Lösungen zu Tutoriumsblatt 04

Aufgabe T1 (Erwartungswerte)

Die Verteilung der Zufallsvariablen X sei durch folgende Tabelle gegeben:

k	-2	-1	0	1	2	10
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

Berechnen Sie die Erwartungswerte der folgenden Zufallsvariablen:

(a) X

(b) X^2

(c) e^X

(d) $\sin(\frac{\pi}{2}X)$

Lösungsvorschlag:

(a)
$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{5}\cdot(-2) + \frac{1}{10}\cdot(-1) + \frac{3}{10}\cdot 0 + \frac{1}{5}\cdot 1 + \frac{1}{10}\cdot 2 + \frac{1}{10}\cdot 10 = \frac{9}{10}$$

(b)
$$\mathbb{E}\left[X^2\right] = \frac{3}{10}\cdot 4 + \frac{3}{10}\cdot 1 + \frac{3}{10}\cdot 0 + \frac{1}{10}\cdot 100 = 11.5$$

(c)
$$\mathbb{E}\left[e^X\right] = \frac{1}{5}\cdot e^{-2} + \frac{1}{10}\cdot e^{-1} + \frac{3}{10}\cdot 1 + \frac{1}{5}\cdot e + \frac{1}{10}\cdot e^2 + \frac{1}{10}\cdot e^{10} \approx 2204.293$$

(d) Da der Sinus aller ganzzahligen Vielfachen von π gleich 0 ist, ergibt sich
$$\mathbb{E}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}X\right)\right] = \frac{7}{10}\cdot 0 + \frac{1}{10}\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{5}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{10}.$$

Aufgabe T2 (Erwartungswerte II)

(a) Sei X eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$ mit Werten in $\{1, 2, 3, 4\}$. Die Verteilung der Zufallsvariablen sei durch die folgende Tabelle gegeben, wobei p, $q \in [0, 1]$:

k	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X = k)$	1/4	1/6	p	q

(i) Es gelte $\mathbb{E}[X] = \frac{5}{2}$. Berechnen Sie die möglichen Werte der Wahrscheinlichkeiten p und q.

(ii) Sei nun allgemeiner $\mathbb{E}[X] = a \in \mathbb{R}$. Welche Werte kann a annehmen?

(b) Die Verteilung der Zufallsvariablen Y sei gegeben durch

$$\mathbb{P}(Y = k) = \frac{1}{k\,(k+1)}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Existiert der Erwartungswert der Zufallsvariablen Y?

Lösungsvorschlag:

(a) (i) Es gilt

$$1 = \mathbb{P}\left(X \in \{1, 2, 3, 4\}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + p + q \tag{1}$$

sowie

$$\frac{5}{2} = \mathbb{E}[X] = 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3p + 4q. \tag{2}$$

Durch Umstellen erhalten wir das folgende LGS:

$$\begin{aligned} p + q &= \frac{7}{12}, \\ 3p + 4q &= \frac{23}{12}. \end{aligned}$$

Die eindeutige Lösung des LGS ist gegeben durch $p = \frac{5}{12}$ und $q = \frac{1}{6}$.

(ii) Gleichung (1) bleibt bestehen, in Gleichung (2) können wir $\frac{5}{2}$ durch a ersetzen und erhalten das folgende LGS:

$$\begin{aligned} p + q &= \frac{7}{12}, \\ 3p + 4q &= a - \frac{7}{12}. \end{aligned}$$

Die eindeutige Lösung des LGS ist gegeben durch $p = \frac{35}{12} - a$ und $q = a - \frac{28}{12}$. Da es sich bei p, q um Wahrscheinlichkeiten handelt, muss gelten

$$\begin{aligned} & \left(0 \leqslant \frac{35}{12} - a \leqslant 1\right) \wedge \left(0 \leqslant a - \frac{28}{12} \leqslant 1\right) \\ \iff & \left(\frac{23}{12} \leqslant a \leqslant \frac{35}{12}\right) \wedge \left(\frac{28}{12} \leqslant a \leqslant \frac{40}{12}\right) \\ \iff & \frac{28}{12} \leqslant a \leqslant \frac{35}{12}. \end{aligned}$$

Somit kann der Erwartungswert von X Werte im Intervall $\left[\frac{28}{12}, \frac{35}{12}\right]$ annehmen.

(b) Es gilt

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} k \cdot \mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} k \cdot \frac{1}{k\,(k+1)} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k+1} = \infty.$$

Der Erwartungswert der Zufallsvariablen Y existiert somit nicht.

Aufgabe T3 (Darstellungen von Erwartungswerten)

Es sei Z eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}_0$.

