

## Lösungen zu Tutoriumsblatt 7

### Aufgabe T1 (Unkorreliertheit und Unabhängigkeit)

Es sei  $X$  eine gleichverteilte Zufallsvariable auf  $\{-1, 0, 1\}$  und die Zufallsvariable  $Y$  sei definiert durch  $Y := X^2$ . Prüfen Sie  $X$  und  $Y$  auf Unkorreliertheit und Unabhängigkeit.

**Lösungsvorschlag:** Wir berechnen zunächst die für die Kovarianz benötigten Momente von  $X$  und  $Y$ :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= -1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = 0, \\ \mathbb{E}[Y] &= 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, \\ \mathbb{E}[X \cdot Y] &= \sum_{i \in \{-1, 0, 1\}} \sum_{j \in \{0, 1\}} i \cdot j \cdot \mathbb{P}(X = i, Y = j) \\ &= -1 \cdot 1 \cdot \mathbb{P}(X = -1) + 0 \cdot 0 \cdot \mathbb{P}(X = 0) + 1 \cdot 1 \cdot \mathbb{P}(X = 1) = 0.\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\mathbb{C}(X, Y) = \mathbb{E}[X \cdot Y] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y] = 0 - 0 \cdot \frac{2}{3} = 0.$$

Allerdings sind  $X$  und  $Y$  nicht unabhängig, denn

$$\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \mathbb{P}(X = 1) \cdot \mathbb{P}(Y = 1).$$

### Aufgabe T2 (Unabhängige und verteilungsgleiche Zufallsvariablen)

Seien  $X, Y$  stochastisch unabhängige reelle Zufallsvariablen auf einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathbb{P})$  und  $X', Y'$  stochastisch unabhängige reelle Zufallsvariablen auf einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega', \mathbb{P}')$ . Weiter gelte  $X \sim X'$  und  $Y \sim Y'$ . Zeigen Sie:

- Es gilt  $(X, Y) \sim (X', Y')$ .
- Es gilt  $X + Y \sim X' + Y'$ .

**Hinweis:** Verwenden Sie Teil (a), um die Aussage (b) zu beweisen.

### Lösungsvorschlag:

- Ziel ist es zu zeigen, dass für alle  $M \subseteq \mathbb{R}^2$  gilt

$$\mathbb{P}^{(X, Y)}(M) = \mathbb{P}^{(X', Y')}(M).$$

Wir wissen bereits aus  $X \sim X'$  und  $Y \sim Y'$ , dass für alle  $N_1, N_2 \subseteq \mathbb{R}$  gilt

$$\mathbb{P}^X(N_1) = \mathbb{P}^{X'}(N_1), \quad \mathbb{P}^Y(N_2) = \mathbb{P}^{Y'}(N_2).$$

Dies gilt insbesondere für einelementige Mengen  $N_1, N_2$ . Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}^{(X,Y)}(M) &= \mathbb{P}^{(X,Y)}\left(\bigcup_{\substack{(x,y) \in M: \\ \mathbb{P}((X,Y)=(x,y)) > 0}} \{(x,y)\}\right) \\
 &= \sum_{\substack{(x,y) \in M: \\ \mathbb{P}((X,Y)=(x,y)) > 0}} \mathbb{P}((X,Y) = (x,y)) \\
 &\stackrel{\text{unabh.}}{=} \sum_{\substack{(x,y) \in M: \\ \mathbb{P}(X=x) > 0 \wedge \mathbb{P}(Y=y) > 0}} \mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y) \\
 &= \sum_{\substack{(x,y) \in M: \\ \mathbb{P}'(X'=x) > 0 \wedge \mathbb{P}'(Y'=y) > 0}} \mathbb{P}'(X'=x)\mathbb{P}'(Y'=y) \\
 &\stackrel{\text{unabh.}}{=} \sum_{\substack{(x,y) \in M: \\ \mathbb{P}'((X',Y')=(x,y)) > 0}} \mathbb{P}'((X',Y') = (x,y)) \\
 &= \mathbb{P}^{(X',Y')}\left(\bigcup_{\substack{(x,y) \in M: \\ \mathbb{P}'((X',Y')=(x,y)) > 0}} \{(x,y)\}\right) \\
 &= \mathbb{P}^{(X',Y')}(M).
 \end{aligned}$$

