Lösungen zu Tutoriumsblatt 11

Aufgabe T1 (Erzeugende Funktionen)

Es seien R_n die Anzahl der Rekorde in einer rein zufälligen Permutation der Zahlen $1, 2, \dots, n$ und A_j das Ereignis „j-te Zahl ist Rekord". Dann gilt

$$R_n = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{A_j},$$

$\mathbb{P}(A_j) = \frac{1}{j}$ und die Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ sind stochastisch unabhängig (siehe Vorlesung Kapitel 6). Bestimmen Sie die erzeugende Funktion von R_n.

Lösungsvorschlag: Aus der Vorlesung und Übung wissen wir, dass $\mathbb{P}(A_j) = 1/j$ gilt und dass die Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ stochastisch unabhängig sind und damit auch ihre Indikatorfunktionen. Demnach berechnen wir die erzeugende Funktion g_{R_n} mit Hilfe der Multiplikationsformel. Es ist

$$g_{R_n}(t) = \prod_{j=1}^{n} g_{\mathbb{1}_{A_j}}(t).$$

Es gilt weiter

$$\begin{aligned} g_{\mathbb{1}_{A_j}}(t) &= \mathbb{P}(\mathbb{1}_{A_j} = 0)t^0 + \mathbb{P}(\mathbb{1}_{A_j} = 1)t^1 \\ &= \left(1 - \frac{1}{j}\right) + \frac{1}{j}t = \frac{1}{j}(j - 1 + t) \end{aligned}$$

und somit

$$g_{R_n}(t) = \prod_{j=1}^{n} g_{\mathbb{1}_{A_j}}(t) = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{j}(j - 1 + t) = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(k + t).$$

Aufgabe T2 (Dynkin-Systeme)

Zeigen Sie:

(a) Jede σ-Algebra ist auch ein Dynkin-System.

(b) Jedes $\cap$-stabile Dynkin-System ist eine σ-Algebra.

(c) Abzählbare Durchschnitte von Dynkin-Systemen über Ω sind wieder Dynkin-Systeme.

Lösungsvorschlag:
Zunächst erinnern wir uns an die Definition eines Dynkin-Systems bzw. einer σ-Algebra:

Ein Mengensystem $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ heißt *Dynkin-System* über Ω, falls

(D1) $\Omega \in \mathcal{D}$

(D2) Für $D, E \in \mathcal{D}$ mit $D \subseteq E$ gilt $E \backslash D \in \mathcal{D}$.

(D3) Für $D_n \in \mathcal{D}$, $n \in \mathbb{N}$ paarweise disjunkt gilt $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \in \mathcal{D}$.

Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ heißt σ-*Algebra* über Ω, falls

(A1) $\emptyset \in \mathcal{A}$

(A2) Aus $A \in \mathcal{A}$ folgt $A^c \in \mathcal{A}$.

(A3) Für $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$ gilt $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

(a) Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra. Aus (A1) und (A2) folgt $\Omega = \emptyset^c \in \mathcal{A}$ und somit erfüllt $\mathcal{A}$ die Eigenschaft (D1). Seien nun $D, E \in \mathcal{A}$ mit $D \subseteq E$. Nach (A2) und (A3) gilt $E^c \cup D \in \mathcal{A}$ und somit auch

$$(E^c \cup D)^c = E \cap D^c = E \setminus D \in \mathcal{A},$$

wodurch $\mathcal{A}$ auch die Eigenschaft (D2) erfüllt. Die Eigenschaft (D3) folgt direkt aus (A3).

(b) Sei $\mathcal{D}$ ein $\cap$-stabiles Dynkin-System. Zusätzlich zu den definierenden Eigenschaften (D1)-(D3) gelte nun also

(D4) Aus $C, D \in \mathcal{D}$ folgt $C \cap D \in \mathcal{D}$.