(a) Zeigen Sie unter der Voraussetzung $\mathbb{E}[Z] < \infty$, dass gilt

$$\mathbb{E}[Z] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(Z \geqslant k).$$

(b) Zeigen Sie, dass unter der Voraussetzung $\mathbb{E}[Z^2] < \infty$ gilt

$$\mathbb{E}\left[Z^2\right] = \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1)\mathbb{P}(Z \geqslant k).$$

(c) Gelten die Aussagen aus (a),(b) auch ohne die Endlichkeitsvoraussetzungen?

Lösungsvorschlag:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z] &= \sum_{k=1}^{\infty} k\, \mathbb{P}(Z = k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{k} 1 \right) \mathbb{P}(Z = k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(Z = k) \mathbb{1}_{\{j \leqslant k\}} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(Z = k) \mathbb{1}_{\{k \geqslant j\}} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} \mathbb{P}(Z = k) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(Z \geqslant j).
\end{aligned}$$

(b) Vertauschen der Summationsreihenfolge liefert

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} (2k-1)\mathbb{P}(Z \geqslant k) &= \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1) \sum_{j=k}^{\infty} \mathbb{P}(Z = j) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (2k-1)\mathbb{P}(Z = j)\mathbb{1}_{\{j \geqslant k\}} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1)\mathbb{P}(Z = j)\mathbb{1}_{\{k \leqslant j\}} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(Z = j) \sum_{k=1}^{j} (2k-1) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(Z = j) \cdot j^2 \\
&= \mathbb{E}\left[Z^2\right].
\end{aligned}$$

(c) Ja. Nach dem großen Umordnungssatz kann die Summation nicht-negativer Zahlen in beliebiger Reihenfolge durchgeführt werden, auch wenn das Ergebnis unendlich ist.

Aufgabe T4 (No-Show-Rate)

Die Fluggesellschaft AirXY weiß aus Erfahrung, dass $p = 7,4\%$ der Passagiere nicht zu ihrem gebuchten Flug erscheinen (sogenannte No-Show-Rate). Um dennoch eine maximale Auslastung der Flüge zu erreichen, kalkuliert AirXY die No-Show-Rate ein und verkauft mehr Flugtickets, als es Plätze in dem jeweiligen Flugzeug gibt.

(a) Die Zufallsvariable X_n bezeichne die Anzahl der Stornierungen bei n Buchungen. Wie viele Stornierungen/No Shows werden bei einem ausgebuchten Flugzeug mit 120 Plätzen erwartet?

(b) AirXY hat einen Flug mit 120 Plätzen um 5 Plätze überbucht. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Fluggesellschaft mindestens einen der Passagiere aufgrund der Überbuchung entschädigen muss?

Hinweis: Wir modellieren die Anzahl fehlender Fluggäste X_n mit Hilfe einer Binomialverteilung mit den Parametern n und p, d.h. $X_n \sim \text{Bin}(n, p)$.

Lösungsvorschlag:

(a) Sei Y_j mit $j \in \{1, ..., n\}$ diejenige Zufallsvariable, die beschreibt, ob Passagier j nicht erscheint. Für diese gilt somit $\mathbb{P}(Y_j = 1) = p$, $\mathbb{P}(Y_j = 0) = 1 - p$. Zudem lässt sich X_n darstellen mittels $X_n = \sum_{j=1}^{n} Y_j$. Für n=120 gilt somit

$$\mathbb{E}[X_{120}] = \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{120} Y_j\right] = \sum_{j=1}^{120} \mathbb{E}\left[Y_j\right] = 120 \cdot 0.074 \approx 8,88.$$

Alternativ hätte man diesen Erwartungswert auch direkt mit Hilfe des Hinweises und Satz 7.2 der Vorlesung (Erwartungswert der Binomialverteilung) berechnen können.

(b) Da 125 Buchungen vorliegen, betrachten wir die Zufallsvariable $X_{125} \sim \text{Bin}(125,\ 0.074)$. Die Fluggesellschaft muss mindestens einen der Passagiere entschädigen, falls $X_{125} \leqslant 4$ ist. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{125} \leqslant 4) =& \mathbb{P}(X_{125} = 0) + \mathbb{P}(X_{125} = 1) + \mathbb{P}(X_{125} = 2) + \mathbb{P}(X_{125} = 3) + \mathbb{P}(X_{125} = 4) \\
=& \binom{125}{0} \cdot 0.074^0 \cdot 0,926^{125} + \binom{125}{1} \cdot 0.074^1 \cdot 0.926^{124} + \binom{125}{2} \cdot 0.074^2 \cdot 0.926^{123} \\
&+ \binom{125}{3} \cdot 0.074^3 \cdot 0.926^{122} + \binom{125}{4} \cdot 0.074^4 \cdot 0.926^{121} \\
=& 0.926^{125} + 125 \cdot 0.074 \cdot 0.926^{124} + \binom{125}{2} \cdot 0.074^2 \cdot 0.926^{123} \\
&+ \binom{125}{3} \cdot 0.074^3 \cdot 0.926^{122} + \binom{125}{4} \cdot 0.074^4 \cdot 0.926^{121} \approx 0.041.
\end{aligned}$$

Aufgabe T5 (Hypergeometrische Verteilung)

Es seien $n \in \mathbb{N}_0$ und $r, s \in \mathbb{N}_0$ mit $n \leqslant r + s$.

