Alternativer Lösungsweg: Wir betrachten nacheinander die Positionierung der Buchstaben A, N und S. Der Buchstabe A muss auf insgesamt drei der möglichen sechs „Plätze“ platziert werden. Dafür gibt es  $\binom{6}{3}$  Möglichkeiten. Anschließend bleiben drei Plätze übrig, wobei zwei davon mit einem N bestückt werden müssen. Dafür gibt es  $\binom{3}{2}$  Möglichkeiten. Für den letzten Buchstaben S gibt es nur noch eine Möglichkeit. Insgesamt ergibt das (abzüglich dem ursprünglichen Wort „ANANAS“)

$$\binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} \cdot 1 - 1 = 60 - 1 = 59$$

Möglichkeiten.

### Aufgabe T4 (Skatspiel)

Ein gut gemischtes Skatspiel (32 Karten, davon 4 Buben) wird an drei Spieler verteilt, wobei „zwei Karten in den Skat kommen“ (d.h. jeder Spieler erhält genau zehn Karten, die verbleibenden zwei Karten werden zur Seite gelegt).

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass
  - ein beliebiger Spieler alle Buben erhält?
  - jeder Spieler genau einen Buben erhält?
- Sie sind einer der Spieler und haben genau zwei Buben erhalten. (Sie kennen nur Ihre eigenen Karten.) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass jeder Gegenspieler genau einen Buben hat?

## Lösungsvorschlag:

(a) Wir wählen als Grundraum

$$\Omega = \{(\{w_1, \dots, w_{10}\}, \{w_{11}, \dots, w_{20}\}, \{w_{21}, \dots, w_{30}\}, \{w_{31}, w_{32}\}) \mid w_i \in \{1, \dots, 32\}, w_i \neq w_j, i \neq j\}$$

und als Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P}$  die Gleichverteilung auf  $\Omega$ . Dabei steht jede Zahl zwischen 1 und 32 für eine Karte des Spiels (welche Zahl für welche Karte steht ist für die Lösung der Aufgabe nicht relevant). Die Menge  $\{w_1, \dots, w_{10}\}$  repräsentiert die Karten des 1. Spielers, usw. Die Menge  $\{w_{31}, w_{32}\}$  repräsentiert die beiden Karten im Skat. Mit der Multiplikationsregel gilt  $|\Omega| = \binom{32}{10} \binom{22}{10} \binom{12}{10} \binom{2}{2} = \frac{32!}{10!10!10!2!}$ .

- (i) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses  $A :=$  „Ein beliebiger Spieler erhält alle Buben“. Diese berechnen wir mit Hilfe der disjunkten Ereignisse  $A_i :=$  „Spieler  $i$  erhält alle Buben“,  $i = 1, 2, 3$ . Aus Symmetriegründen und mit der Multiplikationsregel folgt

$$|A_1| = |A_2| = |A_3| = \binom{4}{4} \binom{28}{6} \binom{22}{10} \binom{12}{10} \binom{2}{2} = \frac{28!}{6!10!10!2!}.$$

Mit der Additionsregel erhalten wir

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A_1| + |A_2| + |A_3|}{|\Omega|} = 3 \cdot \frac{28!10!}{6!32!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 3}{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29} \approx 0,0175.$$

- (ii) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses  $B :=$  „Jeder Spieler erhält genau einen Buben“. Es gilt

$$|B| = \underbrace{\binom{4}{1} \binom{28}{9}}_{1. \text{ Spieler}} \underbrace{\binom{3}{1} \binom{19}{9}}_{2. \text{ Spieler}} \underbrace{\binom{2}{1} \binom{10}{9}}_{3. \text{ Spieler}} \underbrace{\binom{1}{1} \binom{1}{1}}_{\text{Skat}}.$$

Zur Erklärung: Der Faktor für den 1. Spieler setzt sich beispielsweise zusammen aus der Wahl einer der 4 Buben und 9 der 28 restlichen Karten. Damit erhalten wir

$$\mathbb{P}(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} \approx 0,056.$$

- (b) Da die eigenen Karten bereits feststehen, modellieren wir die Verteilung der restlichen Karten auf die verbleibenden zwei Spieler und den Skat durch

$$\tilde{\Omega} = \{(\{w_1, \dots, w_{10}\}, \{w_{11}, \dots, w_{20}\}, \{w_{21}, w_{22}\}) \mid w_i \in \{1, \dots, 22\}, w_i \neq w_j, i \neq j\}.$$

Mit der Multiplikationsregel gilt dann  $|\tilde{\Omega}| = \binom{22}{10} \binom{12}{10} \binom{2}{2} = \frac{22!}{10!10!2!}$ . Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses  $C :=$  „Jeder Gegenspieler erhält genau einen Buben“. Es gilt

$$|C| = \underbrace{\binom{2}{1} \binom{20}{9}}_{1. \text{ Gegenspieler}} \underbrace{\binom{1}{1} \binom{11}{9}}_{2. \text{ Gegenspieler}} \underbrace{\binom{2}{2}}_{\text{Skat}}.$$

Damit erhalten wir

$$\mathbb{P}(C) = \frac{|C|}{|\tilde{\Omega}|} \approx 0,4329.$$

## Aufgabe T5 (Efrons Würfel)

- (a) Gegeben seien drei faire sechsseitige Würfel (d.h. jede Seite eines Würfels erscheint mit derselben Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{6}$ ), ein blauer, ein roter und ein grüner. Die Seiten des blauen Würfels tragen jeweils zweimal die Ziffern 2, 6 und 7, die Seiten des roten Würfels jeweils zweimal die Ziffern 3, 4 und 8 und die Seiten des grünen Würfels jeweils zweimal die Ziffern 1, 5 und 9. Alle drei Würfel werden gleichzeitig geworfen.