Wir zeigen nun, dass $\mathcal{D}$ dann die Eigenschaften (A1)-(A3) einer σ-Algebra erfüllt. (Da wir Eigenschaft (A2) für den Nachweis der anderen Eigenschaften verwenden wollen, zeigen wir diese Eigenschaft zuerst.)

zu (A2) Sei $A \in \mathcal{D}$. Da wir das Komplement als $A^c = \Omega \backslash A$ schreiben können, folgt $A^c \in \mathcal{D}$ mithilfe von Eigenschaft (D1) und (D2).

zu (A1) Da $\Omega \in \mathcal{D}$ gilt und wir $\emptyset = \Omega^c$ schreiben können, folgt $\emptyset \in \mathcal{D}$.

zu (A3) Seien $A_n \in \mathcal{D}$, $n \in \mathbb{N}$ beliebig (nicht unbedingt paarweise disjunkt). Wir definieren paarweise disjunkte Mengen B_n, $n \in \mathbb{N}$, mittels

$$B_1 \coloneqq A_1, \qquad B_n \coloneqq A_n \Bigg\backslash \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} B_i \right), \ n \geqslant 2.$$

Induktiv folgt, dass $B_n \in \mathcal{D}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, denn $B_1 = A_1 \in \mathcal{D}$ ist trivialerweise erfüllt und falls $B_1, \ldots, B_n$ in $\mathcal{D}$ liegen, so folgt

$$B_{n+1} = A_{n+1} \Bigg\backslash \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i \right) = A_{n+1} \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i \right)^c \in \mathcal{D},$$

da $\cup_{i=1}^{n} B_i$ nach (D3) in $\mathcal{D}$ liegt und nach (A2) somit auch das Komplement und schließlich $\mathcal{D}$ $\cap$-stabil ist. Nun gilt

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{D}.$$

Damit sind alle Eigenschaften einer σ-Algebra gezeigt.

Bemerkung: Die Voraussetzung, dass $\mathcal{D}$ schnittstabil ist, wurde nur zum Nachweis von Eigenschaft (3) benötigt. Die anderen beiden Eigenschaften gelten für jedes Dynkin-System.

(c) Seien $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \ldots$ Dynkin-Systeme über Ω. Weiter definieren wir deren Durchschnitt

$$\mathcal{D} \coloneqq \cap_{i=1}^{\infty} \mathcal{D}_i$$

und weisen die Eigenschaften (D1)-(D3) für $\mathcal{D}$ nach.

zu (D1) Da $\Omega \in \mathcal{D}_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt, folgt insbesondere $\Omega \in \mathcal{D}$.

zu (D2) Seien nun $D, E \in \mathcal{D}$ mit $D \subseteq E$. Dann sind $D, E \in \mathcal{D}_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Da es sich um Dynkin-Systeme handelt, folgt $E \setminus D \in \mathcal{D}_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und daher $E \setminus D \in \mathcal{D}$.

zu (D3) Seien nun $D_1, D_2, ... \in \mathcal{D}$ paarweise disjunkt. Nach Definition sind $D_1, D_2, ... \in \mathcal{D}_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Da es sich um Dynkin-Systeme handelt, folgt $\cup_{j=1}^{\infty} D_j \in \mathcal{D}_i$ für alle $\in \mathbb{N}$ und daher $\cup_{j=1}^{\infty} D_j \in \mathcal{D}$.

Aufgabe T3 (Aus dem Beweis von Satz 18.11)

Es sei $\mathcal{M}$ ein $\cap$-stabiles Mengensystem und μ_1, μ_2 Maße auf $\sigma(\mathcal{M})$ mit $\mu_1(M) = \mu_2(M)$ für alle $M \in \mathcal{M}$. Außerdem sei $B \in \mathcal{M}$ mit $\mu_1(B) = \mu_2(B) < \infty$. Zeigen Sie, dass das Mengensystem

$$\mathcal{D}_B := \{A \in \sigma(\mathcal{M}) \mid \mu_1(B \cap A) = \mu_2(B \cap A)\}$$

ein Dynkin-System bildet.

