Lösungen zu Tutoriumsblatt 13

Aufgabe T1 (Transformation von Zufallsvariablen)

(i) Es sei $X \sim \mathrm{Exp}(1)$ und $\lambda > 0$. Zeigen Sie:
$$\frac{1}{\lambda}X \sim \mathrm{Exp}(\lambda).$$

(ii) Es sei $Y \sim \mathrm{U}_{(0,1)}$ und $\lambda > 0$. Zeigen Sie:
$$-\frac{1}{\lambda}\log(1-Y) \sim \mathrm{Exp}(\lambda).$$

(iii) Es sei $Z \sim \mathrm{U}_{(0,1)}$ und $T := e^{\lambda Z}$ für $\lambda > 0$. Berechnen Sie Dichte und Verteilungsfunktion von T.

Lösung

(i) Die Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung mit Parameter γ lautet
$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\gamma t}, & \text{falls } t > 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit ergibt sich für $t > 0$
$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{\lambda}X \leqslant t\right) = \mathbb{P}(X \leqslant \lambda t) = F_X(\lambda t) = 1 - e^{-\lambda t}$$
und für $t \leqslant 0$ gilt
$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{\lambda}X \leqslant t\right) = F_X(\lambda t) = 0.$$
Die Behauptung folgt, da die Verteilungsfunktion die Verteilung festlegt.

(ii) Die Verteilungsfunktion der Gleichverteilung auf $(0,1)$ ist gegeben durch
$$F_Y(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0, \\ t, & 0 < t < 1, \\ 1, & t \geqslant 1. \end{cases}$$

Damit ergibt sich für $t > 0$
$$\mathbb{P}\left(-\frac{1}{\lambda}\log(1-Y) \leqslant t\right) = \mathbb{P}\left(1 - Y \geqslant e^{-\lambda t}\right) = \mathbb{P}\left(Y \leqslant 1 - e^{-\lambda t}\right) = 1 - e^{-\lambda t},$$
da hier $0 < e^{-\lambda t} < 1$ gilt. Für $t \leqslant 0$ folgt $e^{-\lambda t} \geqslant 1$ und daher
$$\mathbb{P}\left(-\frac{1}{\lambda}\log(1-Y) \leqslant t\right) = \mathbb{P}\left(Y \leqslant 1 - e^{-\lambda t}\right) = 0.$$
Also besitzt $-\frac{1}{\lambda}\log(1-Y)$ eine $\mathrm{Exp}(\lambda)$-Verteilung.

(iii) Die Zufallsvariable Z ist gleichverteilt über $(0, 1)$, besitzt also die Verteilungsfunktion

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \leqslant 0, \\ z, & 0 < z < 1, \\ 1, & 1 \leqslant z. \end{cases}$$

Die transformierte Variable $T = e^{\lambda Z}$ nimmt Werte aus $(1, e^\lambda)$ an. Für $t \leqslant 1 = e^{\lambda \cdot 0}$ ist daher die Verteilungsfunktion $F_T(t) = 0$, für $t \geqslant e^\lambda = e^{\lambda \cdot 1}$ ist $F_T(t) = 1$ und dazwischen gilt

$$F_T(t) = \mathbb{P}(T \leqslant t) = \mathbb{P}(e^{\lambda Z} \leqslant t) = \mathbb{P}(Z \leqslant \tfrac{1}{\lambda}\log(t)) = F_Z(\tfrac{1}{\lambda}\log(t)) = \tfrac{1}{\lambda}\log(t), \qquad 1 < t < e^\lambda.$$

Die zugehörige Dichte finden wir durch Differenzieren:

$$f_T(t) = \frac{\partial}{\partial t} F_T(t) = \frac{1}{\lambda t} \cdot \mathbb{1}_{\{1 < t < e^\lambda\}}.$$

Bemerkung: Alternativ könnten wir in dieser Aufgabe mit der Dichtetransformationsformel (Satz 19.9) arbeiten.

Aufgabe T2 (Unabhängige Wartezeiten)

Sie stehen im Supermarkt als zweiter an der Kasse. Unter der Annahme, dass jeder Kunde an dieser Kasse unabhängig von allen anderen eine (mit $\lambda > 0$) $\mathrm{Exp}(\lambda)$-verteilte zufällige Zeit bedient wird: Wie wahrscheinlich ist es, dass Ihr Vordermann mehr als doppelt so lange bedient wird wie Sie?