(b) Teil (a) können wir nun nutzen, um die zweite gewünschte Aussage zu zeigen. Hierzu definieren wir  $N_z := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y=z\}$  mit  $z \in \mathbb{R}$ . Somit folgt für  $M \subseteq \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}^{X+Y}(M) &= \mathbb{P}^{X+Y}\left(\bigcup_{\substack{z \in M: \\ \mathbb{P}(X+Y=z) > 0}} \{z\}\right) \\
 &= \sum_{\substack{z \in M: \\ \mathbb{P}(X+Y=z) > 0}} \mathbb{P}(X+Y=z) \\
 &= \sum_{\substack{z \in M: \\ \mathbb{P}^{(X,Y)}(N_z) > 0}} \mathbb{P}^{(X,Y)}(N_z) \\
 &= \sum_{\substack{z \in M: \\ \mathbb{P}^{(X',Y')}(N_z) > 0}} \mathbb{P}^{(X',Y')}(N_z) \\
 &= \sum_{\substack{z \in M: \\ \mathbb{P}'(X'+Y'=z) > 0}} \mathbb{P}'(X'+Y'=z) \\
 &= \mathbb{P}^{X'+Y'}\left(\bigcup_{\substack{z \in M: \\ \mathbb{P}'(X'+Y'=z) > 0}} \{z\}\right) \\
 &= \mathbb{P}^{X'+Y'}(M).
 \end{aligned}$$

### Aufgabe T3 (Fortsetzung von Aufgabe T3 auf Blatt 6)

Es seien  $X$  eine Zufallsvariable mit Werten in  $\{-1, 1, 2\}$  und  $Y$  eine Zufallsvariable mit Werten in  $\{0, 1\}$ . Die (gemeinsame) Verteilung von  $X$  und  $Y$  ist in der folgenden Tabelle dargestellt:

$j \backslash k$	-1	1	2	$\mathbb{P}(Y = j)$
0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{7}{24}$
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{17}{24}$
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	

- (a) Bestimmen Sie die Erwartungswerte  $\mathbb{E}[X]$ ,  $\mathbb{E}[Y]$ .  
(b) Bestimmen Sie die Kovarianz  $C(X, Y)$  von  $X$  und  $Y$ .

#### Lösungsvorschläge:

- (a) Es gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= 1 \cdot \frac{2}{3} + (-1) \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{6}, \\ \mathbb{E}[Y] &= 1 \cdot \frac{17}{24} = \frac{17}{24}.\end{aligned}$$

- (b) Zunächst ist

$$\mathbb{E}[XY] = (-1) \cdot \frac{1}{12} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{2}{3}.$$

Daher gilt

$$C(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \frac{2}{3} - \frac{5}{6} \cdot \frac{17}{24} = \frac{11}{144}.$$

### Aufgabe T4 (Eine obere Schranke für die Varianz von beschränkten Zufallsvariablen)

Es seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  und  $X$  eine diskrete Zufallsvariable mit  $a \leq X \leq b$ . Zeigen Sie:

$$\mathbb{V}(X) \leq \frac{(b-a)^2}{4}.$$

Zeigen Sie weiter, dass "=" genau dann gilt, wenn  $\mathbb{P}(X = a) = \mathbb{P}(X = b) = 1/2$ .

**Hinweis:** Der Abstand von  $X$  zum Mittelpunkt des Intervalls ist höchstens gleich der halben Intervallbreite.

#### Lösungsvorschlag:

Der Mittelpunkt des Intervalls  $[a, b]$  ist  $\frac{a+b}{2}$ . Da  $X$  im Intervall  $[a, b]$  liegt, gilt

$$\left| X - \frac{a+b}{2} \right| \leq \frac{b-a}{2}. \quad (1)$$

Wenn wir beide Seiten quadrieren und anschließend den Erwartungswert bilden, erhalten wir

$$\mathbb{E} \left[ \left( X - \frac{a+b}{2} \right)^2 \right] \leq \frac{(b-a)^2}{4}.$$

Nun folgt aus den Eigenschaften der Varianz mit  $t = \frac{a+b}{2}$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X) &= \mathbb{V}(X-t) = \mathbb{E}[(X-t)^2] - \mathbb{E}[X-t]^2 \\ \Rightarrow \mathbb{V}(X) &\leq \mathbb{E}[(X-t)^2] = \mathbb{E}\left[\left(X - \frac{a+b}{2}\right)^2\right]. \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir

$$\mathbb{V}(X) \leq \mathbb{E}\left[\left(X - \frac{a+b}{2}\right)^2\right] \leq \frac{(b-a)^2}{4}. \quad (2)$$

