

Lösungen zu Tutoriumsblatt 12

Aufgabe T1 (Verteilungsfunktionen diskreter Verteilungen)

- (i) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion
- einer geometrischen Verteilung mit Parameter $p \in (0, 1)$.
 - einer diskreten Gleichverteilung auf der Menge $\{n, n+1, \dots, n+m\}$ mit $n, m \in \mathbb{N}_0$.
- (ii) Fertigen Sie zu der Verteilungsfunktion aus (b) eine Skizze an mit den Parametern $n = 1$, $m = 3$.
- (iii) Betrachten Sie die Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{4}x, & 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{8}x + \frac{5}{8}, & 1 \leq x \leq 3, \\ 1, & 3 < x. \end{cases}$$

Es sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F . Zeigen Sie, dass es sich um eine Verteilungsfunktion handelt und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}\left(\frac{1}{2} < X \leq 2\right)$.

Lösung

- (i) (a) Wir betrachten zunächst $l \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$F(l) = \mathbb{P}((-\infty, l]) = \sum_{k=0}^l \mathbb{P}(\{k\}) = p \cdot \sum_{k=0}^l (1-p)^k = p \cdot \frac{1 - (1-p)^{l+1}}{1 - (1-p)} = 1 - (1-p)^{l+1}, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Die Verteilungsfunktion ist für beliebige reelle Funktionsargumente definiert, obwohl die geometrische Verteilung nur für natürliche Zahlen positive Wahrscheinlichkeiten aufweist. Für $x < 0$ gilt offensichtlich $F(x) = 0$ und für $x \geq 0$

$$F(x) = \mathbb{P}((-\infty, x]) = \sum_{\substack{k \in \mathbb{N}_0, \\ k \leq x}} p(1-p)^k = p \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} (1-p)^k = 1 - (1-p)^{\lfloor x \rfloor + 1}.$$

Insgesamt erhalten wir also

$$F(x) = \left(1 - (1-p)^{\lfloor x \rfloor + 1}\right) \cdot \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}}.$$

- (b) Für die Gleichverteilung auf $\{n, \dots, n+m\}$ gilt

$$\mathbb{P}(\{k\}) = \begin{cases} 0, & k < n \text{ oder } k > n+m, \\ \frac{1}{m+1}, & n \leq k \leq n+m \end{cases}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

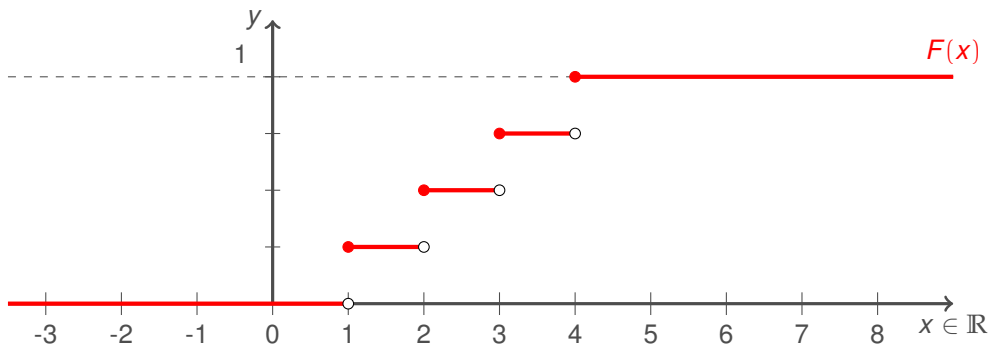
Für $l \in \mathbb{N}$ ist die Verteilungsfunktion von \mathbb{P} dann

$$F(l) = \mathbb{P}((-\infty, l]) = \sum_{k=0}^l \mathbb{P}(\{k\}) = \begin{cases} 0, & l < n \\ \frac{l-n+1}{m+1}, & n \leq l \leq n+m, \quad l \in \mathbb{N}. \\ 1, & n+m < l \end{cases}$$

