Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Stochastik

Einführung in die Stochastik (WS2024/25)
PD Dr. Steffen Winter
Dr. Tamara Göll. Dr. Dominik Pabst

Lösungen zu Tutoriumsblatt 14

Aufgabe T1 (ZGWS von de Moivre-Laplace)

Seien $A_1, ..., A_n$ unabhängige Ereignisse mit gleicher Wahrscheinlichkeit p.
Zeigen Sie, dass für jedes K mit $0 < K < \infty$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\sum_{j=1}^n \mathbb{1}\{A_j\} - n\cdot p\right| \geqslant K\right) = 1.$$

Lösungsvorschlag:

Wir betrachten die Zufallsvariablen $\mathbb{1}\{A_j\}$, $j \in [n]$. Durch die Unabhängigkeit der Ereignisse $A_1, ..., A_n$ sind auch die Zufallsvariablen $\mathbb{1}\{A_1\}, ..., \mathbb{1}\{A_n\}$ unabhängig. Außerdem gilt

$$\mathbb{P}\big(\mathbb{1}\{A_j\} = 1\big) \;=\; p \;=\; 1 - \mathbb{P}\big(\mathbb{1}\{A_j\} = 0\big), \qquad j \in [n].$$

Wir befinden uns also gerade in der Situation des zentralen Grenzwertsatzes von de Moivre-Laplace. Für gegebenes $K > 0$ und $\varepsilon > 0$ wähle n groß genug, sodass

$$\frac{K}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant \varepsilon$$

gilt. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left|\sum_{j=1}^n \mathbb{1}\{A_j\} - n\cdot p\right| \geqslant K\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(\left|\sum_{j=1}^n \mathbb{1}\{A_j\} - n\cdot p\right| < K\right)\\
&= 1 - \mathbb{P}\left(-K < \sum_{j=1}^n \mathbb{1}\{A_j\} - n\cdot p < K\right)\\
&= 1 - \mathbb{P}\left(\frac{-K}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{\sum_{j=1}^n \mathbb{1}\{A_j\} - n\cdot p}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{K}{\sqrt{np(1-p)}}\right)\\
&\geqslant 1 - \mathbb{P}\left(-\varepsilon < \frac{\sum_{j=1}^n \mathbb{1}\{A_j\} - n\cdot p}{\sqrt{np(1-p)}} < \varepsilon\right).
\end{aligned}$$

Grenzwertbildung auf beiden Seiten liefert schließlich mithilfe des ZWGS von de Moivre-Laplace

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\sum_{j=1}^n \mathbb{1}\{A_j\} - n\cdot p\right| \geqslant K\right) \geqslant 1 - \Phi(\varepsilon) + \Phi(-\varepsilon).$$

Für $\varepsilon \to 0$ folgt dann die Behauptung.

Aufgabe T2 (Parameterabhängiges Konvergenzverhalten)

$X_1, X_2, \ldots$ seien stochastisch unabhängige, je $\text{Bin}\left(1, \frac{1}{2}\right)$-verteilte Zufallsvariablen. Weiter sei $S_n := X_1 + \ldots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$, und $\alpha \in [0, 1]$. Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n \leqslant \alpha n) \quad = \quad \begin{cases} 0, & \alpha < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & \alpha = \frac{1}{2} \\ 1, & \alpha > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Lösungsvorschlag:
Wegen $X_1 \sim \text{Bin}\left(1, \frac{1}{2}\right)$ ist $\mathbb{E}[X_1] = \frac{1}{2}$ und $\mathbb{V}(X_1) = \frac{1}{4}$.