(a) Zeigen Sie

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}, \qquad a, b, n \in \mathbb{N}_0, \quad a + b \geqslant n$$

unter Zuhilfenahme eines Urnenexperiments mit a (unterscheidbaren) roten Kugeln und b (unterscheidbaren) blauen Kugeln, bei dem n Kugeln ohne Zurücklegen gezogen werden.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Resultats aus Teil (a), dass durch

$$\mathrm{p}(k) := \frac{\binom{r}{k}\binom{s}{n-k}}{\binom{r+s}{n}}, \qquad k \in \{0, \ldots, n\}$$

eine Zähldichte definiert wird.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe des Resultats aus Teil (b) die Gleichung

$$\sum_{k=0}^{n} k \frac{\binom{r}{k}\binom{s}{n-k}}{\binom{r+s}{n}} = n\frac{r}{r+s}, \qquad r,s,n \in \mathbb{N}$$

für $r+s \geqslant n$.

Hinweis: Der Ausdruck $n\frac{r}{r+s}$ ist der Erwartungswert einer hypergeometrisch verteilten Zufallsvariablen mit den Parametern n, r, s.

Lösungsvorschlag:

(a) Wir zählen die Anzahl an Möglichkeiten n unterscheidbare Kugeln aus einer Urne mit $a+b$ Kugeln ohne Beachtung der Reihenfolge und ohne Zurücklegen zu ziehen. Diese ist gerade $\binom{a+b}{n}$.
Falls wir uns vorstellen, dass a der Kugeln in der Urne rot gefärbt sind und die restlichen b Kugeln blau, so können wir stattdessen auch zählen wie viele Möglichkeiten es gibt genau k rote Kugeln zu ziehen und $n-k$ blaue für $k = 0, ..., n$. Diese Zahl ist gegeben durch $\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$. Indem wir nun über alle möglichen k summieren bekommen wir die selbe Zahl wie beim direkten Ziehen von n Kugeln.

Alternativer Lösungsweg mittels Koeffizientenvergleich der Polynome $p_1(x) = (1+x)^a \cdot (1+x)^b$ und $p_2(x) = (1+x)^{a+b}$:
Zunächst gilt

$$p_2(x) = (1+x)^{a+b} = \sum_{n=0}^{a+b} \binom{a+b}{n} x^n.$$

Da die beiden Polynome identisch sind, müssen die Koeffizienten übereinstimmen. Für p_1 ergibt sich

$$\begin{aligned}
p_1(x) &= (1+x)^a(1+x)^b \\
&= \left(\sum_{j=0}^{a} \binom{a}{j} x^j\right)\left(\sum_{i=0}^{b} \binom{b}{i} x^i\right) \\
&= \sum_{n=0}^{a+b} \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} x^n.
\end{aligned}$$

Dies zeigt die gewünschte Gleichheit.

(b) Es ist direkt ersichtlich, dass p nur nichtnegative Werte annimmt. Es bleibt also zu zeigen, dass $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{p}(k) = 1$ gilt. Mit Hilfe der Gleichung aus Teil (a) folgt das direkt, denn

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{p}(k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{r}{k}\binom{s}{n-k}}{\binom{r+s}{n}} = \frac{1}{\binom{r+s}{n}} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k}\binom{s}{n-k}}_{=\binom{r+s}{n}} = 1.$$

(c) In den folgenden Umformungen wird hauptsächlich die Definition des Binomialkoeffizienten verwendet. Die Umformung $\star$ verwendet die Gleichung aus Teil (a):

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k \frac{\binom{r}{k}\binom{s}{n-k}}{\binom{r+s}{n}} &= \frac{r}{\binom{r+s}{n}} \sum_{k=1}^{n} \binom{r-1}{k-1}\binom{s}{n-k} \\
&= \frac{r}{\binom{r+s}{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{r-1}{k}\binom{s}{n-1-k} \\
&\overset{\star}{=} \frac{r}{\binom{r+s}{n}} \binom{r-1+s}{n-1} \\
&= \frac{r}{r+s} n.
\end{aligned}$$