Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Stochastik

Einführung in die Stochastik (WS2024/25)
PD Dr. Steffen Winter
Dr. Tamara Göll, Dr. Dominik Pabst

Lösungen zu Tutoriumsblatt 6

Aufgabe T1 (Aussagen zur Unabhängigkeit)

Es seien $(\Omega, \mathbb{P})$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B, C \subseteq \Omega$ Ereignisse. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) A und $\emptyset$ sind stochastisch unabhängig.

(b) A und Ω sind stochastisch unabhängig.

(c) A und A sind genau dann stochastisch unabhängig, wenn $\mathbb{P}(A) = 0$ oder $\mathbb{P}(A) = 1$ gilt.

(d) Es gelte $A \subseteq B$. Dann folgt: A und B sind stochastisch unabhängig $\iff \mathbb{P}(B) = 1$.

(e) Es gelte $0 < \mathbb{P}(B) < 1$ und $A \cap B = \emptyset$. Dann folgt:

$$\mathbb{P}(A^C \mid B) = \mathbb{P}(A \mid B^C) \iff \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = 1.$$

(f) Sind die Ereignisse A, B, C unabhängig, so sind die Ereignisse $A \cup B$ und C ebenfalls unabhängig.

Lösung

(a) Es gilt

$$\mathbb{P}(A \cap \emptyset) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0 = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(\emptyset).$$

Daraus folgt, dass in der Tat A und $\emptyset$ stochastisch unabhängig sind.

(b) Es gilt

$$\mathbb{P}(A \cap \Omega) = \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A) \cdot 1 = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(\Omega),$$

also sind auch A und Ω stochastisch unabhängig.

(c) Es gilt direkt

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap A) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(A) \iff \mathbb{P}(A)^2 = \mathbb{P}(A) \iff \mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}.$$

(d) „$\Longleftarrow$“: Wegen $A \subseteq B$ und $\mathbb{P}(B) = 1$ gilt

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A) \cdot 1 = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

„$\Longrightarrow$“: Diese Richtung gilt **nicht**! Gegenbeispiel: Wähle $A = B = \emptyset$. Dann sind A und B nach Teil (i) stochastisch unabhängig, aber es ist $\mathbb{P}(B) = 0 \neq 1$.

(e) Diese Aussage gilt, wenn man die Disjunktheit von A und B ausnutzt:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(A^C \mid B) = \mathbb{P}(A \mid B^C) \\
\iff \quad & \frac{\mathbb{P}(\overbrace{A^C \cap B}^{=B})}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(\overbrace{A \cap B^C}^{=A})}{\mathbb{P}(B^C)} \\
\iff \quad & 1 = \frac{\mathbb{P}(A)}{1 - \mathbb{P}(B)} \\
\iff \quad & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = 1.
\end{aligned}$$

(f) Es gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((A\cup B)\cap C) &= \mathbb{P}((A\cap C)\cup(B\cap C)) = \mathbb{P}(A\cap C)+\mathbb{P}(B\cap C)-\mathbb{P}(A\cap B\cap C)\\ &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)+\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)-\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(C)\big(\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\big)\\ &= \mathbb{P}(C)\big(\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)\big) = \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(A\cup B).\end{aligned}$$

Aufgabe T2 (Unabhängige Ereignisse in Laplaceschen Wahrscheinlichkeitsräumen)

Es sei $(\Omega,\mathbb{P})$ ein Laplacescher Wahrscheinlichkeitsraum. Wie viele Paare (A,B) unabhängiger Ereignisse mit $0<\mathbb{P}(A)\leqslant\mathbb{P}(B)<1$ gibt es in den folgenden Fällen jeweils?

(a) $|\Omega|=6$

(b) $|\Omega|=7$

(c) $|\Omega|=n$ für allgemeines $n\in\mathbb{N}$

Lösung

Für Ereignisse $A,B\subseteq\Omega$ mit $|\Omega|=n$ gilt aufgrund der Laplace-Annahme, dass diese stochastisch unabhängig sind genau dann, wenn

$$\frac{|A\cap B|}{n}=\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)=\frac{|A|}{n}\cdot\frac{|B|}{n},$$

also wenn $n\cdot|A\cap B|=|A|\cdot|B|$ gilt. Zudem gelten nach Voraussetzung $1\leqslant|A|\leqslant|B|\leqslant n-1$.