Geben Sie einen geeigneten endlichen Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathbb{P})$  zur Beschreibung dieses Zufallsexperiments an. Berechnen Sie dann die Wahrscheinlichkeit für die folgenden Ereignisse:

$A :=$  „Das Ergebnis des blauen Würfels ist kleiner als das Ergebnis des roten“,

$C :=$  „Das Ergebnis des roten Würfels ist kleiner als das des grünen“,

$D :=$  „Das Ergebnis des grünen Würfels ist kleiner als das des blauen“.

- (b) Nachdem Sie und Ihr Kommilitone Teil (i) gelöst haben, bietet er Ihnen folgendes Spiel an: Sie dürfen als erstes einen der drei Würfel wählen, anschließend wird er sich dann einen der beiden verbleibenden Würfel aussuchen. Dann werfen Sie beide Ihren jeweiligen Würfel. Derjenige, der die höhere Augenzahl würfelt, hat gewonnen und wird vom Verlierer zum Essen eingeladen. Würden Sie sich auf dieses Spiel einlassen?
- (c) Angenommen, ein weiterer Kommilitone kommt zu Ihnen hinzu und Sie wollen nun zu dritt ein ähnliches Spiel spielen. Dazu wählt sich jeder von Ihnen einen der drei Würfel aus, dann werfen Sie alle drei gleichzeitig, und derjenige mit der höchsten Augenzahl hat gewonnen. Hätten Sie bei diesem Spiel irgendwelche Präferenzen für einen der drei Würfel?

### Lösungsvorschlag:

- (a) Als Grundraum wählen wir

$$\Omega = \{2, 6, 7\} \times \{3, 4, 8\} \times \{1, 5, 9\} =: B \times R \times G,$$

wobei in jedem Tupel zuerst das Ergebnis des blauen, dann das des roten und schließlich das des grünen Würfels notiert ist. Damit gilt  $|\Omega| = 27$  (für das Modell ist es unerheblich, ob wir einen sechsseitigen Würfel betrachten auf dem jede Zahl zweimal vorkommt oder einen dreiseitigen auf dem jede Zahl einmal vorkommt). Da die Würfel fair sind, ist jeder Ausgang gleich wahrscheinlich und als Wahrscheinlichkeitsmaß wählen wir die Gleichverteilung auf  $\Omega$ .

Des Weiteren sind die drei Ereignisse  $A, C, D$  gegeben durch

$$A = \{(2, 3, g), (2, 4, g), (2, 8, g), (6, 8, g), (7, 8, g) \mid g \in G\},$$

$$C = \{(b, 3, 5), (b, 3, 9), (b, 4, 5), (b, 4, 9), (b, 8, 9) \mid b \in B\},$$

$$D = \{(2, r, 1), (6, r, 1), (6, r, 5), (7, r, 1), (7, r, 5) \mid r \in R\}.$$

Da jede der Mengen  $B, R$  und  $G$  die Mächtigkeit 3 hat, besitzen die drei Ereignisse  $A, C, D$  jeweils die Mächtigkeit 15 und somit gilt  $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(D) = \frac{15}{27} = \frac{5}{9}$ .

- (b) Wählt man den blauen Würfel, so wählt der Kommilitone den roten Würfel und gewinnt mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{5}{9}$ . Wählt man aber den roten Würfel, so wählt er den grünen Würfel und gewinnt ebenfalls mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{5}{9}$ . Wählt man schließlich den grünen Würfel, so wählt der Kommilitone den blauen Würfel und gewinnt wiederum mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{5}{9}$ . Man sollte sich also nicht auf das Spiel einlassen, es sei denn, man ist unbedingt darauf aus zu verlieren.
- (c) Egal welchen Würfel man wählt, man hat immer gegenüber einem der beiden anderen Würfel eine Gewinnchance von  $\frac{5}{9}$  und gegenüber dem anderen eine Gewinnchance von  $\frac{4}{9}$ . Deshalb könnte man zunächst auf die Idee kommen, dass es egal ist, welchen Würfel man wählt. Zählt man aber genau nach, so merkt man, dass der grüne Würfel bei 11 von 27 möglichen Kombinationen von Augenzahlen gewinnt. Dieses Ereignis ist nämlich durch

$$E = \{(b, r, 9) \mid b \in B, r \in R\} + \{(2, 3, 5), (2, 4, 5)\}$$

gegeben.

Der rote gewinnt gegen die anderen beiden in 8 von 27 Fällen, die zugehörige Menge ist

$$F = \{(b, 8, 1), (b, 8, 5) \mid b \in B\} + \{(2, 4, 1), (2, 3, 1)\}.$$

Der blaue gewinnt dann in den restlichen  $27 - 11 - 8 = 8$  Fällen. Sind also alle Würfel im Spiel, ist der grüne klar der beste.

**Bemerkung:** Würfel wie in dieser Aufgabe nennt man intransitiv, da aus „Der grüne Würfel ist besser als der rote“ und „Der rote Würfel ist besser als der blaue“ eben **nicht** „Der grüne Würfel ist besser als der blaue“ folgt. Man kann auch ein Set von 4 intransitiven Würfeln konstruieren, so dass es zu jedem der Würfel einen anderen gibt der ihn mit der Wahrscheinlichkeit  $\frac{2}{3}$  besiegt. Der Name Efrons Würfel geht auf den amerikanischen Statistiker Bradley Efron zurück, der sie sich ursprünglich ausdachte.