Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Stochastik

Einführung in die Stochastik (WS2024/25)
PD Dr. Steffen Winter
Dr. Tamara Göll, Dr. Dominik Pabst

Lösungen zu Tutoriumsblatt 5

Aufgabe T1 (Navigation im Zoo)

Tom will im Karlsruher Zoo zur Eisbärenanlage. Er kann hierfür nach rechts (richtiger Weg) oder nach links (falscher Weg) gehen. Fragt er einen Besucher des Zoos mit Tageskarte nach dem Weg dorthin, so erhält er mit Wahrscheinlichkeit 2/3 die richtige Antwort und mit Wahrscheinlichkeit 1/3 eine falsche Antwort. Fragt er einen Dauerkartenbesitzer nach dem Weg dorthin, so erhält er stets die richtige Antwort. Antworten und Eintrittskarten von verschiedenen Personen sind unabhängig. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig angesprochene Person eine Dauerkarte besitzt, sei 1/10.

a) Tom fragt einen Besucher B1 nach dem Weg zur Eisbärenanlage. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält er eine richtige Antwort?

b) Wie groß ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass der Besucher B1 eine Dauerkarte besitzt, wenn er die richtige Antwort gegeben hat?

c) Tom fragt einen weiteren Besucher B2 nach dem Weg zur Eisbärenanlage. Mit welcher Wahrscheinlichkeit geben B1 und B2 dieselbe Antwort?

Lösungsvorschlag: Es seien die Ereignisse R, F, T, D wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} R &:= \{\text{Tom erhält die richtige Antwort}\} \\ F &:= \{\text{Tom erhält die falsche Antwort}\} \\ D &:= \{\text{befragte Person ist Dauerkartenbesitzer}\} \\ T &:= \{\text{befragte Person besitzt eine Tageskarte}\} \end{aligned}$$

Die bekannten Wahrscheinlichkeiten sind dann:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(R \mid T) &= 2/3, & \mathbb{P}(F \mid T) &= 1/3, \\ \mathbb{P}(R \mid D) &= 1, & \mathbb{P}(F \mid D) &= 0, \\ \mathbb{P}(D) &= 1/10, & \mathbb{P}(T) &= 9/10. \end{aligned}$$

a) Gesucht ist $\mathbb{P}(R)$. Mit der Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit erhält man

$$\mathbb{P}(R) = \mathbb{P}(R \mid T)\mathbb{P}(T) + \mathbb{P}(R \mid D)\mathbb{P}(D) = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{10} + 1 \cdot \frac{1}{10} = \frac{7}{10}.$$

b) Gesucht ist $\mathbb{P}(D \mid R)$. Mit der Bayes-Formel erhält man

$$\mathbb{P}(D \mid R) = \frac{\mathbb{P}(R \mid D)\mathbb{P}(D)}{\mathbb{P}(R)} = \frac{1 \cdot 1/10}{7/10} = \frac{1}{7}$$

c) Seien R_1, R_2, F_1, F_2 die Ereignisse, dass B_1 bzw. B_2 die richtige bzw. falsche Antwort gibt. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{„gleiche Antwort“}) &= \mathbb{P}(R_1 \cap R_2) + \mathbb{P}(F_1 \cap F_2) = (\mathbb{P}(R))^2 + (\mathbb{P}(F))^2 \\ &= \left(\frac{7}{10}\right)^2 + \left(\frac{3}{10}\right)^2 = \frac{29}{50}, \end{aligned}$$

da die Antworten verschiedener Besucher nach Vorraussetzung unabhängig sind.