Lösung

Es sei X Ihre eigene zufällige Bedienzeit und Y die Ihres Vordermanns. Nach Annahme gilt $X, Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ und X und Y sind unabhängig. Daher ist die gemeinsame Dichte

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = \lambda^2 \cdot e^{-\lambda(x+y)} \cdot \mathbb{1}\{x \geqslant 0 \text{ und } y \geqslant 0\}$$

beider Wartezeiten gerade das Produkt der einzelnen Exponentialdichten. Wir interessieren uns für das Ereignis $\{Y > 2X\}$, dass Ihr Vordermann mehr als doppelt so lange bedient wird wie Sie. Nun gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y > 2X) &= \int_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y > 2x\}} f_{X,Y}(x, y) \,\mathrm{d}(x, y) \\
&= \int_0^\infty \int_{2x}^\infty f_{X,Y}(x, y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty \lambda \left(\int_{2x}^\infty \lambda e^{-\lambda y} \mathrm{d}y \right) e^{-\lambda x} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty \lambda \left[-e^{-\lambda y} \right]_{y=2x}^\infty e^{-\lambda x} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty \lambda e^{-3\lambda x} \mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{1}{3} e^{-3\lambda x} \right]_0^\infty \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

und diese Wahrscheinlichkeit ist sogar unabhängig von der konkreten (durchschnittlichen) Bediengeschwindigkeit.

Aufgabe T3 (Additionsgesetz für die Normalverteilung)

X und Y seien unabhängige Zufallsvariablen mit $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ und $Y \sim \mathcal{N}(\nu, \tau^2)$. Zeigen Sie:

$$X + Y \sim \mathcal{N}(\mu + \nu, \sigma^2 + \tau^2).$$

Hinweis: Überlegen Sie sich zuerst, dass (und warum!) Sie o.B.d.A. $\mu = \nu = 0$ betrachten können.

Lösung

Aus der Vorlesung wissen wir, dass $X - \mu \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ und $Y - \nu \sim \mathcal{N}(0, \tau^2)$ gilt. Haben wir die Aussage also für den Fall $\mu = \nu = 0$ gezeigt, so folgt die Behauptung durch Addieren der Konstanten. Also sei o.B.d.A. $\mu = \nu = 0$. Wir berechnen nun die Dichte von $X + Y$ mit Hilfe der Faltungsformel:

$$\begin{aligned}
f_{X+Y}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t) f_Y(x-t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma^2\tau^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{t^2}{\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-t)^2}{\tau^2}\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma^2\tau^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(t^2 \underbrace{\left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau^2}\right)}_{=:c} - \frac{2xt}{\tau^2} + \frac{x^2}{\tau^2}\right)\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma^2\tau^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\left(t\sqrt{c} - \frac{x}{\sqrt{c}\tau^2}\right)^2 + \frac{x^2}{\tau^2} - \left(\frac{x}{\tau^2\sqrt{c}}\right)^2\right)\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma^2\tau^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\tau^2+\sigma^2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}c\left(t - \underbrace{\frac{x}{c\tau^2}}_{=:d}\right)^2\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma^2\tau^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\tau^2+\sigma^2}\right) \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{c}}.
\end{aligned}$$

Für die letzte Gleichheit wurde verwendet, dass $\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}c\,(t-d)^2\right)\,\mathrm{d}t = 1$ gilt (Integral über die Dichte einer $\mathcal{N}(d, \frac{1}{c})$-Verteilung). Wegen $\sqrt{c} = \frac{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}{\sqrt{\sigma^2\tau^2}}$ folgt daraus die Behauptung, denn wir haben am Ende gerade

$$f_{X+Y}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma^2+\tau^2)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\tau^2+\sigma^2}\right),$$

die Dichte einer $\mathcal{N}(0, \sigma^2 + \tau^2)$-Verteilung.

Aufgabe T4 (Gleichverteilte Zufallsvektoren)

(i) Der Zufallsvektor (X, Y) besitze eine Gleichverteilung auf der Menge

$$B = \left\{(x, y) \in [0, 1]^2 \,\middle|\, x - \tfrac{1}{2} \leqslant y \leqslant x + \tfrac{1}{2}\right\}.$$

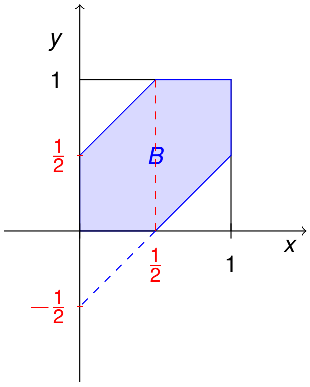
Bestimmen Sie die Dichten der Randverteilungen von X und Y. Sind X und Y stochastisch unabhängig?