- Fall $\alpha < \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_n \leqslant \alpha n) &= \mathbb{P}\left(S_n - \frac{n}{2} \leqslant n\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mathbb{E}[X_1] \leqslant \underbrace{\alpha - \frac{1}{2}}_{<0}\right) \\ &\leqslant \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mathbb{E}[X_1]\right| \geqslant \frac{1}{2} - \alpha\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{(Schwaches Gesetz großer Zahlen).} \end{aligned}$$

- Fall $\alpha > \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_n \leqslant \alpha n) &= \mathbb{P}\left(S_n - \frac{n}{2} \leqslant n\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mathbb{E}[X_1] > \underbrace{\alpha - \frac{1}{2}}_{>0}\right) \\ &\geqslant 1 - \underbrace{\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mathbb{E}[X_1]\right| \geqslant \alpha - \frac{1}{2}\right)}_{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ (Schwaches Gesetz großer Zahlen)}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1. \end{aligned}$$

- Fall $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_n \leqslant \alpha n) &= \mathbb{P}\left(S_n \leqslant \frac{n}{2}\right) = \mathbb{P}\left(S_n - \frac{n}{2} \leqslant 0\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - n \cdot \mathbb{E}[X_1] \leqslant 0\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n \cdot \mathbb{E}[X_1]}{\sqrt{n \cdot \mathbb{V}(X_1)}} \leqslant 0\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Phi(0) = \frac{1}{2} \quad \text{(ZGWS von de Moivre-Laplace).} \end{aligned}$$

Aufgabe T3 (Fehlerkontrolle)

In einer Fabrik sind 25% aller von einer Maschine produzierten Teile defekt. Bei einer Kontrolle werden insgesamt 1200 rein zufällig und unabhängig voneinander ausgewählte Teile kontrolliert. Wir interessieren uns für die Zahl X der defekten Teile in dieser Stichprobe.

(a) Welche Verteilungsannahme ist sinnvoll für X? Geben Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung von X an.

(b) Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 275 und höchstens 325 Teile defekt sind, sowohl mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes als auch mit der Tschebyscheff-Ungleichung ab.

(c) Geben Sie, ebenfalls unter Verwendung des zentralen Grenzwertsatzes, eine Schätzung für die Anzahl von benötigten Ersatzteilen an, um mit einer Wahrscheinlichkeit von 96% alle gefundenen defekten Teile reparieren zu können.

Lösungsvorschlag:

(a) Weil die Teile rein zufällig und unabhängig voneinander ausgewählt werden und jeweils mit der selben Wahrscheinlichkeit defekt sind, können wir

$$X = \sum_{j=1}^{1200} \mathbb{1}\{\text{„}j\text{-tes Teil ist defekt“}\}$$

schreiben. Es gilt dann $X \sim \text{Bin}\left(1200, \frac{1}{4}\right)$. Damit ist $\mathbb{E}[X] = np = 300$, $\mathbb{V}(X) = np(1-p) = 225$ sowie $\sigma := \sqrt{\mathbb{V}(X)} = 15$.

(b) Mit dem zentralen Grenzwertsatz schätzt man folgendermaßen ab:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(275 \leqslant X \leqslant 325) &= \mathbb{P}\left(\frac{275-300}{15} \leqslant \frac{X-\mathbb{E}[X]}{\sqrt{\mathbb{V}(X)}} \leqslant \frac{325-300}{15}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(-\frac{5}{3} \leqslant \frac{X-\mathbb{E}[X]}{\sqrt{\mathbb{V}(X)}} \leqslant \frac{5}{3}\right) \\
&\overset{\text{ZGWS}}{\approx} \Phi\left(\frac{5}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{5}{3}\right) \\
&= 2\Phi\left(\frac{5}{3}\right) - 1 \\
&\approx 2 \cdot 0.9525 - 1 \\
&= 0.905.
\end{aligned}$$

Mit der Tschebyscheff-Ungleichung erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(275 \leqslant X \leqslant 325) &= \mathbb{P}\left(275-300 \leqslant X-\mathbb{E}[X] \leqslant 325-300\right) \\
&= \mathbb{P}\left(|X-\mathbb{E}[X]| \leqslant 25\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(|X-\mathbb{E}[X]| \geqslant 26\right) \\
&\geqslant 1 - \frac{\mathbb{V}(X)}{26^2} \\
&= 1 - \frac{225}{26^2} \approx 0.667.
\end{aligned}$$

Bemerkung: Man kann die gesuchte Wahrscheinlichkeit natürlich auch exakt berechnen. Daraus ergibt sich $\mathbb{P}(275 \leqslant X \leqslant 325) \approx 0.911$.