Aufgabe T2 (Defekte Schalter)

Eine Fabrik stellt ein Gerät her, welches unter anderem einen elektronischen Schalter enthält. Dieser Schalter wird von zwei Zulieferfirmen A und B bezogen, wobei 70% aller Schalter von A und 30% aller Schalter von B stammen. Erfahrungsgemäß sind 8% aller A–Schalter und 5% aller B–Schalter defekt. Die Endkontrolle der Fabrik akzeptiert jeden intakten Schalter und fälschlicherweise auch 5% aller defekten Schalter.
Modellieren Sie die Situation durch ein geeignetes mehrstufiges Experiment und bestimmen Sie in diesem Modell die Wahrscheinlichkeit, dass ein Gerät in den Verkauf gelangt und einen defekten Schalter besitzt.

Lösungsvorschlag

Wir wählen $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3 = \{A, B\} \times \{D, G\} \times \{M, V\}$. Dabei bedeutet $\omega_1 = A$, dass der Schalter von Firma A kommt, $\omega_1 = B$, dass der Schalter von Firma B kommt. $\omega_2 = D$ bedeutet, dass der Schalter defekt ist, $\omega_2 = G$ entsprechend, dass der Schalter intakt (gut) ist. Schließlich bedeutet $\omega_3 = M$, dass der Schalter aussortiert wurde (in den Müll geworfen wird) und $\omega_3 = V$, dass der Schalter in den Verkauf gelangt. Wir verwenden die Notation aus Definition 8.1 aus der Vorlesung und haben gegeben:

$$p_1(A) = \frac{7}{10},\ \ p_1(B) = \frac{3}{10},\ \ p_2(D \mid A) = \frac{2}{25},\ \ p_2(D \mid B) = \frac{1}{20},\ \ p_3(V \mid D, A) = p_3(V \mid D, B) = \frac{1}{20}.$$

Dann gilt $C = \{$„Schalter gelangt in den Verkauf und ist defekt“$\} = \{(A, D, V), (B, D, V)\}$. Mit Hilfe der Multiplikationsregel rechnen wir:

$$\mathbb{P}(\{(A, D, V)\}) = p_1(A)p_2(D \mid A)p_3(V \mid D, A) = \frac{7}{10} \cdot \frac{2}{25} \cdot \frac{1}{20} = \frac{7}{2500} = 0{,}0028$$

und

$$\mathbb{P}(\{B, D, V)\}) = p_1(B)p_2(D \mid B)p_3(V \mid D, B) = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{20} = \frac{3}{4000} = 0{,}00075,$$

also insgesamt $\mathbb{P}(C) = \frac{7}{2500} + \frac{3}{4000} = \frac{71}{20000} = 0{,}00355$.

Aufgabe T3 (Bedingte Wahrscheinlichkeiten)

Es sei $\Omega = \{1, \ldots, 10\}$ und $\mathbb{P}$ beschreibe die Gleichverteilung auf Ω. Finden Sie Ereignisse A, B und C, sodass

$$0 < \mathbb{P}(A|B) < \mathbb{P}(A) \quad \text{und} \quad 1 > \mathbb{P}(A|C) > \mathbb{P}(A)$$

gelten.

Lösungsvorschlag:

Wir wählen $A = \{6, \ldots, 10\}$, $B = \{1, \ldots, 8\}$ und $C = \{5, \ldots, 10\}$. Dann gelten

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|\{6, \ldots, 10\}|}{|\{1, \ldots, 10\}|} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}, \mathbb{P}(B) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}, \mathbb{P}(C) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

Zudem erfüllen die Ereignisse die gewünschten Eigenschaften, denn

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(\{6, 7, 8\})}{4/5} = \frac{3/10}{4/5} = \frac{3}{8} < \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A),$$
$$\mathbb{P}(A|C) = \frac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{1/2}{3/5} = \frac{5}{6} > \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A).$$

Aufgabe T4 (Bertrands Kästchenproblem)

Von drei Kästen mit jeweils zwei Schubladen wird einer rein zufällig ausgewählt und bei diesem eine rein zufällig ausgewählte Schublade geöffnet. Man stellt fest, dass die Schublade eine Goldmünze enthält. Es sei bekannt, dass jede Schublade entweder eine Gold- oder eine Silbermünze enthält, und dass die drei Kästen Münzen in den Kombinationen Gold/Gold, Gold/Silber und Silber/Silber enthalten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält die andere Schublade des gewählten Kastens auch eine Goldmünze?

