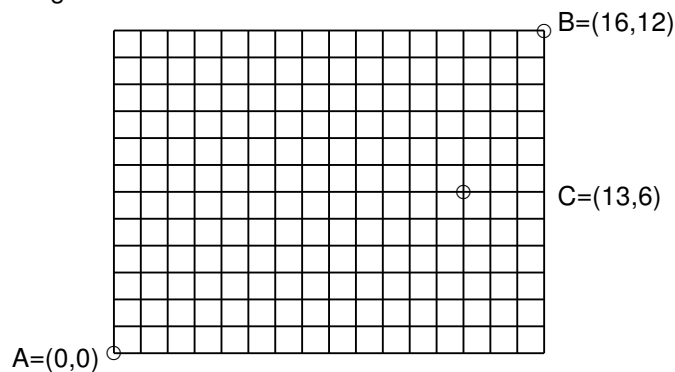


Lösungen zu Tutoriumsblatt 3

Aufgabe T1 (Roboter)

Gegeben sei ein ebenes ganzzahliges Gitter, das durch die Punkte $A = (0, 0)$ und $B = (a, b)$ nach links unten bzw. rechts oben begrenzt ist. Ein Roboter bewegt sich von A nach B , indem er zu jedem Zeitschritt entweder einen Schritt der Länge 1 nach rechts oder nach oben macht.

- (a) Auf wie viele verschiedene Arten kann der Roboter von Punkt A zum Punkt B gelangen?
 (b) Gegeben sei nun konkret folgendes Gitter:



Jeder Pfad, den der Roboter von A nach B nehmen kann, sei gleich wahrscheinlich. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der zufällige Weg des Roboters von A nach B über C führt.

Lösungsvorschlag

- (a) Der Roboter benötigt insgesamt $a + b$ Zeitschritte, davon b Aufwärtsschritte und a Schritte nach rechts. Es gibt also $\binom{a+b}{b}$ Möglichkeiten die Zeitpunkte der Aufwärtsschritte festzulegen. Damit stehen dann aber auch die Zeitpunkte der Rechtsschritte fest. Also bleiben es $\binom{a+b}{b}$ Möglichkeiten von $(0, 0)$ nach (a, b) zu gehen.
 Andererseits gibt es $\binom{a+b}{a}$ Möglichkeiten die Zeitpunkte der Rechtsschritte festzulegen. Damit stehen dann aber auch die Zeitpunkte der Aufwärtsschritte fest. Folglich gilt für die Möglichkeiten $\binom{a+b}{a} = \binom{a+b}{b}$.
- (b) Sei Ω die Menge aller Pfade, die der Roboter von A nach B nehmen kann. Dazu braucht er 16 Schritte nach rechts und 12 Schritte nach oben, es gibt also nach Teil (i) $\binom{16+12}{16} = \binom{28}{16}$ Elemente in Ω . Da jeder Pfad gleich wahrscheinlich ist, haben wir es mit einem Laplace-Modell zu tun. Um die gesuchte Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, müssen wir also die Anzahl aller Pfade von A nach B beziehungsweise von C nach B existieren. Von A aus benötigt der Roboter 13 Schritte nach rechts und 6 nach oben um C zu erreichen, das sind also wiederum nach (i) $\binom{13+6}{13} = \binom{19}{6}$ Möglichkeiten. Von C aus benötigt der Roboter 3 Schritte nach rechts und 6 nach oben um B zu erreichen, das sind also wiederum nach (i) $\binom{3+6}{3} = \binom{9}{3}$ Möglichkeiten. Damit ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}(\text{„Der Pfad von } A \text{ nach } B \text{ führt über } C\text{“}) = \frac{\binom{19}{6} \binom{9}{3}}{\binom{28}{16}} = \frac{112}{1495} \approx 0,075.$$

Aufgabe T2 (Geburtstagsproblem)

Aus einer Bevölkerung, in welcher die Geburtstage der Personen gleichverteilt über die Tage eines Jahres sind, werden durch ein Laplace-Experiment n Personen zufällig ausgewählt.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p_n , dass mindestens zwei von diesen Personen am selben Tag Geburtstag haben? (Dabei schließen wir den 29. Februar als Geburtstag aus.) Man berechne insbesondere p_{10} und p_{20} .

Lösungsvorschlag:

Wir modellieren das Experiment durch den diskreten Wahrscheinlichkeitsraum (Ω_n, \mathbb{P}_n) , wobei $\Omega_n = \{1, 2, \dots, 365\}^n$ und \mathbb{P}_n die Gleichverteilung auf Ω_n sei. Jedes $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega_n$ listet dabei die Nummern der Geburtstage der (z.B. alphabetisch) geordneten Personen auf.