(c) Bezeichne mit s die Anzahl benötigter Ersatzteile. Wir suchen das kleinste $s \in \mathbb{N}$, sodass $\mathbb{P}(X \leqslant s) \geqslant 0.96$ gilt. Wegen

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X \leqslant s) = \mathbb{P}\left(\frac{X-\mathbb{E}[X]}{\sigma(X)} \leqslant \frac{s-300}{15}\right) \overset{\text{ZGWS}}{\approx} \Phi\left(\frac{s-300}{15}\right) \overset{!}{\geqslant} 0.96 \\
\iff \quad & \frac{s-300}{15} \geqslant \Phi^{-1}(0.96) \approx 1.76 \\
\iff \quad & s \geqslant 15 \cdot 1.76 + 300 = 326.4
\end{aligned}$$

ist das gerade für $s = 327$ Ersatzteile minimal erfüllt.

Aufgabe T4 (Bias-Varianz-Zerlegung)

Es sei $X = (X_1, \ldots, X_n)$ ein Zufallsvektor, dessen Komponenten unabhängig und identisch verteilt seien zur Verteilung $\mathbb{P}_\vartheta$, wobei ϑ ein unbekannter Parameter ist. Weiter sei T ein beliebiger Schätzer für ϑ. Zeigen Sie:

$$\text{MQA}_T(\vartheta) \;=\; \mathbb{V}_\vartheta(T) + (b_T(\vartheta))^2.$$

Lösungsvorschlag:

Wir erhalten durch direkte Rechnung mit $T = T(X_1, \dots, X_n)$

$$\begin{aligned}
\mathrm{MQA}_T(\vartheta) &= \mathbb{E}_\vartheta\left[(T-\vartheta)^2\right] \\
&= \mathbb{E}_\vartheta[T^2] - 2\vartheta\mathbb{E}_\vartheta[T] + \vartheta^2 \\
&= \mathbb{E}_\vartheta[T^2] - \mathbb{E}_\vartheta[T]^2 + \mathbb{E}_\vartheta[T]^2 - 2\vartheta\mathbb{E}_\vartheta[T] + \vartheta^2 \\
&= \mathbb{V}_\vartheta(T) + (\mathbb{E}_\vartheta[T]-\vartheta)^2.
\end{aligned}$$

Bemerkung: Für erwartungstreue Schätzer gilt also insbesondere $\mathrm{MQA}_T(\vartheta) = \mathbb{V}_\vartheta(T)$.

Aufgabe T5 (Momentenschätzer)

(a) Es seien $X_1, \dots, X_n \overset{\text{u.i.v}}{\sim} \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ mit unbekannten Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 > 0$. Bestimmen Sie den Momentenschätzer $(\widehat{\mu}(x), \widehat{\sigma}^2(x))$ basierend auf einer entsprechenden Stichprobe $x = (x_1, \dots, x_n)$.

(b) Es seien $X_1, \dots, X_n \overset{\text{u.i.v.}}{\sim} \mathrm{Nb}(r, p)$ mit unbekannten Parametern $r \in \mathbb{N}$ und $p \in (0,1)$. Bestimmen Sie den Momentenschätzer $(\widehat{r}(x), \widehat{p}(x))$ basierend auf einer entsprechenden Stichprobe $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Lösungsvorschlag:

(a) Wir stellen die Schätzgleichungen basierend auf den ersten beiden Momenten auf:

$$\begin{aligned}
\widehat{m}_1(x) &= \mathbb{E}_{(\mu,\sigma^2)}[X_1] = \mu, \\
\widehat{m}_2(x) &= \mathbb{E}_{(\mu,\sigma^2)}[X_1^2] = \mathbb{V}_{(\mu,\sigma^2)}(X_1) + \mathbb{E}_{(\mu,\sigma^2)}[X_1]^2 = \sigma^2 + \mu^2.
\end{aligned}$$

