Karlsruher Institut für Technologie

Finanzmathematik in diskreter Zeit

Prof. Dr. Nicole Bäuerle

Institut für Stochastik (STOCH)

Organisatorisches

- Dozentin: Nicole Bäuerle (nicole.baeuerle@kit.edu)
- Übungsleiter: Sebastian Höfer (sebastian.hoefer@kit.edu)
- Erste Übung: Dienstag 4.11.25 (dafür Mi 5.11.25 zwei Vorlesungen)
- Übungsblätter und Vorlesungsfolien im ILIAS.
- Klausuren: Zwei Termine. Werden zentral vergeben (Anmeldung über CAS). Geplant: 27.02.26 und 30.03.26

Literatur/Skripte

- Buch ’Finanzmathematik in diskreter Zeit’, Springer. Elektronisch in KIT-Bibliothek.
- Weitere Lehrbücher auf der Webseite (z.T. als e-book in der KIT-Bibliothek).

Inhalt

- Bestimmung von Optionspreisen
- Europäische und Amerikanische Optionen
- Portfolio-Optimierung
- Nutzentheorie
- Risikomaße

1. Motivation und erste Begriffe

Derivate

Ein Derivat ist ein Vertrag, bei dem Zahlungen und Leistungen wesentlich von einer marktbezogenen Referenzgröße (Basiswert) abhängen (derivare = ableiten).

Beispiele für Derivate

Termingeschäfte: Verträge, bei denen die Erbringung von Leistung und Gegenleistung zu einem zukünftigen Zeitpunkt heute vereinbart werden.

- Warentermingeschäfte,
- Devisentermingeschäfte: Z.B. kaufe zum Zeitpunkt T, eine bestimmte Anzahl von US Dollar zu einem festgelegten Wechselkurs.
- Finanztermingeschäfte.
  Man unterscheidet hier *Financial Forwards* und *Financial Futures*.
  Futures werden an Märkten gehandelt, z.B. am CBOT (Chicago Board of Trade) und EUREX (European Exchange).

Optionen

Der Käufer der Option hat das Wahlrecht (aber nicht die Verpflichtung) ein bestimmtes Finanzgut (z.B. eine Aktie) (*underlying asset, underlying*) bis zu einem zukünftigen Zeitpunkt T (*maturity, expiry*) zu einem vereinbarten Preis K (*strike price, exercise price*, Basispreis, Ausübungspreis) zu kaufen oder zu verkaufen.

Das Kaufrecht wird *Call–Option* genannt und das Verkaufsrecht wird *Put–Option* genannt.

Optionen

Man unterscheidet:

- Europäische Option: Ausübung ist nur zum Zeitpunkt T möglich.
- Amerikanische Option: Ausübung ist jederzeit bis zum Zeitpunkt T möglich
- Und noch viel mehr...Bermuda–Option etc.

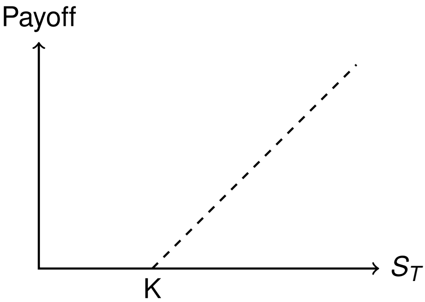
Beispiel: BVB Aktie

Beispiel: BVB Aktie

WKN	Basiswert	Emittent	Typ	Basis-preis	Implizierte Volatilität	Spread %	Laufzeit	Hebel	Bez.-verhält.	Bid	Ask
DDH7NC	Borussia Dortmund	DZ	Put	8,00	36,32	5,10%	19.06.2020	4,73	1,00	1,57	1,65
DDH7NB	Borussia Dortmund	DZ	Put	8,00	36,78	5,88%	20.12.2019	5,42	1,00	1,36	1,44
DDH7NA	Borussia Dortmund	DZ	Put	8,00	37,23	6,56%	20.09.2019	6,01	1,00	1,22	1,30
DD1Z4X	Borussia Dortmund	DZ	Put	8,00	37,69	6,54%	21.06.2019	6,85	1,00	1,07	1,14
DDF5KP	Borussia Dortmund	DZ	Put	7,00	36,24	7,00%	19.06.2020	7,30	1,00	1,00	1,07
DDH356	Borussia Dortmund	DZ	Put	7,50	37,37	7,53%	20.09.2019	7,81	1,00	0,93	1,00
DDH7M9	Borussia Dortmund	DZ	Put	8,00	38,14	9,20%	15.03.2019	8,22	1,00	0,87	0,95
DDF5KN	Borussia Dortmund	DZ	Put	7,00	36,36	8,75%	20.12.2019	8,98	1,00	0,80	0,87
DDG72P	Borussia Dortmund	DZ	Put	7,50	37,40	8,97%	21.06.2019	9,19	1,00	0,78	0,85
DDH355	Borussia Dortmund	DZ	Put	7,00	36,43	10,45%	20.09.2019	10,55	1,00	0,67	0,74
DD1Z4W	Borussia Dortmund	DZ	Put	8,00	39,50	10,94%	21.12.2018	11,00	1,00	0,64	0,71
DD1TCY	Borussia Dortmund	DZ	Put	7,20	37,06	12,90%	21.06.2019	11,16	1,00	0,62	0,70
DDG72N	Borussia Dortmund	DZ	Put	7,50	38,36	11,86%	15.03.2019	11,83	1,00	0,59	0,66
DDF5KM	Borussia Dortmund	DZ	Put	7,00	36,98	15,09%	21.06.2019	12,80	1,00	0,53	0,61
DDH354	Borussia Dortmund	DZ	Put	6,50	37,34	14,89%	20.09.2019	14,46	1,00	0,47	0,54
DD9CKD	Borussia Dortmund	DZ	Put	6,00	32,95	15,22%	19.06.2020	14,74	1,00	0,46	0,53
DDG72M	Borussia Dortmund	DZ	Put	7,50	38,86	22,22%	21.12.2018	17,75	1,00	0,36	0,44
DDD30E	Borussia Dortmund	DZ	Put	6,50	36,98	23,53%	21.06.2019	18,60	1,00	0,34	0,42
DDF5KL	Borussia Dortmund	DZ	Put	7,00	36,84	20,00%	15.03.2019	18,60	1,00	0,35	0,42