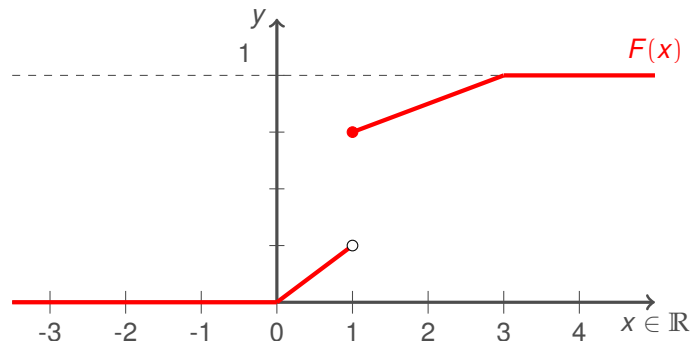
Analog zu (a) können wir die obige Funktion mit Hilfe der unteren Gaußklammer auf die reellen Zahlen fortsetzen und erhalten für $x \in \mathbb{R}$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \lfloor x \rfloor < n, \\ \frac{\lfloor x \rfloor - n + 1}{m+1}, & n \leq \lfloor x \rfloor \leq n+m, \\ 1, & \lfloor x \rfloor > m+n, \end{cases} = \begin{cases} 0, & x < n, \\ \frac{\lfloor x \rfloor - n + 1}{m+1}, & n \leq x < m+n+1, \\ 1, & x \geq m+n+1. \end{cases}$$

- (ii) Die Verteilungsfunktion der Gleichverteilung für $n = 1, m = 3$: (an den Sprungstellen ist jeweils der rote Punkt der Funktionswert):



- (iii) Die definierenden Eigenschaften einer Verteilungsfunktion (Monotonie, rechtsseitige Stetigkeit, $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$) erfüllt F nach Konstruktion. Die folgende Darstellung der Funktion zeigt ebenfalls, dass die drei Eigenschaften erfüllt sind:



Zudem gilt

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{2} < X \leq 2\right) = \mathbb{P}(X \leq 2) - \mathbb{P}\left(X \leq \frac{1}{2}\right) = F(2) - F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{8} - \frac{1}{8} = \frac{3}{4}.$$

Aufgabe T2 (Verteilungsfunktionen)

Die Zufallsvariable X sei auf dem Intervall $[a, b]$, $a < b$, gleichverteilt.

- (i) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von X .
 (ii) Es seien jetzt $a = 0, b = 1$ und

$$Y := \min\{X, 1 - X\}$$

der Abstand von X zum Rand von $[0, 1]$. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von Y . Welche Verteilung besitzt Y ?

Lösung

- (i) Nach Vorlesung besitzt X die Dichte $f(x) := \frac{1}{b-a} \mathbb{1}\{a \leq x \leq b\}$. Für die Verteilungsfunktion F von X erhalten wir

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{b-a} \mathbb{1}\{a \leq t \leq b\} dt = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 1, & b < x. \end{cases}$$

- (ii) Da X nur Werte im Intervall $[0, 1]$ annimmt, kann Y nur Werte im Intervall $[0, \frac{1}{2}]$ annehmen. Somit gelten

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \leq t) &= 0 & \text{für } t < 0, \\ \mathbb{P}(Y \leq t) &= 1 & \text{für } t > \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Für $t \in [0, \frac{1}{2}]$ gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \leq x) &= \mathbb{P}(\min\{X, 1-X\} \leq x) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\min\{X, 1-X\} > x) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X > x, 1-X > x) \\ &= 1 - \mathbb{P}(x < X < 1-x) \\ &= 1 - \int_x^{1-x} 1 dt \\ &= 1 - (1-x-x) = 2x. \end{aligned}$$

Da $2x = \frac{x-a}{b-a}$ für $a = 0, b = \frac{1}{2}$ gilt, folgt aus Aufgabenteil (i), dass Y eine Gleichverteilung auf $[0, \frac{1}{2}]$ besitzt.

Alternativer Lösungsansatz: Für $x \in \mathbb{R}$ gilt nach Teil (i)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \leq x) &= \mathbb{P}(X \leq 1-X, X \leq x) + \mathbb{P}(X > 1-X, 1-X \leq x) \\ &= \mathbb{P}(X \leq \frac{1}{2}, X \leq x) + \mathbb{P}(X > \frac{1}{2}, X \geq 1-x) \\ &= \mathbb{P}(X \leq \min\{x, \frac{1}{2}\}) + \mathbb{P}(X \geq \max\{1-x, \frac{1}{2}\}) \\ &= \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x + 1 - (1-x), & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}, & x > \frac{1}{2} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 1, & x > \frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich wieder nach Aufgabenteil (i), dass Y eine Gleichverteilung auf $[0, \frac{1}{2}]$ besitzt.