Der Momentenschätzer $\widehat{\mu}$ für μ ist also einfach das erste Stichprobenmoment

$$\widehat{m}_1(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j.$$

Für den Momentenschätzer für σ^2 stellen wir die zweite Schätzgleichung nach σ^2 um und setzen das erste und zweite Stichprobenmoment ein:

$$\widehat{\sigma}^2(x) = \widehat{m}_2(x) - \widehat{m}_1(x)^2.$$

(b) Zunächst erinnern wir uns daran, dass der Erwartungswert und die Varianz einer $\mathrm{Nb}(r,p)$-verteilten Zufallsvariablen X gegeben sind durch

$$\mathbb{E}[X] = r\frac{1-p}{p}, \qquad \mathbb{V}(X) = r\frac{1-p}{p^2}.$$

Das zweite Moment ist daher gegeben durch

$$\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{V}(X) + \mathbb{E}[X]^2 = r\frac{1-p}{p^2} + r^2\frac{(1-p)^2}{p^2}.$$

Wir erhalten somit die Schätzgleichungen

$$\begin{aligned}
\widehat{m}_1(x) &= r\frac{1-p}{p}, \\
\widehat{m}_2(x) &= r\frac{1-p}{p^2} + r^2\frac{(1-p)^2}{p^2}.
\end{aligned}$$

Die erste Gleichung stellen wir nach r um und erhalten

$$r = \frac{\widehat{m}_1(x)p}{1-p}.$$

Einsetzen in die zweite Gleichung liefert dann

$$\widehat{m}_2(x) = \frac{\widehat{m}_1(x)p}{1-p} \cdot \frac{1-p}{p^2} + \frac{\widehat{m}_1(x)^2 p^2}{(1-p)^2} \cdot \frac{(1-p)^2}{p^2} = \frac{\widehat{m}_1(x)}{p} + \widehat{m}_1(x)^2.$$

Umstellen nach p liefert den Momentenschätzer

$$\widehat{p}(x) = \frac{\widehat{m}_1(x)}{\widehat{m}_2(x) - \widehat{m}_1(x)^2}$$

für p und damit den Momentenschätzer

$$\widehat{r}(x) = \frac{\widehat{m}_1(x)^2}{\widehat{m}_2(x) - \widehat{m}_1(x) - \widehat{m}_1(x)^2}$$

für r.

Bemerkung: Der Parameter r der negativen Binomialverteilung muss eine natürliche Zahl sein. Der bestimmte Momentenschätzer erfüllt dies i.A. nicht. Dies zeigt nochmal auf, weshalb in der Definition eines Schätzers (Def. 21.1) eine Obermenge $\widetilde{\Theta}$ benötigt wird, in die der Schätzer für ϑ abbildet. Um den Schätzwert für r verwenden zu können, würde man vermutlich auf die nächste natürliche Zahl runden. Es ist allerdings zu beachten, dass es sich i.A. bei dem gerundeten Ergebnis dann nicht mehr um einen Momentenschätzer handelt (im Sinne der Definition aus der Vorlesung).

Aufgabe T6 (ML-Schätzer für die Poisson-Verteilung)

Es sei $X = (X_1, \ldots, X_n)$ ein Zufallsvektor, dessen Komponenten unabhängig und identisch poissonverteilt seien mit unbekanntem Parameter $\lambda > 0$.

(a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für λ.

(b) Zeigen Sie, dass der ML-Schätzer $\widehat{\lambda}_n$ aus Aufgabenteil (a) erwartungstreu ist und dass für alle $\varepsilon > 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_\vartheta\left(|\widehat{\lambda}_n - \lambda| \geqslant \varepsilon\right) = 0.$$

Lösungsvorschlag:

(a) Der Maximum-Likelihood-Schätzer ergibt sich wie folgt:

- Likelihood-Funktion:

$$L_x(\lambda) = \prod_{i=1}^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} = e^{-n\lambda} \frac{\lambda^{x_1+\ldots+x_n}}{\prod_{i=1}^n x_i!}, \qquad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}_0^n.$$

- Log-Likelihood-Funktion:

$$l_x(\lambda) = -n\lambda + \left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \log\lambda - \log\left(\prod_{i=1}^n x_i!\right)$$

- Ableiten und Nullstellen bestimmen

$$\frac{\mathrm{d} l_x(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} = -n + \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\lambda} \overset{!}{=} 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{x}.$$

- Maximumseigenschaft überprüfen

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}^2\vartheta} l_x(\vartheta) = -\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\lambda^2} < 0.$$

Also ist $\widehat{\lambda} = \overline{X}$ der gesuchte Maximum-Likelihood-Schätzer für λ.

