

Finanzmathematik in diskreter Zeit

Prof. Dr. Nicole Bäuerle

Institut für Stochastik (STOCH)



2 Endliche Finanzmärkte

- Endlich viele Marktzustände: Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit Ω endlich und $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ (Potenzmenge). Weiter sei $\mathbb{P}(\{\omega\}) > 0$ für alle $\omega \in \Omega$.
- Endlich viele Handelszeitpunkte: $I := \{0, 1, \dots, T\}$.

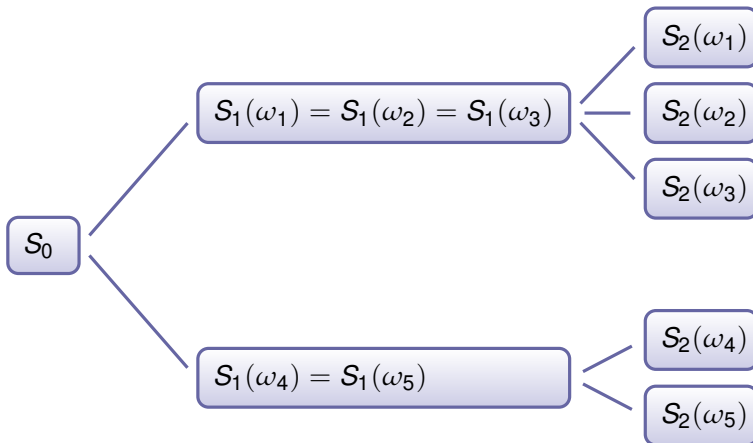
Definition 1

- a) Eine Familie $(X_t)_{t \in I}$ von Zufallsvariablen $X_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *stochastischer Prozess*.
- b) Eine Familie $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ von Teil- σ -Algebren $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ heißt *Filtration*, falls für alle $s < t, s, t \in I$ gilt $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$.
- c) Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t \in I}$ heißt *adaptiert* bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$, falls X_t \mathcal{F}_t -messbar ist für jedes $t \in I$.

- $(S_t)_{t \in I}$: stochastischer Prozess, der den Preisverlauf einer Aktie darstellt.
- $\mathcal{F}_t^S = \sigma(S_0, S_1, \dots, S_t) = \{(S_0, \dots, S_t)^{-1}(B) \mid B \subset \mathbb{R}^{t+1} \text{ messbar}\}$.
- $(\mathcal{F}_t^S)_{t \in I}$ ist eine Filtration (von $\mathcal{F}_T =: \mathcal{F}$)
- (S_t) ist adaptiert bzgl. (\mathcal{F}_t^S)
- $(\mathcal{F}_t^S)_{t \in I}$ nennt man auch natürliche Filtration.

\mathcal{F}_t^S gibt die Information wieder, die bis zum Zeitpunkt t vorliegt.

Beispiel: Filtrationen



2.1 Der Finanzmarkt

- Ω ist endlich.
- $\mathbb{P}(\{\omega\}) > 0$ für alle $\omega \in \Omega$.
- \mathcal{F} ist die Potenzmenge von Ω .
- Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ ist gegeben.
- $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ ist die triviale σ -Algebra und $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$.

Der Finanzmarkt besteht aus $d + 1$ Anlagemöglichkeiten:

- ein *risikoloses Wertpapier* mit deterministischem Preisprozess $(B_t) = (B_0, \dots, B_T)$, wobei $B_0 = 1$ und $B_{t+1} \geq B_t > 0$ für $t = 1, \dots, T$. Z.B. $B_t = (1 + r)^t$ mit $r \geq 0$.
- d *risikobehaftete Wertpapiere* mit stochastischen Preisprozessen $(S_t^k) = (S_0^k, \dots, S_T^k)$, $k = 1, \dots, d$ mit $S_t^k(\omega) > 0$ für alle k, t und ω .
Wir setzen für $t = 0, 1, \dots, T$

$$S_t := (S_t^1, \dots, S_t^d).$$

Die Prozesse (S_t^k) seien für alle $k = 1, \dots, d$ adaptiert bezüglich der gegebenen Filtration (\mathcal{F}_t) , d.h. $\mathcal{F}_t^S \subset \mathcal{F}_t$.

Definition 2

Eine *Handelsstrategie* oder ein *Portfolio* $\varphi = (\varphi_0, \dots, \varphi_{T-1})$ ist ein \mathbb{R}^{d+1} -wertiger, (\mathcal{F}_t) -adaptierter stochastischer Prozess, d.h., φ_t ist \mathcal{F}_t -messbar und

$$\varphi_t := (\alpha_t, \beta_t), \quad t = 0, \dots, T-1.$$

Dabei ist

- $\beta_t =$ Stückzahl des risikolosen Wertpapiers in $[t, t+1)$.
- $\alpha_t := (\alpha_t^1, \dots, \alpha_t^d)$ und $\alpha_t^k =$ Stückzahl des risikobehafteten Wertpapiers k in $[t, t+1)$.

Wir setzen $\beta := (\beta_0, \dots, \beta_{T-1})$ und $\alpha := (\alpha_0, \dots, \alpha_{T-1})$.