Damit Gleichheit gilt, muss in beiden Ungleichungen von (2) Gleichheit gelten. In der ersten Ungleichung gilt genau dann Gleichheit, wenn

$$\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}$$

gilt. In der 2. Ungleichung gilt genau dann Gleichheit, wenn in (1)  $\mathbb{P}$ -fast Gleichheit sicher gilt. Das bedeutet, es muss

$$\mathbb{P}\left(\left|X - \frac{a+b}{2}\right| = \frac{b-a}{2}\right) = 1$$

gelten. Wenn der Abstand zum Intervallmittelpunkt immer gleich der halben Intervalllänge ist, muss  $X$  also mit Wahrscheinlichkeit 1 einen Randwert annehmen:

$$\mathbb{P}(X = a) + \mathbb{P}(X = b) = 1.$$

Wir kombinieren die beiden Bedingungen und erhalten

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= a \cdot \mathbb{P}(X = a) + b \cdot \mathbb{P}(X = b) \stackrel{!}{=} \frac{a}{2} + \frac{b}{2} \\ \Leftrightarrow a \left( \frac{1}{2} - \underbrace{\mathbb{P}(X = a)}_{=1-\mathbb{P}(X=b)} \right) + b \left( \frac{1}{2} - \mathbb{P}(X = b) \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow a \left( -\frac{1}{2} + \mathbb{P}(X = b) \right) + b \left( \frac{1}{2} - \mathbb{P}(X = b) \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \left( \frac{1}{2} - \mathbb{P}(X = b) \right) (a - b) &= 0, \end{aligned}$$

was aufgrund der Voraussetzung  $a < b$  genau dann der Fall ist, wenn  $\mathbb{P}(X = a) = \mathbb{P}(X = b) = \frac{1}{2}$  gilt.

### Aufgabe T5 (Existenz von Zufallsvariablen mit kleinem Erwartungswert und großer Varianz)

Beweisen oder widerlegen Sie: Es existiert eine nicht-negative Zufallsvariable  $X$  mit den Eigenschaften

$$\mathbb{E}X \leq \frac{1}{1000} \quad \text{und} \quad \mathbb{V}(X) \geq 1000.$$

#### Lösungsvorschlag:

Eine solche Zufallsvariable existiert. Die Idee ist es, die Wahrscheinlichkeitsmasse auf möglichst wenige Punkte (also idealerweise nur 2) zu verteilen, die zudem weit auseinander liegen sollten. Um den Erwartungswert zu drücken, legen wir einen Großteil der Masse auf die 0, denn dann trägt diese nichts zum Erwartungswert bei. Konkret sei also

$$\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(X = n) = p \quad \text{für ein } n \in \mathbb{N} \text{ und ein } p \in (0, 1).$$

Damit gilt  $\mathbb{E}[X] = np$  und  $\mathbb{E}[X^2] = n^2p$ , also  $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = n^2p - n^2p^2 = n^2p(1-p)$ .

Damit  $\mathbb{E}[X]$  klein wird, wenn  $n$  groß ist, muss  $p$  entsprechend stark in  $n$  fallen. Beispielsweise ergeben sich mit  $p = n^{-\frac{3}{2}}$  die Gleichungen  $\mathbb{E}X = \frac{1}{\sqrt{n}}$  und  $\mathbb{V}(X) = \sqrt{n}(1 - n^{-\frac{3}{2}})$  (Nebenbemerkung: Um die Bedingung zu

erfüllen kann  $p = n^k$  mit  $k \in (-2, -1)$  gewählt werden, da genau für solche Exponenten die Varianz monoton wachsend und der Erwartungswert monoton fallend ist in  $n$ ). Für die konkrete Wahl von  $p$  gilt nun:

$$\mathbb{E}[X] \leq \frac{1}{1000} \iff \sqrt{n} \geq 10^3 \iff n \geq 10^6.$$

Wählt man beispielsweise nun  $n = 10^6 + 1$ , so ergibt sich  $\mathbb{V}(X) = \sqrt{10^6 + 1}(1 - (10^6 + 1)^{-\frac{3}{2}}) \approx 1000,0005$  und die zweite Bedingung ist ebenfalls erfüllt wie gewünscht. Man beachte, dass dann  $p = (10^6 + 1)^{-\frac{3}{2}} \approx 9,99 \cdot 10^{-10}$  gilt. Fast die gesamte Wahrscheinlichkeitsmasse liegt also tatsächlich auf der 0.