Aufgabe T3 (Dichte mit einem Parameter I)

Es sei $\sigma > 0$ und

$$f(x) = c \cdot e^{-\sigma \cdot |x|}, \quad x \in \mathbb{R},$$

für einen Parameter $c \in \mathbb{R}$.

- (i) Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}$ so, dass f eine Dichtefunktion ist.
- (ii) Bestimmen Sie die zu f gehörige Verteilungsfunktion F .
- (iii) Es sei \mathbb{P} das zu f gehörige Wahrscheinlichkeitsmaß. Bestimmen Sie $\mathbb{P}(A)$ und $\mathbb{P}(B)$, wobei

$$A := \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq |x|\}, \quad B := \{x \in \mathbb{R} \mid |x-5| < 2\}.$$

Lösung

- (i) Da eine Wahrscheinlichkeitsdichte nichtnegativ sein muss, muss $c \geq 0$ gelten. Zudem muss die Dichte integrierbar und

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

gelten. Wir berechnen also das obige Integral und erhalten

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= c \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma|x|} dx = c \left(\int_{-\infty}^0 e^{\sigma x} dx + \int_0^{\infty} e^{-\sigma x} dx \right) \\ &= c \cdot 2 \cdot \int_0^{\infty} e^{-\sigma x} dx = 2c \left[-\frac{1}{\sigma} e^{-\sigma x} \right]_0^{\infty} = \frac{2c}{\sigma} \stackrel{!}{=} 1. \end{aligned}$$

Somit muss $c = \frac{\sigma}{2}$ gelten. (Beachte, dass c dann insbesondere nichtnegativ ist.)

- (ii) Wir berechnen die Verteilungsfunktion F mittels

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy.$$

Zunächst sei $x \leq 0$. Dann gilt

$$F(x) = \frac{\sigma}{2} \int_{-\infty}^x e^{\sigma y} dy = \frac{1}{2} [e^{\sigma y}]_{-\infty}^x = \frac{1}{2} e^{\sigma x}.$$

Nun sei $x > 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{\sigma}{2} \left(\int_{-\infty}^0 e^{\sigma y} dy + \int_0^x e^{-\sigma y} dy \right) = \frac{1}{2} \left([e^{\sigma y}]_{-\infty}^0 + [-e^{-\sigma y}]_0^x \right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} e^{-\sigma x}. \end{aligned}$$

Insgesamt ist also

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{\sigma x}, & x \leq 0, \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-\sigma x}, & x > 0. \end{cases}$$

- (iii) Es gilt

$$A = (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$$

und daher

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \int_A f(x) dx = \int_{-\infty}^{-2} f(x) dx + \int_2^{\infty} f(x) dx \\ &= F(-2) + 1 - F(2) \\ &= \frac{1}{2} e^{-2\sigma} + 1 - \left(1 - \frac{1}{2} e^{-2\sigma} \right) = e^{-2\sigma}. \end{aligned}$$

Die Menge B können wir wie folgt umschreiben

$$B = (3, 7).$$

Somit erhalten wir

$$\mathbb{P}(B) = \int_3^7 f(x) dx = F(7) - F(3) = \frac{1}{2} (e^{-3\sigma} - e^{-7\sigma}).$$

Aufgabe T4 (Dichte mit einem Parameter II)

Wir betrachten die Dichte

$$f(x) := \begin{cases} c \cdot e^{-2(x-3)}, & x \geq 3, \\ c, & 2 \leq x < 3, \\ 0, & x < 2, \end{cases}$$

für ein geeignetes $c \in \mathbb{R}$ und bezeichnen mit \mathbb{P} das zugehörige Wahrscheinlichkeitsmaß.

- (i) Bestimmen Sie c so, dass f tatsächlich eine Dichte ist.
- (ii) Bestimmen Sie die zugehörige Verteilungsfunktion.
- (iii) Berechnen Sie $\mathbb{P}([\frac{5}{2}, 4])$.