(a) Hier ist $n=6$. Dann gibt es 360 solcher Paare, die sich auf folgende Möglichkeiten verteilen:

- $|A|=2$, $|B|=3$, $|A\cap B|=1$, dafür gibt es $\binom{6}{2}\cdot\binom{2}{1}\cdot\binom{4}{2}=180$ Möglichkeiten.
- $|A|=3$, $|B|=4$, $|A\cap B|=2$, dafür gibt es $\binom{6}{3}\cdot\binom{3}{2}\cdot\binom{3}{2}=180$ Möglichkeiten.

Weitere Möglichkeiten gibt es nicht.

(b) Für $n=7$ gibt es tatsächlich kein solches Paar. Da 7 eine Primzahl ist, aber nach Voraussetzung $|A|,|B|\neq 7$ gilt, kann es kein Paar (A,B) mit $|A|\cdot|B|=7\cdot|A\cap B|$ geben. Dies gilt nicht nur für die Zahl 7, sondern für alle Primzahlen.

(c) Aus der Vorüberlegung sieht man, dass es nur unabhängige Ereignisse A,B mit $a=|A|,b=|B|$ geben kann, wenn n das Produkt $a\cdot b$ teilt. Ist dies der Fall, so erhalten wir ein gesuchtes Paar (A,B) durch das Auswählen von b Elementen für B, $\frac{a\cdot b}{n}$ von diesen b Elementen für $A\cap B$ und schließlich $a-\frac{a\cdot b}{n}$ der restlichen $n-b$ Elementen für $A\setminus B$. Summieren über die möglichen Werte von a,b liefert

$$\sum_{b=2}^{n-1}\sum_{a=1}^{b}\mathbb{1}\{n \text{ teilt } a\cdot b\}\binom{n}{b}\binom{b}{\frac{a\cdot b}{n}}\binom{n-b}{a-\frac{a\cdot b}{n}}.$$

Aufgabe T3 (Gemeinsame Verteilung zweier Zufallsvariablen)

Es seien X eine Zufallsvariable mit Werten in $\{-1,1,2\}$ und

$$\mathbb{P}(X=-1)=\frac{1}{6},\quad \mathbb{P}(X=1)=\frac{2}{3},\quad \mathbb{P}(X=2)=\frac{1}{6}$$

sowie Y eine Zufallsvariable mit Werten in $\{0,1\}$ und den bedingten Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}(Y=0\mid X=-1)=\frac{1}{2},\quad \mathbb{P}(Y=0\mid X=1)=\frac{1}{4},\quad \mathbb{P}(Y=1\mid X=2)=\frac{3}{4}.$$

(a) Berechnen Sie die bedingten Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(Y=1\mid X=-1),\mathbb{P}(Y=1\mid X=1)$ sowie $\mathbb{P}(Y=0\mid X=2)$.

(b) Berechnen Sie die gemeinsame Verteilung von X und Y, d.h. $\mathbb{P}(X=k,Y=j)$ für alle $k\in\{-1,1,2\}$ und $j\in\{0,1\}$. Zur besseren Übersichtlichkeit können Sie dafür folgende Tabelle verwenden:

$j \backslash k$	-1	1	2	$\mathbb{P}(Y=j)$
0				
1				
$\mathbb{P}(X=k)$				

(c) Sind X und Y stochastisch unabhängig?

Lösung

(a) Nach Vorlesung ist $\mathbb{P}(\cdot \mid X=-1)$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, also gilt

$$\mathbb{P}(Y=0 \mid X=-1)+\mathbb{P}(Y=1 \mid X=-1)=\mathbb{P}(Y\in\{0,1\} \mid X=-1)=1.$$

Wir erhalten hiermit

$$\mathbb{P}(Y=1 \mid X=-1)=1-\mathbb{P}(Y=0 \mid X=-1)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2},$$
$$\mathbb{P}(Y=1 \mid X=1)=1-\mathbb{P}(Y=0 \mid X=1)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4},$$
$$\mathbb{P}(Y=0 \mid X=2)=1-\mathbb{P}(Y=1 \mid X=2)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}.$$

(b) Wir erhalten

$$\mathbb{P}(Y=0,X=-1)=\mathbb{P}(Y=0 \mid X=-1)\mathbb{P}(X=-1)=\frac{1}{2}\mathbb{P}(X=-1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$$

und mit analoger Rechnung

$$\mathbb{P}(Y=0,X=1)=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{6},\quad \mathbb{P}(Y=0,X=2)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{24},$$
$$\mathbb{P}(Y=1,X=-1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{12},\quad \mathbb{P}(Y=1,X=1)=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{2},$$
$$\mathbb{P}(Y=1,X=2)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{8}.$$

Zur Übersicht nocheinmal alle Werte in einer Tabelle, inklusive der Randverteilungen von X und Y:

$j \backslash k$	-1	1	2	$\mathbb{P}(Y=j)$
0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{7}{24}$
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{17}{24}$
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	

(c) X und Y sind nicht unabhängig, denn es gilt z.B.

$$\mathbb{P}(Y=1,X=2)=\frac{1}{8}\neq\frac{1}{6}\cdot\frac{17}{24}=\mathbb{P}(Y=1)\cdot\mathbb{P}(X=2).$$

Aufgabe T4 (Gemeinsame Verteilung zweier Zufallsvariablen II)

Gegeben seien zwei Zufallsvariablen X und Y mit Werten in $\{1,2,3\}$ und

$$\mathbb{P}(X=i, Y=j) = a \cdot \frac{i}{j}, \qquad i,j \in \{1,2,3\}$$

für ein $a > 0$.

(a) Welchen Wert muss der Normierungsfaktor a annehmen, damit es sich bei $\mathbb{P}$ tatsächlich um ein Wahrscheinlichkeitsmaß handelt?

(b) Bestimmen Sie die Randverteilungen von X und Y.

(c) Sind X und Y unabhängig?

(d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(X \leqslant 2, Y \leqslant 2)$ und $\mathbb{P}(X \leqslant Y)$.

Lösung

(a) Die Bedingung $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ liefert

$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a \cdot \frac{i}{j} = a\sum_{i=1}^{3} i \sum_{j=1}^{3}\frac{1}{j} = a \cdot \frac{11}{6}\sum_{i=1}^{3} i = a \cdot 11 \overset{!}{=} 1.$$

Daraus folgt $a = \frac{1}{11}$.

(b) Für $i,j \in \{1,2,3\}$ gilt

$$\mathbb{P}(X=i) = \sum_{j=1}^{3}\mathbb{P}(X=i, Y=j) = \frac{i}{11}\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{j} = \frac{i}{6},$$

$$\mathbb{P}(Y=j) = \sum_{i=1}^{3}\mathbb{P}(X=i, Y=j) = \frac{1}{11j}\sum_{i=1}^{3} i = \frac{6}{11j}.$$

Folgende Tabelle stellt die gemeinsame Verteilung von X und Y sowie die Randverteilungen nochmal im Detail dar:

$i \backslash j$	1	2	3	$\mathbb{P}(X=i)$
1	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{22}$	$\frac{1}{33}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{2}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{2}{33}$	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{3}{11}$	$\frac{3}{22}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{2}$
$\mathbb{P}(Y=j)$	$\frac{6}{11}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{2}{11}$	1

(c) Wir prüfen die Unabhängigkeit von X und Y. Für $i,j \in \{1,2,3\}$ gilt

$$\mathbb{P}(X=i)\cdot\mathbb{P}(Y=j) = \frac{i}{6}\cdot\frac{6}{11j} = \frac{i}{11j} = \mathbb{P}(X=i, Y=j).$$

Damit sind X und Y unabhängig.

(d) Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leqslant 2, Y \leqslant 2) &= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \frac{i}{11j} = \sum_{i=1}^{2} \frac{i}{11}\cdot\frac{3}{2} = \frac{3}{22}\sum_{i=1}^{2} i = \frac{9}{22},\\
\mathbb{P}(X \leqslant Y) &= \mathbb{P}(X=1, Y\in\{1,2,3\}) + \mathbb{P}(X=2, Y\in\{2,3\}) + \mathbb{P}(X=3, Y=3)\\
&= \mathbb{P}(X=1) + (\mathbb{P}(X=2) - \mathbb{P}(X=2, Y=1)) + \mathbb{P}(X=3, Y=3)\\
&= \frac{1}{6} + \left(\frac{2}{6} - \frac{2}{11\cdot 1}\right) + \frac{3}{11\cdot 3} = \frac{9}{22}.
\end{aligned}$$

Aufgabe T5 (Additionsgesetz der Binomialverteilung)

Es seien $m, n \in \mathbb{N}$, $p \in [0,1]$ sowie $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ und $Y \sim \mathrm{Bin}(m,p)$ unabhängige Zufallsvariablen. Zeigen Sie

$$X + Y \sim \mathrm{Bin}(m+n, p).$$

Lösungsvorschlag: Sei $k \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leqslant k \leqslant m+n$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X+Y=k) &= \sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}(X=j, Y=k-j)\\
&= \sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}(X=j)\cdot\mathbb{P}(Y=k-j)\\
&= \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j}\cdot p^j\cdot(1-p)^{n-j}\cdot\binom{m}{k-j}\cdot p^{k-j}\cdot(1-p)^{m-(k-j)}\\
&= p^k\cdot(1-p)^{m+n-k}\cdot\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{j}\cdot\binom{m}{k-j}.
\end{aligned}$$

Da die Gleichung

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{j}\cdot\binom{m}{k-j} = \binom{n+m}{k}$$

aus Aufgabe T5 (a) auf Tutoriumsblatt 4 erfüllt ist, besitzt $X+Y$ tatsächlich eine Binomialverteilung mit den Parametern $n+m$ und p.