(ii) Der zweidimensionale Zufallsvektor $X = (X_1, X_2)$ besitze eine Gleichverteilung auf dem Einheitskreis $B^2 := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leqslant 1\}$, wobei $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ die euklidische Norm von $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ist. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von $\|X\|$.

Hinweis: Verwenden Sie Polarkoordinaten.

Lösung

(i) Zunächst eine Skizze:



Bezeichne $\lambda^2(B)$ den Flächeninhalt (d. h. das Lebesgue-Maß) von B. Die gemeinsame Dichte von X und Y ist dann $f(x, y) = \frac{1}{\lambda^2(B)} \mathbb{1}_B(x, y)$ und wir wollen zunächst $\lambda^2(B)$ bestimmen. Dazu sei $\tilde{B} = [0, 1]^2 \setminus B = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : y > x + \frac{1}{2} \text{ oder } y < x - \frac{1}{2}\}$.
Der Flächeninhalt von $\tilde{B}$ ist damit

$$\lambda^2(\tilde{B}) = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} = \frac{1}{4}$$

und es folgt $\lambda^2(B) = \frac{3}{4}$. Die gemeinsame Dichte von X und Y ist also

$$f(x, y) = \frac{4}{3} \mathbb{1}_B(x, y).$$

Wegen $f(x, y) = f(y, x)$ folgt, dass die Randverteilungen von X und Y gleich sind. Bezeichne mit f_1 die zugehörige Dichte, die wir nun berechnen wollen.
Definiere dazu

$$g(x) := \max\left\{0, x - \tfrac{1}{2}\right\} \text{ und } h(x) := \min\{x + \tfrac{1}{2}, 1\}.$$

Dann ist $B = \left\{(x, y) \in [0, 1]^2 \ : \ g(x) \leqslant y \leqslant h(x)\right\}$ und somit

$$f_1(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)\, \mathrm{d}y = \begin{cases} \int_0^{x+\frac{1}{2}} f(x, y)\mathrm{d}y = \frac{4}{3} \cdot (x + \frac{1}{2}), & 0 \leqslant x < \frac{1}{2}, \\ \int_{x-\frac{1}{2}}^{1} f(x, y)\mathrm{d}y = \frac{4}{3}(\frac{3}{2} - x), & \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

X und Y sind nicht stochastisch unabhängig, da $f(x, y) \neq f_1(x) \cdot f_1(y)$.

(ii) Für $t \geqslant 0$ gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|X| \leqslant t) &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}\left\{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leqslant \min\{t, 1\}\right\} \mathrm{d}(x_1, x_2) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\min\{t,1\}} \int_0^{2\pi} r \,\mathrm{d}\varphi \mathrm{d}r \\ &= 2 \int_0^{\min\{t,1\}} r \,\mathrm{d}r = \frac{2(\min\{t, 1\})^2}{2} = (\min\{t, 1\})^2. \end{aligned}$$

Aufgabe T5 (Transformationssatz für Erwartungswerte)
Es sei X gleichverteilt auf $[0, 1]$ und $Y := e^{\lambda X}$ für ein $\lambda > 0$.

(i) Berechnen Sie die Dichte und die Verteilungsfunktion von Y.

(ii) Bestimmen Sie $\mathbb{E}[Y]$ sowohl mit Hilfe der Dichte von Y als auch über die Transformationsformel (Satz 18.24).

Lösung

(i) Die Zufallsvariable X ist gleichverteilt über $[0,1]$, besitzt also die Verteilungsfunktion (vgl. Aufgabe T2 von Tutoriumsblatt 12)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1, & 1 < x. \end{cases}$$

Die transformierte Variable $Y = e^{\lambda X}$ nimmt Werte aus $[1, e^\lambda]$ an. Für $y < 1 = e^{\lambda \cdot 0}$ ist daher die Verteilungsfunktion $F_Y(y) = 0$, für $y > e^\lambda = e^{\lambda \cdot 1}$ ist $F_Y(y) = 1$ und dazwischen gilt

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leqslant y) = \mathbb{P}(e^{\lambda X} \leqslant y) = \mathbb{P}(X \leqslant \tfrac{1}{\lambda}\log(y)) = F_X(\tfrac{1}{\lambda}\log(y)) = \tfrac{1}{\lambda}\log(y), \ 1 \leqslant y \leqslant e^\lambda.$$

Die zugehörige Dichte finden wir durch Differenzieren:

$$f_Y(y) = \frac{\partial}{\partial y} F_Y(y) = \frac{1}{\lambda y} \cdot \mathbb{1}\{1 \leqslant y \leqslant e^\lambda\}.$$