Lösung

- (i) Da $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten muss, muss auch $c \geq 0$ gelten. Des Weiteren muss die Bedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

erfüllt sein, d.h.

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx + \int_3^{\infty} f(x) dx = \int_2^3 c dx + \int_3^{\infty} ce^{-2(x-3)} dx \\ &= c + c \cdot \left[-\frac{1}{2} \cdot e^{-2(x-3)} \right]_3^{\infty} = \frac{3c}{2}. \end{aligned}$$

Damit folgt $c = \frac{2}{3}$.

- (ii) Mit

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt, \quad t \in \mathbb{R},$$

berechnet sich F zu

$$F(x) = \begin{cases} \int_2^3 c dt + c \int_3^x e^{-2(t-3)} dt = c + \frac{c}{2} \cdot (1 - e^{-2(x-3)}) = 1 - \frac{1}{3} e^{-2(x-3)}, & x \geq 3, \\ \int_2^x c dt = \frac{2}{3} \cdot (x-2), & 2 \leq x < 3, \\ 0, & x < 2. \end{cases}$$

- (iii) Es gilt

$$\mathbb{P}([\frac{5}{2}, 4]) = \int_{\frac{5}{2}}^4 f(x) dx = F(4) - F(\frac{5}{2}) = 1 - \frac{1}{3} e^{-2} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} e^{-2}.$$

Aufgabe T5 (Verteilungsfunktion von Maximum und Minimum unabhängiger Zufallsvariablen)

Es seien X_1, \dots, X_n , $n \in \mathbb{N}$, stochastisch unabhängige Zufallsvariablen und $F_j(x) := \mathbb{P}(X_j \leq x)$ die Verteilungsfunktion von X_j für $j \in [n]$.

- (i) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von $M_n := \max_{1 \leq j \leq n} X_j$.
- (ii) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von $m_n := \min_{1 \leq j \leq n} X_j$.

Lösung

- (i) Es gilt

$$\begin{aligned} F_{M_n}(x) &= \mathbb{P}(M_n \leq x) = \mathbb{P}\left(\max_{1 \leq j \leq n} X_j \leq x\right) = \mathbb{P}(X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x) \\ &\stackrel{(*)}{=} \prod_{j=1}^n \mathbb{P}(X_j \leq x) = \prod_{j=1}^n F_j(x). \end{aligned}$$

Hierbei gilt $(*)$ wegen der Unabhängigkeit der X_j .

(ii) Es gilt

$$\begin{aligned} F_{m_n}(x) &= \mathbb{P}(m_n \leq x) = \mathbb{P}\left(\min_{1 \leq j \leq n} X_j \leq x\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\min_{1 \leq j \leq n} X_j > x\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X_1 > x, \dots, X_n > x) \stackrel{(*)}{=} 1 - \prod_{j=1}^n \mathbb{P}(X_j > x) = 1 - \prod_{j=1}^n (1 - F_j(x)). \end{aligned}$$

Hierbei gilt (*) wieder wegen der Unabhängigkeit der X_j .

Aufgabe T6 (Erwartungswert und Varianz der Exponentialverteilung)

Es sei $Z \sim \text{Exp}(\lambda)$ exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Berechnen Sie $\mathbb{E}[Z]$, $\mathbb{V}(Z)$.

Lösung

Die Dichte von Z ist $f_Z(u) = \lambda e^{-\lambda u} \mathbb{1}_{\{u \geq 0\}}$. Mit partieller Integration erhalten wir

$$\mathbb{E}[Z] = \int_0^{\infty} u \lambda e^{-\lambda u} du \stackrel{\text{PI}}{=} \left[-u e^{-\lambda u} \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda u} du = \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda u} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

Ähnlich berechnet man

$$\mathbb{E}[Z^2] = \int_0^{\infty} u^2 \lambda e^{-\lambda u} du \stackrel{\text{PI}}{=} \left[-u^2 e^{-\lambda u} \right]_0^{\infty} + 2 \int_0^{\infty} u e^{-\lambda u} du = \frac{2}{\lambda} \mathbb{E}[Z] = \frac{2}{\lambda^2}$$

und somit $\mathbb{V}(Z) = \mathbb{E}[Z^2] - (\mathbb{E}[Z])^2 = \frac{1}{\lambda^2}$.