(b) Zunächst gilt

$$\mathbb{E}_\lambda\left[\widehat{\lambda}_n\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}_\lambda[X_i] = \mathbb{E}_\lambda[X_1] = \lambda.$$

Damit ist $\widehat{\lambda}_n$ erwartungstreu für λ.
Die zweite Aussage folgt direkt aus dem schwachen Gesetz der großen Zahlen.

Aufgabe T7 (Maximum-Likelihood-Schätzer)

Es seien $X_1, \ldots, X_n$ stochastisch unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen

(a) Die Zufallsvariablen besitzen die Dichte

$$f_\lambda(x) := \begin{cases} 2\lambda x e^{-\lambda x^2}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases}$$

wobei der Parameter $\lambda > 0$ unbekannt ist. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für den Parameter λ.

(b) Die Zufallsvariable X_1 sei diskret mit Zähldichte

$$f_\vartheta(k) := (k+1)\frac{1}{\vartheta^2}\left(\frac{\vartheta-1}{\vartheta}\right)^k, \qquad k \in \mathbb{N}_0,$$

mit dem unbekannten Parameter $\vartheta \in (1, \infty)$. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für ϑ.

Lösungsvorschlag:

(a) Für $x = (x_1, ..., x_n) \in (0, \infty)^n$ ist die zu maximierende Likelihood-Funktion

$$L_x(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} 2\lambda x_i \exp\left(-\lambda x_i^2\right) = (2\lambda)^n \cdot \exp\left(-\lambda\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \cdot \prod_{i=1}^{n} x_i.$$

Statt die Likelihood-Funktion zu maximieren, maximieren wir die Log-Likelihood-Funktion:

$$l_x(\lambda) := \ln(L_x(\lambda)) = n\ln(2\lambda) - \lambda\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\ln(x_i).$$

Es ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} l_x(\lambda) = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \overset{!}{=} 0 \iff \lambda = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Wegen

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}^2\lambda} l_x(\lambda) = -\frac{n}{\lambda^2} < 0,$$

handelt es sich bei dem Extrempunkt um ein Maximum. Somit ist der Maximum-Likelihood-Schätzwert für λ gegeben durch

$$\widehat{\lambda} = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2}.$$

(b) Für $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{N}_0^n$ ist die Likelihood-Funktion gerade

$$L_x(\vartheta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \frac{1}{\vartheta^{2n}}\left(\frac{\vartheta-1}{\vartheta}\right)^{\sum_{i=1}^{n} x_i}\prod_{i=1}^{n}(x_i+1).$$

Die Log-Likelihood-Funktion ist daher gegeben durch

$$l_x(\vartheta) := \ln L_x(\vartheta) = -2n\ln(\vartheta) + \big(\ln(\vartheta-1) - \ln(\vartheta)\big)\sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n \ln(x_i+1).$$

Es gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta} l_x(\vartheta) = -\frac{2n}{\vartheta} + \sum_{i=1}^n x_i\left(\frac{1}{\vartheta-1} - \frac{1}{\vartheta}\right) = \frac{1}{(\vartheta-1)\vartheta}\left(-2n(\vartheta-1) + \sum_{i=1}^n x_i\right) \stackrel{!}{=} 0.$$

$$\iff \vartheta = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n x_i + 1 = \frac{\bar{x}}{2} + 1.$$

Da $\frac{1}{\vartheta(\vartheta-1)}$ positiv ist, gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta} l_x(\vartheta) \left\{ \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \right\} 0 \quad \iff \quad \vartheta \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n x_i + 1 = \frac{\bar{x}}{2} + 1,$$

d. h. $l_x(\vartheta)$ ist unterhalb von $\frac{\bar{x}}{2}+1$ steigend und danach fallend. Also ist $\widehat{\vartheta}(x) = \frac{\bar{x}}{2}+1$ die (einzige) Maximumstelle. Damit ist der gesuchte Maximum-Likelihood-Schätzer für ϑ gerade

$$\widehat{\vartheta} = \frac{\overline{X}}{2} + 1.$$