$A_n = \{\omega \in \Omega_n \mid \exists i, j \in \{1, \dots, n\} : i \neq j, \omega_i = \omega_j\}$ ist also das Ereignis, dass mindestens zwei verschiedene Personen den gleichen Geburtstag haben. Nun gilt

$$p_n = \mathbb{P}_n(A_n) = 1 - \mathbb{P}_n(A_n^c) = 1 - \frac{|A_n^c|}{|\Omega_n|} = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365 - n + 1)}{365^n},$$

also $p_{10} = 0.117$ und $p_{20} = 0.411$.

Aufgabe T3 (Zwei Münzen)

- Zwei faire Münzen werden gleichzeitig geworfen. Im Anschluss werden die abgebildeten Symbole notiert. Geben Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum an, um das Experiment zu modellieren. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Münzen das gleiche Symbol aufzeigen?
- Zwei faire, sechsseitige Würfel werden gleichzeitig geworfen und anschließend wird das Produkt der Augenzahlen gebildet. Geben Sie 2 verschiedene Wahrscheinlichkeitsräume und passende Zufallsvariablen an, die obiges Experiment modellieren. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für ein gerades Produkt.

Lösungsvorschlag:

- Wir können das Experiment mit

$$\Omega := \{ZZ, KK, ZK, KZ\}, \mathcal{A} := \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{4}$$

modellieren. Wir schreiben hierbei K für Kopf und Z für Zahl. Für diesen Modellansatz müssen wir in Gedanken die Münzen markieren. Damit ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}(\{ZZ \text{ oder } KK\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

- Eine Möglichkeit ist es, die individuellen Augenzahlen aufzunehmen und daraus das Produkt abzuleiten:

$$\Omega := \{1, \dots, 6\}^2, \mathcal{A} := \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}(\{\omega\}) := \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{36}.$$

Dies ist ein Laplaceraum und jedes Elementarereignis $\omega \in \Omega$ ist gleich wahrscheinlich. Das Produkt ist dann eine Zufallsvariable $X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$, $X(\omega) = X(\omega_1, \omega_2) := \omega_1 \cdot \omega_2$.

- Eine andere Möglichkeit ist es, direkt die möglichen Produkte zu notieren:

$$\Omega := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 36\}, \mathcal{A} := \mathcal{P}(\Omega),$$

und \mathbb{P} gemäß folgender Tabelle zu definieren:

ω	$36 \cdot \mathbb{P}(\{\omega\})$
1	1
2	2
3	2
4	3
5	2
6	4
8	2
9	1
10	2
12	4
15	2
16	1
18	2
20	2
24	2
25	1
30	2
36	1

Die gesuchte Zufallsvariable ist dann einfach $X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$, $X(\omega) = \omega$.

Aus obiger Tabelle liest man direkt die gesuchte Wahrscheinlichkeit von $\frac{27}{36} = \frac{3}{4}$ ab. Alternativ kann man die Anzahl der günstigen Möglichkeiten auch direkt abzählen und die Modellierung aus 1. benutzen. Das Produkt der Augenzahlen ist genau dann gerade, wenn mindestens ein Würfel eine gerade Augenzahl zeigt. Das Ereignis „der 1. Würfel zeigt eine gerade Augenzahl“ enthält $3 \cdot 6 = 18$ Elemente. Das Ereignis „der 1. Würfel zeigt eine ungerade Augenzahl und der 2. Würfel zeigt eine gerade Augenzahl“ enthält $3 \cdot 3 = 9$ Elemente. Diese beiden Ereignisse sind disjunkt und ergeben zusammen das gewünschte Ereignis. Folglich ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{18+9}{36} = \frac{3}{4}$.

Aufgabe T4 (Rechenregeln für Indikatoren I)

Seien $A, B \subseteq \Omega$ Ereignisse. Zeigen Sie, dass dann folgende Aussagen gelten.

- (a) $\mathbb{1}_{\emptyset} \equiv 0$, $\mathbb{1}_{\Omega} \equiv 1$,
- (b) $\mathbb{1}_A^2 = \mathbb{1}_A$,
- (c) $\mathbb{1}_{A^c} = 1 - \mathbb{1}_A$,
- (d) $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B$,
- (e) $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A \cap B}$,
- (f) $A \subseteq B \implies \mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$

Lösungsvorschlag:

- (a) Nach Definition gilt für alle $\omega \in \Omega$

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \notin A. \end{cases}$$

Daraus folgt direkt $\mathbb{1}_{\emptyset}(\omega) = 0$ und $\mathbb{1}_{\Omega}(\omega) = 1$, da $\omega \in \emptyset$ für kein $\omega \in \Omega$ und $\omega \in \Omega$ für alle $\omega \in \Omega$ erfüllt ist.