Theorem 3 (Faktorisierungssatz)

Sei (Ω, \mathcal{F}) ein Messraum und $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ Zufallsvariablen. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- X ist $(\sigma(Y), \mathcal{B})$ -messbar.*
- Es existiert eine messbare Abbildung $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $X = h(Y)$.*

Ist eine Handelsstrategie (\mathcal{F}_t^S) -adaptiert, bedeutet dies nach dem Faktorisierungssatz, dass $\beta_t = \beta_t(S_0, \dots, S_t)$ und $\alpha_t^k = \alpha_t^k(S_0, \dots, S_t)$.

Definition 4

Der Wert der Handelsstrategie φ zum Zeitpunkt $t = 0, \dots, T - 1$ ist gegeben durch

$$V_t^\varphi := \beta_t B_t + \sum_{k=1}^d \alpha_t^k S_t^k =: \beta_t B_t + \alpha_t \cdot S_t.$$

Außerdem setzen wir $V_T^\varphi := \beta_{T-1} B_T + \alpha_{T-1} \cdot S_T$.

Definition 5

Eine Handelsstrategie φ heißt *selbstfinanzierend*, falls

$$\beta_{t-1} B_t + \alpha_{t-1} \cdot S_t = \beta_t B_t + \alpha_t \cdot S_t$$

für $t = 1, 2, \dots, T - 1$ gilt.

Definition \mathcal{A}

Im Folgenden sei

$$\mathcal{A} := \{ \alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{T-1}) : \alpha_t \text{ ist } \mathcal{F}_t \text{- messbar, } t = 0, \dots, T - 1 \}$$

die Menge der Investitionsstrategien in die risikobehafteten Wertpapiere. Bei vorgegebenem Anfangsvermögen kann jedes $\alpha \in \mathcal{A}$ selbstfinanzierend ergänzt werden.

Bestimmung von β aus α und V_0

Es sei $\Delta X_t := X_t - X_{t-1}$. Weiter sei: $\Delta \alpha_t := (\Delta \alpha_t^1, \dots, \Delta \alpha_t^d)$.

Lemma 6

Sei φ eine selbstfinanzierende Handelsstrategie. Dann gilt

$$\beta_t = \beta_0 - \sum_{n=1}^t \Delta \alpha_n \cdot \frac{S_n}{B_n} = V_0^\varphi - \sum_{n=0}^t \Delta \alpha_n \cdot \frac{S_n}{B_n}$$

für $t = 0, 1, \dots, T - 1$, wobei $\Delta \alpha_0^k := \alpha_0^k$ für $k = 1, \dots, d$.

Sei $t = 0$. Dann ist $V_0^\varphi = \beta_0 + \alpha_0 \cdot \frac{S_0}{B_0}$ und $\beta_0 = V_0^\varphi - \alpha_0 \cdot \frac{S_0}{B_0}$.

Sei nun $t \in \{1, 2, \dots, T-1\}$: Da (α, β) selbstfinanzierend ist, gilt

$$\begin{aligned} \beta_t B_t + \alpha_t \cdot S_t &= \beta_{t-1} B_t + \alpha_{t-1} \cdot S_t \\ \Leftrightarrow (\beta_t - \beta_{t-1}) B_t &= -(\alpha_t - \alpha_{t-1}) \cdot S_t \\ \Leftrightarrow \Delta \beta_t &= -\Delta \alpha_t \cdot \frac{S_t}{B_t}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir nun:

$$\begin{aligned} \beta_t &= \beta_0 + \sum_{n=1}^t \Delta \beta_n = \beta_0 - \sum_{n=1}^t \Delta \alpha_n \cdot \frac{S_n}{B_n} = V_0^\varphi - \Delta \alpha_0 \cdot \frac{S_0}{B_0} - \sum_{n=1}^t \Delta \alpha_n \cdot \frac{S_n}{B_n} \\ &= V_0^\varphi - \sum_{n=0}^t \Delta \alpha_n \cdot \frac{S_n}{B_n}, \end{aligned}$$

und wir haben die Behauptung gezeigt. □

Definition 7

Es ist

$$\tilde{S}_t^k := \frac{S_t^k}{B_t}$$

der diskontierte Preis des k -ten risikobehafteten Wertpapiers zur Zeit t .

Lemma 8

Sei φ eine selbstfinanzierende Handelsstrategie. Dann gilt

$$\frac{V_t^\varphi}{B_t} = V_0^\varphi + \sum_{n=1}^t \alpha_{n-1} \cdot \Delta \tilde{S}_n$$

für $t = 1, \dots, T$

Für $n = 1, \dots, T$ gilt, da φ selbstfinanzierend ist,

$$\begin{aligned}\frac{V_n^\varphi}{B_n} - \frac{V_{n-1}^\varphi}{B_{n-1}} &= \frac{1}{B_n}(\beta_n B_n + \alpha_n \cdot S_n) - \frac{1}{B_{n-1}}(\beta_{n-1} B_{n-1} + \alpha_{n-1} \cdot S_{n-1}) \\ &= \frac{1}{B_n}(\beta_{n-1} B_n + \alpha_{n-1} \cdot S_n) - \frac{1}{B_{n-1}}(\beta_{n-1} B_{n-1} + \alpha_{n-1} \cdot S_{n-1}) \\ &= (\beta_{n-1} - \beta_{n-1}) + \alpha_{n-1} \cdot \left(\frac{S_n}{B_n} - \frac{S_{n-1}}{B_{n-1}} \right) = \alpha_{n-1} \cdot \Delta \tilde{S}_n.\end{aligned}$$