### Aufgabe T6 (Eigenschaften der Kovarianz)

Es existiere für jede der Zufallsvariablen  $X, X_1, \dots, X_n, Y, Y_1, \dots, Y_m$  das zweite Moment, wobei  $n, m \in \mathbb{N}$  gelte. Zeigen Sie für  $\alpha, a, a_1, \dots, a_n, \beta, b, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$  die folgenden Eigenschaften der Kovarianzfunktion:

- (a)  $\mathbb{C}(X, Y) = \mathbb{C}(Y, X)$ ,
- (b)  $\mathbb{C}(X, X) = \mathbb{V}(X)$ ,
- (c)  $\mathbb{C}(X + a, Y + b) = \mathbb{C}(X, Y)$ ,
- (d)  $\mathbb{C}(\alpha X, \beta Y) = \alpha\beta\mathbb{C}(X, Y)$ ,
- (e)  $\mathbb{C}(X_1 + X_2, Y_1 + Y_2) = \mathbb{C}(X_1, Y_1) + \mathbb{C}(X_1, Y_2) + \mathbb{C}(X_2, Y_1) + \mathbb{C}(X_2, Y_2)$ ,
- (f)  $\mathbb{V}\left(\sum_{j=1}^n X_j\right) = \sum_{j=1}^n \mathbb{V}(X_j) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{C}(X_i, X_j)$ ,
- (g)  $\mathbb{C}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i, \sum_{j=1}^m b_j Y_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j \mathbb{C}(X_i, Y_j)$ .

### Lösungsvorschlag:

Aufgrund der Symmetrie der Kovarianzfunktion können die Beweise in den Aufgabenteilen (c), (d), (e), (f) auch nur in einem Argument geführt werden. Zudem ist klar, dass aus Aufgabenteil (f) auch (d) und (e) folgen. Wir rechnen direkt nach mittels der Definition der Kovarianzfunktion:

- (a)  $\mathbb{C}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)] = \mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}Y)(X - \mathbb{E}X)] = \mathbb{C}(Y, X)$ .
- (b)  $\mathbb{C}(X, X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(X - \mathbb{E}X)] = \mathbb{V}(X)$ .
- (c) Hierfür verwenden wir die Linearität des Erwartungswertes

$$\begin{aligned} \mathbb{C}(X + a, Y + b) &= \mathbb{E}[(X + a - \mathbb{E}(X + a))(Y + b - \mathbb{E}(Y + b))] \\ &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)] \\ &= \mathbb{C}(X, Y). \end{aligned}$$

- (d) An dieser Stelle gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{C}(\alpha X, \beta Y) &= \mathbb{E}[(\alpha X - \mathbb{E}(\alpha X))(\beta Y - \mathbb{E}(\beta Y))] \\ &= \alpha\beta \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)] \\ &= \alpha\beta \mathbb{C}(X, Y). \end{aligned}$$

- (e) Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbb{C}(X_1 + X_2, Y_1 + Y_2) &= \mathbb{E}[(X_1 + X_2 - \mathbb{E}(X_1 + X_2))((Y_1 + Y_2) - \mathbb{E}(Y_1 + Y_2))] \\ &= \mathbb{E}[(X_1 - \mathbb{E}X_1 + X_2 - \mathbb{E}X_2)(Y_1 - \mathbb{E}Y_1 + Y_2 - \mathbb{E}Y_2)] \\ &= \mathbb{C}(X_1, Y_1) + \mathbb{C}(X_1, Y_2) + \mathbb{C}(X_2, Y_1) + \mathbb{C}(X_2, Y_2). \end{aligned}$$

(f) Wir berechnen

$$\begin{aligned}\mathbb{V}\left(\sum_{j=1}^n X_j\right) &= \mathbb{C}\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{j=1}^n X_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbb{C}(X_i, X_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_i) + \sum_{i \neq j} \mathbb{C}(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{C}(X_i, X_j).\end{aligned}$$

(g) Hier gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{C}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i, \sum_{j=1}^m b_j Y_j\right) &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i - \mathbb{E} \sum_{i=1}^n a_i X_i\right)\left(\sum_{j=1}^m b_j Y_j - \mathbb{E} \sum_{j=1}^m b_j Y_j\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^n a_i (X_i - \mathbb{E} X_i)\right)\left(\sum_{j=1}^m b_j (Y_j - \mathbb{E} Y_j)\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j (X_i - \mathbb{E} X_i)(Y_j - \mathbb{E} Y_j)\right] \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j \mathbb{C}(X_i, Y_j).\end{aligned}$$