- (b) Die Aussage folgt direkt, da $1^2 = 1$ und $0^2 = 0$ ist.

- (c) Wir machen eine Fallunterscheidung für $\omega \in \Omega$. Ist $\omega \in A$, so gilt $\mathbb{1}_{A^c}(\omega) = 0$ und $\mathbb{1}_A(\omega) = 1$, also $1 - \mathbb{1}_A = 0$, sodass die Aussage für alle $\omega \in A$ richtig ist. Für $\omega \notin A$ gilt $\mathbb{1}_{A^c}(\omega) = 1$ und $\mathbb{1}_A = 0$, also $1 - \mathbb{1}_A = 1$ und die Aussage ist auch für alle $\omega \notin A$ und damit für alle $\omega \in \Omega$ korrekt.

- (d) Es gilt für alle $\omega \in \Omega$

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{A \cap B}(\omega) = 1 &\iff \omega \in A \cap B \iff \omega \in A \text{ und } \omega \in B \\ &\iff \mathbb{1}_A(\omega) = 1 \text{ und } \mathbb{1}_B(\omega) = 1 \iff \mathbb{1}_A(\omega) \cdot \mathbb{1}_B(\omega) = 1. \end{aligned}$$

(e) Gilt $\omega \notin A \cup B$, so sind beide Seiten 0, da ω damit insbesondere nicht in den Mengen A , B und $A \cap B$ enthalten ist.

Für $\omega \in A \cup B$ gibt es drei Möglichkeiten zu beachten. Ist $\omega \in A \cap B$, so gilt

$$\mathbb{1}_{A \cup B}(\omega) = 1 = 1 + 1 - 1 = \mathbb{1}_A(\omega) + \mathbb{1}_B(\omega) - \mathbb{1}_{A \cap B}(\omega).$$

Ist $\omega \in A \setminus B$, so gilt

$$\mathbb{1}_{A \cup B}(\omega) = 1 = 1 + 0 - 0 = \mathbb{1}_A(\omega) + \mathbb{1}_B(\omega) - \mathbb{1}_{A \cap B}(\omega),$$

und für $\omega \in B \setminus A$ gilt

$$\mathbb{1}_{A \cup B}(\omega) = 1 = 0 + 1 - 0 = \mathbb{1}_A(\omega) + \mathbb{1}_B(\omega) - \mathbb{1}_{A \cap B}(\omega).$$

Damit gilt die Behauptung für alle $\omega \in \Omega$.

(f) Ist $\omega \in A$, so gilt wegen $A \subseteq B$ auch $\omega \in B$. Daher gilt für $\omega \in A$

$$\mathbb{1}_A(\omega) = 1 \leq 1 = \mathbb{1}_B(\omega).$$

Für $\omega \notin A$ ist

$$\mathbb{1}_A(\omega) = 0 \leq \mathbb{1}_B(\omega),$$

da $\mathbb{1}_B$ nur die Werte 0 und 1 annimmt und damit immer größer oder gleich 0 ist.

Aufgabe T5 (Rechenregeln für Indikatoren II)

Es seien Ω ein Grundraum und $A, B, C \subset \Omega$. Beweisen oder widerlegen Sie:

- (a) $\mathbb{1}_{A \cap B} = \min(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$,
- (b) $(\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B)(\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B) = \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B$,
- (c) $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_{B^c} + \mathbb{1}_{A^c} \cdot \mathbb{1}_B$,
- (d) $\mathbb{1}_{A \cup B \cup C} = \mathbb{1}_A(1 - \mathbb{1}_B) + \mathbb{1}_B(1 - \mathbb{1}_C) + \mathbb{1}_C(1 - \mathbb{1}_A)$.

Lösungsvorschlag:

(a) Die direkte Anwendung der Definition der Indikatorfunktion liefert für $\omega \in \Omega$

$$\begin{aligned} \min(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)(\omega) = 1 &\iff \mathbb{1}_A(\omega) = \mathbb{1}_B(\omega) = 1 \iff \omega \in A \text{ und } \omega \in B \\ &\iff \omega \in A \cap B \iff \mathbb{1}_{A \cap B}(\omega) = 1. \end{aligned}$$

Folglich ist auch

$$\min(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)(\omega) = 0 \iff \min(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)(\omega) \neq 1 \iff \mathbb{1}_{A \cap B}(\omega) \neq 1 \iff \mathbb{1}_{A \cap B}(\omega) = 0.$$

Hieraus folgt $\min(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) = \mathbb{1}_{A \cap B}$.