Lösungsvorschlag: 1. Lösungsmöglichkeit: Formel von Bayes

Wir nehmen o.B.d.A. an, dass der erste Kasten die Kombination Gold/Gold, der zweite die Kombination Gold/Silber und der dritte die Kombination Silber/Silber enthält. Wir definieren die Ereignisse

$$K_i := \text{“Kasten } i \text{ wird gewählt” für} \quad i = 1, 2, 3 \ ,$$
$$B := \text{“die gewählte Schublade enthält Gold”} \ .$$

Es gilt

$$\mathbb{P}(K_i) \ = \ \frac{1}{3} \quad \text{für} \quad i = 1, 2, 3 \ ,$$
$$\mathbb{P}(B \mid K_1) \ = \ 1 \ , \ \ \mathbb{P}(B \mid K_2) \ = \ \frac{1}{2} \ , \ \ \mathbb{P}(B \mid K_3) \ = \ 0 \ .$$

Die gesuchte bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(K_1 \mid B)$ ergibt sich mit der Formel von Bayes zu

$$\mathbb{P}(K_1 \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid K_1)\mathbb{P}(K_1)}{\sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(B \mid K_i)\mathbb{P}(K_i)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}(1 + \frac{1}{2} + 0)} = \frac{2}{3}.$$

2. Lösungsmöglichkeit: Modellierung auf 2-dim. Grundraum
Die Aufgabe lässt sich auch ohne Verwendung der Formel von Bayes lösen.

Sei

$$\Omega := \{(i, j) : i \in \{1, 2, 3\}, j \in \{1, 2\}\}$$

und $\mathbb{P}$ die Gleichverteilung auf Ω.
Die erste Komponente in einem Ergebnis $(i, j) \in \Omega$ gibt dabei den gewählten Kasten, die zweite Komponente die gewählte Schublade an. Dann ist

$$K_i = \{(i, 1), (i, 2)\}, \quad i = 1, 2, 3,$$
$$B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$$

und die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich zu

$$\mathbb{P}(K_1 \mid B) = \frac{|K_1 \cap B|}{|B|} = \frac{2}{3}.$$

Aufgabe T5 (Zur Unabhängigkeit I)

Ein fairer Würfel wird zweimal hintereinander geworfen. Es seien die folgenden Ereignisse gegeben:

$$A \ = \ \{\text{„Die Augenzahl beim ersten Wurf ist gerade.“}\}$$
$$B \ = \ \{\text{„Die Summe der beiden Augenzahlen ist gerade.“}\}$$
$$C \ = \ \{\text{„Beim zweiten Wurf fällt eine Primzahl.“}\}$$

Zeigen oder widerlegen Sie:

a) A, B und C sind paarweise stochastisch unabhängig.

b) A, B und C sind stochastisch unabhängig.

Lösungsvorschlag:
Das zweimalige Werfen eines fairen Würfels entspricht der Gleichverteilung auf dem Ereignisraum

$$\Omega \ := \ \big\{(i, j) \,\big|\, i, j \in \{1, \ldots, 6\}\big\} = \{1, 2, \ldots, 6\}^2.$$