Lösungsvorschlag:

Wir weisen die Eigenschaften (D1)-(D3) für $\mathcal{D}_B$ nach.

zu (D1) Aus den Voraussetzungen folgt direkt $\Omega \in \mathcal{D}_B$.

zu (D2) Seien nun $D, E \in \mathcal{D}_B$ mit $D \subseteq E$. Dann gilt insbesondere $D \cap B \subseteq E \cap B$ und wir erhalten

$$\begin{aligned} \mu_1\big((E \setminus D) \cap B\big) &= \mu_1\big((E \cap B) \setminus (D \cap B)\big) \\ &= \mu_1(E \cap B) - \mu_1(D \cap B) \\ &= \mu_2(E \cap B) - \mu_2(D \cap B) \\ &= \mu_2\big((E \cap B) \setminus (D \cap B)\big) \\ &= \mu_2\big((E \setminus D) \cap B\big). \end{aligned}$$

Nach Definition von $\mathcal{D}_B$ folgt daher $E \setminus D \in \mathcal{D}_B$.

zu (D3) Es seien $A_1, A_2, ... \in \mathcal{D}_B$ paarweise disjunkt. Dann gilt zunächst $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \sigma(\mathcal{M})$. Mithilfe der σ-Additivität der Maße μ_1, μ_2 folgt

$$\begin{aligned} \mu_1\left(B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)\right) &= \mu_1\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B \cap A_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu_1(B \cap A_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu_2(B \cap A_i) \\ &= \mu_2\left(B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)\right). \end{aligned}$$

Aufgabe T4 (Beispiel für ein allgemeines W-Maß)

Es sei $\Omega = \mathbb{R}^2$ und $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}^2$. Weiter sei $C \in \mathcal{A}$ mit positivem, endlichem Lebesgue-Maß $\lambda^2(C) > 0$. Zuletzt sei

$$\mathbb{P} : \mathcal{A} \to \mathbb{R},\ A \mapsto \mathbb{P}(A) := \frac{\lambda^2(A \cap C)}{\lambda^2(C)}.$$

Zeigen Sie, dass es sich bei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ um einen Wahrscheinlichkeitsraum handelt.

Lösungsvorschlag:

Dass $\Omega \neq \emptyset$ ist und $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über Ω ist, ist klar. Wir müssen also zeigen, dass die Eigenschaften (a)-(c) auf Definition 18.7 (Axiomensystem von Kolmogorov) erfüllt sind.

(a) Wir müssen zeigen, dass $\mathbb{P}(A) \geqslant 0$ für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt. Das ist direkt klar, denn $\lambda^2(C) > 0$ nach Voraussetzung und $\lambda^2(A \cap C) \geqslant 0$ für $A \in \mathcal{A}$, da das Lebesgue-Maß einer Menge stets nichtnegativ ist.

(b) Hier ist zu zeigen, dass $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ ist. Es gilt nach Definition von $\mathbb{P}$

$$\mathbb{P}(\Omega) = \frac{\lambda^2(\Omega \cap C)}{\lambda^2(C)} = \frac{\lambda^2(C)}{\lambda^2(C)} = 1.$$

(c) Nun seien $A_j \in \mathcal{A}$, $j \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt. Zu zeigen ist, dass

$$\mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j)$$

gilt. Wir erhalten

$$\mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \frac{\lambda^2\left(\left(\sum_{j=1}^{\infty} A_j\right) \cap C\right)}{\lambda^2(C)} = \frac{\lambda^2\left(\sum_{j=1}^{\infty}(A_j \cap C)\right)}{\lambda^2(C)} = \frac{\sum_{j=1}^{\infty} \lambda^2(A_j \cap C)}{\lambda^2(C)} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^2(A_j \cap C)}{\lambda^2(C)} = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j).$$

Dabei wurde verwendet, dass das Lebesgue-Maß Eigenschaft (c) aus Definition 18.7 erfüllt.

Aufgabe T5 ((K)Eine Verteilungsfunktion?)

F und G seien Verteilungsfunktionen (siehe Definition 18.13). Untersuchen Sie, ob und gegebenenfalls unter welchen Zusatzbedingungen die Funktionen

(i) $F_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $F_1(x) := \alpha F(x) + \beta G(x)$, $\alpha, \beta \geqslant 0$

(ii) $F_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $F_2(x) := F(G(x))$

Verteilungsfunktionen sind.