(b) Wegen $\mathbb{1}_A \in \{0, 1\}$ ist $\mathbb{1}_A^2 = \mathbb{1}_A$, analog für B . Die dritte binomische Formel liefert

$$(\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B)(\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B) = \mathbb{1}_A^2 - \mathbb{1}_B^2 = \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B.$$

(c) Einerseits gilt

$$\mathbb{1}_{A \cup B}(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \omega \in A \cup B, \\ & \text{d.h. falls } \omega \in A \text{ oder } \omega \in B, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Andererseits ist aber auch

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_A(\omega) \cdot \mathbb{1}_B(\omega) + \mathbb{1}_A(\omega) \cdot \mathbb{1}_{B^c}(\omega) + \mathbb{1}_{A^c}(\omega) \cdot \mathbb{1}_B(\omega) &= \begin{cases} 0 + 1 + 0, & \text{falls } \omega \in A \cap B^c, \\ 1 + 0 + 0, & \text{falls } \omega \in A \cap B, \\ 0 + 0 + 1, & \text{falls } \omega \in A^c \cap B, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1, & \text{falls } \omega \in (A \cap B^c) \cup (A \cap B) \cup (A^c \cap B), \\ & \text{d.h. falls } \omega \in A \cup B, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung.

(d) Seien $A \cap B \cap C \neq \emptyset$ und $\omega \in A \cap B \cap C$. Dann gilt

$$\mathbb{1}_{A \cup B \cup C}(\omega) = 1,$$

aber wegen $\mathbb{1}_A(\omega) = \mathbb{1}_B(\omega) = \mathbb{1}_C(\omega) = 1$ ist

$$\mathbb{1}_A(\omega)(1 - \mathbb{1}_B(\omega)) + \mathbb{1}_B(\omega)(1 - \mathbb{1}_C(\omega)) + \mathbb{1}_C(\omega)(1 - \mathbb{1}_A(\omega)) = 0.$$

Somit ist die Behauptung d) im Allgemeinen falsch.

Aufgabe T6 (Einschluss-Ausschluss-Formel für Indikatoren)

Seien $A_1, \dots, A_n \subset \Omega$. Dann gilt

$$\mathbb{1}_{A_1 \cup \dots \cup A_n} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}}.$$

Lösungsvorschlag:

Eine Möglichkeit zum Beweis der Aussage ist die vollständige Induktion. Für $n = 2$ gilt die Aussage nach Aufgabe T4 (e). Nehmen wir nun also an, dass die Aussage für beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$ gilt (IV) und zeigen, dass sie dann auch für $n + 1$ gilt.

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{A_1 \cup \dots \cup A_{n+1}} &\stackrel{T4(e)}{=} \mathbb{1}_{A_1 \cup \dots \cup A_n} + \mathbb{1}_{A_{n+1}} - \mathbb{1}_{(A_1 \cup \dots \cup A_n) \cap A_{n+1}} \\ &\stackrel{IV}{=} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}} + \mathbb{1}_{A_{n+1}} - \mathbb{1}_{(A_1 \cap A_{n+1}) \cup \dots \cup (A_n \cap A_{n+1})} \\ &\stackrel{IV}{=} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}} + \mathbb{1}_{A_{n+1}} - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k} \cap A_{n+1}} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n \\ i_k \neq n+1}} \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}} + \sum_{k=1}^n (-1)^k \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_{k+1} \leq n+1 \\ i_{k+1} = n+1}} \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_{k+1}}} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n \\ i_k \neq n+1}} \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}} + \mathbb{1}_{A_{n+1}} + \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^{k-1} \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n+1 \\ i_k = n+1}} \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n \\ i_k \neq n+1}} \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}} + \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n+1 \\ i_k = n+1}} \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}}. \quad \checkmark \end{aligned}$$

Alternativ kann man direkt mit den Rechenregeln für Indikatoren argumentieren:

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^n A_i} &= 1 - \mathbb{1}_{\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)^c} = 1 - \mathbb{1}_{\bigcap_{i=1}^n A_i^c} \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i^c} = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \mathbb{1}_{A_i}) \\ &= 1 - \sum_{I \subset [n]} (-1)^{|I|} \prod_{i \in I} \mathbb{1}_{A_i} \\ &= 1 - \sum_{k=0}^n (-1)^k \sum_{\substack{I \subset [n] \\ |I|=k}} \mathbb{1}_{\bigcap_{i \in I} A_i} \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{\substack{I \subset [n] \\ |I|=k}} \mathbb{1}_{\bigcap_{i \in I} A_i}. \end{aligned}$$