Dies ist ein Laplace-Experiment, also sind die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A, B, C

$$\mathbb{P}(A) \ = \ \mathbb{P}\big(\big\{(i, j) \in \Omega \,\big|\, i \in \{2, 4, 6\}\big\}\big) = \frac{3 \cdot 6}{6^2} = \frac{1}{2},$$
$$\mathbb{P}(B) \ = \ \mathbb{P}\big(\big\{(i, j) \in \Omega \,\big|\, i + j \text{ ist gerade}\big\}\big) = \frac{6 \cdot 3}{6^2} = \frac{1}{2},$$
$$\mathbb{P}(C) \ = \ \mathbb{P}\big(\big\{(i, j) \in \Omega \,\big|\, j \in \{2, 3, 5\}\big\}\big) = \frac{6 \cdot 3}{6^2} = \frac{1}{2}.$$

a) Wir überprüfen die Ereignisse A und B auf Unabhängigkeit.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A\cap B) &= \mathbb{P}\big(\big\{(i,j)\in\Omega \,\big|\, i\in\{2,4,6\}, i+j=\text{gerade}\big\}\big)\\ &= \mathbb{P}\big(\big\{(i,j)\in\Omega \,\big|\, i\in\{2,4,6\}, j\in\{2,4,6\}\big\}\big)\\ &= \frac{3\cdot 3}{6^2} = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)\end{aligned}$$

Die Ereignisse A und B sind unabhängig.
Für die Ereignisse A und C gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A\cap C) &= \mathbb{P}\big(\big\{(i,j)\in\Omega \,\big|\, i\in\{2,4,6\}, j\in\{2,3,5\}\big\}\big)\\ &= \frac{3\cdot 3}{6^2} = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(C)\end{aligned}$$

A und C sind also unabhängig.
Schließlich gilt für die Ereignisse B und C:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B\cap C) &= \mathbb{P}\big(\big\{(i,j)\in\Omega \,\big|\, j\in\{2,3,5\}, i+j=\text{gerade}\big\}\big)\\ &= \mathbb{P}\big(\big\{(i,j)\in\Omega \,\big|\, (j=2 \text{ und } i\in\{2,4,6\}) \text{ oder } (j\in\{3,5\} \text{ und } i\in\{1,3,5\})\big\}\big)\\ &= \frac{1\cdot 3+2\cdot 3}{6^2} = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(B)\cdot\mathbb{P}(C)\end{aligned}$$

Auch diese Ereignisse sind also unabhängig.
Insgesamt sind die Ereignisse A, B, C paarweise unabhängig.

b) Wir sollen überprüfen, ob die Ereignisse A, B und C unabhängig sind.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A\cap B\cap C) &= \mathbb{P}\big(\big\{(i,j)\in\Omega \,\big|\, i\in\{2,4,6\}, j\in\{2,3,5\}, i+j=\text{gerade}\big\}\big)\\ &= \mathbb{P}\big(\{(2,2),(4,2),(6,2)\}\big) = \frac{3}{6^2} = \frac{1}{12}, \text{ aber}\\ \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)\cdot\mathbb{P}(C) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}\end{aligned}$$

Die beiden Resultate sind nicht gleich und damit sind die Ereignisse A, B und C nicht unabhängig. Diese Aufgabe zeigt also, dass aus paarweiser Unabhängigkeit von drei Ereignissen **nicht** folgt, dass auch alle drei voneinander unabhängig sind.

Aufgabe T6 (Zur Unabhängigkeit II)

Es sei $\Omega = \{1,\dots,8\}$ und $\mathbb{P}$ beschreibe die Gleichverteilung auf Ω. Weiter definieren wir die folgenden Ereignisse:

$$A = B = \{1,2,3,4\}, \qquad C = \{1,5,6,7\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}(A\cap B\cap C) = \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)\cdot\mathbb{P}(C)$ gilt, A, B, C aber nicht stochastisch unabhängig sind.

Lösungsvorschlag:

Es gilt $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}$, da $|A| = |B| = |C| = 4$, $|\Omega| = 8$ und $\mathbb{P}$ die Gleichverteilung auf Ω beschreibt. Weiter gilt

$$A\cap B\cap C = \{1\}$$

und daher

$$\mathbb{P}(A\cap B\cap C) = \frac{1}{8} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)\cdot\mathbb{P}(C).$$

A und B sind aber nicht unabhängig, da

$$\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A) = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B).$$

Daher sind A, B, C nicht stochastisch unabhängig.