Beispiel: Preis einer europäischen Call–Option

- $t = 0$: aktueller Zeitpunkt, $T > 0$: Ausübungszeitpunkt,
- $(S_t)_{t\geq 0}$: stochastischer Aktienkursprozess,
- K: Basispreis.
- Auszahlung $H := \max\{S_T - K, 0\} = (S_T - K)^+$.



Beispiel: Preis einer europäischen Call–Option

Karlsruher Institut für Technologie

$S_1(\omega_1) = 20$ € mit W'keit p

$S_0 = 10$ €

$S_1(\omega_2) = 7.5$ € mit W'keit $1 - p$

Auszahlung des Calls bei $K = 15$:

$$H = (S_T - K)^+ = \begin{cases} 5 \text{ €} & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p, \\ 0 \text{ €} & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1 - p. \end{cases}$$

Beispiel: Preis einer europäischen Call–Option

Wir nehmen an, dass es als zusätzliche Investitionsmöglichkeit (neben der Aktie) in dem Markt noch ein Bankkonto mit Zinsatz $r = 0$ für Soll– und Habenpositionen gibt.

Was ist der Preis $\pi(H)$ für die Call-Option?

Idee: *No–arbitrage–Prinzip*: Es darf keine Arbitrage (risikoloser Gewinn) möglich sein. Die Auszahlung H wird mit anderen Finanzinstrumenten (hier Aktie und Bankkonto) repliziert. Das Anfangskapital, das nötig ist, um H zu replizieren, ist der Preis der Option.

Beispiel: Preis einer europäischen Call–Option

- Handelsstrategie (α, β).
- Anlage in die Aktie (Stückzahl): α.
- Anlage auf dem Bankkonto: β.
- $\alpha \in \mathbb{R}$. Leerverkauf $\alpha < 0$.

Wert des Portfolios zum Zeitpunkt $t = 0$:

$$V_0(\alpha, \beta) = \beta + \alpha S_0.$$

Wert des Portfolios zum Zeitpunkt $t = T$: (und $r = 0$)

$$V_T(\alpha, \beta) = \beta + \alpha S_T.$$

Beispiel: Preis einer europäischen Call–Option

Replizieren der Auszahlung: $V_T(\alpha, \beta) = H$, d.h.

$$\beta + \alpha S_T(\omega) = H(\omega), \quad \omega \in \{\omega_1, \omega_2\}.$$

Gleichungssystem mit zwei Gleichungen:

$$\beta + \alpha\, 20 = 5 \text{ für } \omega_1,$$
$$\beta + \alpha\, 7.5 = 0 \text{ für } \omega_2.$$

Lösen nach α, β liefert $\alpha = \frac{2}{5}$ und $\beta = -3$.
Damit ist $V_0(\frac{2}{5}, -3) = -3 + \frac{2}{5} 10 = 1$.

Beispiel: Preis einer europäischen Call–Option

Die replizierende Strategie (Hedging–Strategie) für H ist:
Leihe heute 3 € und kaufe $\frac{2}{5}$ Aktien. Gesamtinvestition: 1 €.

Zum Zeitpunkt T gibt es zwei Szenarien:

- $S_T = 20$. Verkauf der Aktie liefert $\frac{2}{5}20 = 8$.
  Zahle Kredit zurück (3). Es bleiben 5 €.
- $S_T = 7.5$. Verkauf der Aktie liefert $\frac{2}{5}\frac{15}{2} = 3$.
  Zahle Kredit zurück (3). Es bleiben 0 €.

Beispiel: Preis einer europäischen Call–Option

Karlsruher Institut für Technologie

Der *faire* Preis der Option ist $\pi(H) = 1$ €:

Annahme $\pi(H) > 1$: Wir verkaufen eine Option zum Preis $\pi(H)$ und replizieren sie wie oben mit den Kosten von 1 €. Der risikolose Gewinn beträgt $\pi(H) - 1$.
Annahme $\pi(H) < 1$: Wir kaufen eine Option zum Preis $\pi(H)$ und verkaufen die replizierende Strategie. Der risikolose Gewinn beträgt $1 - \pi(H)$.

Der "faire" (=arbitragefreie) Preis $\pi(H)$ ist also unabhängig von der Wahrscheinlichkeit p (real world probability).