Alternativ können wir mit Satz 10.3 argumentieren. Dazu seien $A_1, \ldots, A_{m+n}$ unabhängige Ereignisse mit $\mathbb{P}(A_j) = p$ für alle $j = 1, \ldots, m+n$. Definieren wir

$$X := \sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{A_j}, \qquad Y := \sum_{j=n+1}^{m+n} \mathbb{1}_{A_j},$$

so sind X und Y nach Konstruktion unabhängig als Summe unabhängiger Zufallsvariablen (vgl. Satz 11.5 - Blockungslemma für Zufallsvariablen) und es gelten $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ und $Y \sim \mathrm{Bin}(m,p)$ nach Satz 10.3. Weiter gilt

$$X + Y = \sum_{j=1}^{m+n} \mathbb{1}_{A_j},$$

und diese Zufallsvariable ist (wieder mit Satz 10.3) binomialverteilt mit Parametern $m+n$ und p. Das war zu zeigen.

Aufgabe T6 (Binomial- und hypergeometrische Verteilung)

Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $0 < p < 1$. Wir betrachten zwei unabhängige Zufallsvariablen X, Y mit $X \sim \operatorname{Bin}(m, p)$ und $Y \sim \operatorname{Bin}(n, p)$. Zeigen Sie:

$$\mathbb{P}(X = j \,|\, X + Y = k) = \frac{\binom{m}{j} \cdot \binom{n}{k-j}}{\binom{m+n}{k}}, \qquad k \in [m+n], \;\; \max(0, k-n) \leqslant j \leqslant \min(m, k).$$

Wie ist dieses Ergebnis auch ohne Rechnung einzusehen?

Lösung

Es gilt

$$\mathbb{P}(X = j \,|\, X + Y = k) = \frac{\mathbb{P}(X = j, X + Y = k)}{\mathbb{P}(X + Y = k)} = \frac{\mathbb{P}(X = j, Y = k - j)}{\mathbb{P}(X + Y = k)}.$$

Da X und Y nach Voraussetzung unabhängig sind, können wir den Zähler in zwei Faktoren spalten. Weil die Summe zweier unabhängiger, binomialverteiler Zufallsvariablen mit der selben Trefferwahrscheinlichkeit selbst wieder binomialverteilt ist, erhalten wir weiter

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = j \,|\, X + Y = k) &= \frac{\mathbb{P}(X = j)\mathbb{P}(Y = k - j)}{\mathbb{P}(X + Y = k)} \\
&= \frac{\binom{m}{j} p^j (1-p)^{m-j} \cdot \binom{n}{k-j} p^{k-j} (1-p)^{n-(k-j)}}{\binom{m+n}{k} p^k (1-p)^{m+n-k}} \\
&= \frac{\binom{m}{j}\binom{n}{k-j}}{\binom{m+n}{k}}.
\end{aligned}$$

Eine Argumentation ohne Rechnung ist die Folgende: X und Y können als Trefferzahlen in den ersten m bzw. letzten n Versuchen einer Bernoulli-Kette vom Umfang $m + n$ mit Trefferwahrscheinlichkeit p interpretiert werden. Die Information $X + Y = k$ bedeutet also, dass insgesamt k Treffer in der gesamten Versuchsreihe aufgetreten sind. Aus Symmetriegründen sind alle $\binom{m+n}{k}$ Auswahlen der k Versuche, bei denen die Treffer auftraten, gleichwahrscheinlich. Das Ereignis $\{X = j\}$ ist gleichbedeutend damit, dass genau j Treffer in den ersten m Versuchen erzielt wurden. Interpretieren wir die ersten m Versuche als 'rote' Kugeln und die übrigen als 'schwarze' Kugeln, und die k Treffer als k gezogene Kugeln aus einer Urne mit $m + n$ Kugeln, so ist genau die Situation einer Hypergeometrischen Verteilung mit Parametern $r = m$, $s = n$ und $n = k$ gegeben. Gilt also $Z \sim \operatorname{Hyp}(m, n, k)$, so gilt $\mathbb{P}(X = j \,|\, X + Y = k) = \mathbb{P}(Z = j)$.