Lösungsvorschlag:

(i) Da F und G nach Voraussetzung Verteilungsfunktionen und damit rechtsseitig stetig und monoton wachsend sind und $\alpha, \beta \geqslant 0$ gilt, ist F_1 ebenfalls rechtsseitig stetig und monoton wachsend. Zudem gilt

$$\lim_{x\to-\infty} F_1(x) = \lim_{x\to-\infty}(\alpha F(x) + \beta G(x)) = \alpha \cdot \lim_{x\to-\infty} F(x) + \beta \cdot \lim_{x\to-\infty} G(x) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0.$$

Zuletzt müssen wir sicherstellen, dass $\lim_{x\to\infty} F_1(x) = 1$ gilt. Es gilt

$$\lim_{x\to\infty} F_1(x) = \lim_{x\to\infty}(\alpha F(x) + \beta G(x)) = \alpha \cdot \lim_{x\to\infty} F(x) + \beta \cdot \lim_{x\to\infty} G(x) = \alpha + \beta \overset{!}{=} 1.$$

Wir erkennen also die notwendige Zusatzbedingung $\alpha + \beta = 1$. Dann handelt es sich bei F_1 tatsächlich um eine Verteilungsfunktion.

(ii) Als Verknüpfung rechtsseitig stetiger, monoton wachsender Funktionen ist F_2 ebenfalls rechtsseitig stetig und monoton wachsend. Damit $F_2 = F \circ G$ eine Verteilungsfunktion ist, müssen noch

$$\lim_{x\to-\infty} F(G(x)) = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} F(G(x)) = 1$$

gelten. Es gilt

$$\lim_{x\to-\infty} F(G(x)) \overset{\text{F rechtsseitig stetig}}{=} F\left(\lim_{x\to-\infty} G(x)\right) = F(0).$$

Daher erhalten wir die notwendige Zusatzbedingung $F(0) = 0$, denn

$$\lim_{x\to-\infty} F_2(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad F(0) = 0.$$

Es bleibt die Eigenschaft $\lim_{x\to\infty} F_2(x) = 1$. Zunächst sehen wir ein, dass $F(1) = 1$ eine notwendige Bedingung ist. Angenommen, es würde $F(1) = 1 - \varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0$ gelten. Daraus folgt

$$F_2(x) = F(G(x)) \leqslant F(1) = 1 - \varepsilon \qquad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

da G als Verteilungsfunktion nach oben durch 1 beschränkt ist und F monoton wachsend ist. Somit wäre F_2 nach oben durch $1 - \varepsilon$ beschränkt und kann damit für $x \to \infty$ nicht gegen 1 konvergieren. Diese Bedingung ist allerdings noch nicht hinreichend. Wir unterscheiden daher 2 Fälle:

Fall 1: F ist in $x = 1$ stetig:

Dann gilt

$$\lim_{x\to\infty} F_2(x) = \lim_{x\to\infty} F(G(x)) = F\left(\lim_{x\to\infty} G(x)\right) \overset{G \text{ Verteilungsfunktion}}{=} F(1) = 1.$$

Fall 2: F ist in $x = 1$ nicht stetig:

Wenn F in $x = 1$ nicht stetig ist, gilt

$$F(1-) = \lim_{x \nearrow 1} F(x) < F(1) = 1.$$

Es gibt also ein $\varepsilon > 0$ mit $F(1-) = 1 - \varepsilon$. Damit trotzdem $\lim_{x\to\infty} F_2(x) = 1$ gilt, muss daher ein $x_0 \in \mathbb{R}$ existieren mit $G(x_0) = 1$. Andernfalls wäre

$$\lim_{x\to\infty} F(G(x)) = F(1-) = 1 - \varepsilon < 1$$

und F_2 damit keine Verteilungsfunktion. Tatsächlich ist die Existenz eines solchen $x_0 \in \mathbb{R}$ auch hinreichend, denn dann gilt

$$\lim_{x\to\infty} F(G(x)) = F(G(x_0)) = F(1) = 1.$$

Zusammenfassend erhalten wir, dass F_2 genau dann eine Verteilungsfunktion ist, wenn eines der folgenden Kriterien erfüllt ist:

- $F(1) = 1$ und F ist stetig in $x = 1$
- $F(1) = 1$ und es existiert ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $G(x_0) = 1$.