(ii) Der direkte Ansatz liefert

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_Y(y)\,\mathrm{d}y = \int_1^{e^\lambda} y \cdot \frac{1}{\lambda y}\,\mathrm{d}y = \frac{e^\lambda - 1}{\lambda}.$$

Alternativ können wir Y auf X zurückführen und die Transformationsformel anwenden:

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[e^{\lambda X}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 e^{\lambda x} \cdot 1\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{\lambda} e^{\lambda x}\right]_{x=0}^{1} = \frac{e^\lambda - 1}{\lambda}.$$

Aufgabe T6 (Cauchy-Verteilung)

Die Verteilung mit Dichtefunktion

$$f(x) \; = \; \frac{\beta}{\pi(\beta^2 + (x-\alpha)^2)}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

heißt Cauchy-Verteilung mit Parametern $\beta > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

(i) Es sei $W \sim \mathcal{U}_{(0,1)}$. Zeigen Sie, dass $T := \tan(\pi W)$ eine Cauchy-Verteilung mit Parametern $\beta = 1$ und $\alpha = 0$ besitzt.

(ii) Es seien X, Y unabhängige standardnormalverteilte Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass $\frac{X}{Y}$ eine Cauchy-Verteilung mit Parametern $\beta = 1$ und $\alpha = 0$ besitzt.
Hinweis: Verwenden Sie dafür die Darstellung von Folie 19.27 für unabhängige standardnormalverteilte Zufallsvariablen.

(iii) Die Zufallsvariable Z besitze eine Cauchy-Verteilung mit Parametern $\beta > 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}[Z]$ nicht existiert.

(iv) Berechnen Sie die Quantilfunktion einer Cauchy-Verteilung mit Parametern $\beta = 1$ und $\alpha = 0$.

Lösung

(i) Aus dem Verlauf des Graphens der Tangensfunktion auf dem Intervall $(0, \pi)$ ergibt sich für $x \geqslant 0$

$$\mathbb{P}(T \leqslant x) \; = \; \frac{1}{2} + \mathbb{P}\left(W \leqslant \frac{1}{\pi}\arctan(x)\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(x).$$

Da außerdem $T \sim -T$ gilt, folgt für $x < 0$

$$\mathbb{P}(T \leqslant x) \;=\; 1 - \mathbb{P}(T \leqslant -x) \;=\; \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(x).$$

Ableiten liefert die Dichte

$$f_T(x) \;=\; \frac{1}{\pi(1+x^2)},$$

wodurch sich die Behauptung ergibt.

(ii) Sind $U, V \sim \mathcal{U}_{(0,1)}$ unabhängig, so sind nach Vorlesung (Folie 19.27) die beiden Zufallsvariablen

$$\sqrt{-2\ln U}\sin(2\pi V), \qquad \sqrt{-2\ln U}\cos(2\pi V)$$

unabhängig und standardnormalverteilt. Also gelte o.B.d.A.

$$X \;=\; \sqrt{-2\ln U}\sin(2\pi V), \qquad Y \;=\; \sqrt{-2\ln U}\cos(2\pi V).$$

Dann folgt

$$\frac{X}{Y} \;=\; \frac{\sin(2\pi V)}{\cos(2\pi V)} \;=\; \tan(2\pi V) \sim \tan(\pi V),$$

wobei im letzten Schritt die π-Periodizität des Tangens verwendet wurde. Die Behauptung folgt jetzt aus Aufgabenteil (i).

(iii) Da α ein Lageparameter ist, betrachten wir o.B.d.A. $\alpha = 0$ (warum?). Es gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|X|] &= \int_{-\infty}^{\infty} |x|\, f(x)\,\mathrm{d}x \\ &\geqslant \int_0^{\infty} x \cdot \frac{\beta}{\pi(\beta^2+x^2)}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\beta}{\pi}\left[\frac{1}{2}\log(\beta^2+x^2)\right]_0^{\infty} = \infty.\end{aligned}$$

(iv) Wir berechnen zunächst die Verteilungsfunktion F und erhalten

$$F(x) \;=\; \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi(1+x^2)}\,\mathrm{d}t == \left[\frac{1}{\pi}\arctan(t)\right]_{-\infty}^{x} \;=\; \frac{1}{\pi}\arctan(x) + \frac{1}{2}.$$

Da diese Funktion stetig und streng monoton wachsend ist, erhalten wir die Quantilfunktion F^{-1} als Umkehrfunktion

$$F^{-1}(p) \;=\; \tan\left(\pi(p - \tfrac{1}{2})\right), \qquad p \in (0,1).$$