Daher gilt mit $B_0 = 1$

$$\frac{V_t^\varphi}{B_t} = \frac{V_0^\varphi}{B_0} + \sum_{n=1}^t \left(\frac{V_n^\varphi}{B_n} - \frac{V_{n-1}^\varphi}{B_{n-1}} \right) = V_0^\varphi + \sum_{n=1}^t \alpha_{n-1} \cdot \Delta \tilde{S}_n,$$

womit wir die Behauptung gezeigt haben. □

Definition 9

Den Prozess (G_t^α) für $\alpha \in \mathcal{A}$, der durch $G_0^\alpha := 0$ und

$$G_t^\alpha := \sum_{n=1}^t \alpha_{n-1} \cdot \Delta \tilde{S}_n, \quad t = 1, \dots, T$$

definiert ist, bezeichnen wir als *Gewinnprozess* von α . Es gilt dann für eine selbstfinanzierende Handelsstrategie $\varphi = (\alpha, \beta)$:

$$\frac{V_t^\varphi}{B_t} = V_0^\varphi + G_t^\alpha.$$

Definition 10

Eine selbstfinanzierende Handelsstrategie φ wird als *Arbitragestrategie* bezeichnet, falls

$$V_0^\varphi = 0, \quad \mathbb{P}(V_T^\varphi \geq 0) = 1 \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(V_T^\varphi > 0) > 0.$$

Wir sagen, dass eine *Arbitragemöglichkeit* existiert, falls eine Arbitragestrategie existiert. (NA) bedeutet, dass keine Arbitragemöglichkeit gegeben ist.

a) Da $\mathbb{P}(\{\omega\}) > 0$ für alle $\omega \in \Omega$, gilt:

$$\mathbb{P}(V_T^\varphi \geq 0) = 1 \Leftrightarrow V_T^\varphi(\omega) \geq 0 \quad \forall \omega$$

und

$$\mathbb{P}(V_T^\varphi > 0) > 0 \Leftrightarrow \exists \omega \in \Omega, V_T^\varphi(\omega) > 0.$$

b) Für eine selbstfinanzierende Handelsstrategie $\varphi = (\alpha, \beta)$ gilt:

$$\frac{V_T^\varphi}{B_T} = V_0^\varphi + G_T^\alpha.$$

Daher liegt eine Arbitragemöglichkeit genau dann vor, wenn eine selbstfinanzierende Handelsstrategie φ existiert mit

$$V_0^\varphi = 0, \quad \mathbb{P}(G_T^\alpha \geq 0) = 1 \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(G_T^\alpha > 0) > 0.$$

Theorem 11

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- Es gibt eine Arbitragestrategie.*
- Es gibt ein $t \in \{1, \dots, T\}$ und einen \mathcal{F}_{t-1} -messbaren Zufallsvektor $\eta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, sodass*

$$\mathbb{P}(\eta \cdot (\tilde{S}_t - \tilde{S}_{t-1}) \geq 0) = 1 \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(\eta \cdot (\tilde{S}_t - \tilde{S}_{t-1}) > 0) > 0.$$

Beachte: η hängt von t ab.

a) \Rightarrow b) :

Sei $\varphi = (\alpha, \beta)$ eine Arbitragestrategie mit (V_t^φ) , und sei

$$t := \min \{ m \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(V_m^\varphi \geq 0) = 1 \text{ und } \mathbb{P}(V_m^\varphi > 0) > 0 \}.$$

Dann ist $t \leq T$ und entweder $\mathbb{P}(V_{t-1}^\varphi = 0) = 1$ oder $\mathbb{P}(V_{t-1}^\varphi < 0) > 0$. Im ersten Fall folgt (vgl. Beweis letzte Vorlesung)

$$\alpha_{t-1} \cdot (\tilde{S}_t - \tilde{S}_{t-1}) = \frac{V_t^\varphi}{B_t} - \frac{V_{t-1}^\varphi}{B_{t-1}} = \frac{V_t^\varphi}{B_t}.$$

Setze jetzt $\eta := \alpha_{t-1}$, und die Behauptung folgt. Im zweiten Fall setze $\eta := \alpha_{t-1} \mathbf{1}_{\{V_{t-1}^\varphi < 0\}}$. Dann ist η \mathcal{F}_{t-1} -messbar und

$$\eta \cdot (\tilde{S}_t - \tilde{S}_{t-1}) = \left(\frac{V_t^\varphi}{B_t} - \frac{V_{t-1}^\varphi}{B_{t-1}} \right) \mathbf{1}_{\{V_{t-1}^\varphi < 0\}} \geq \frac{V_t^\varphi}{B_t} \mathbf{1}_{\{V_{t-1}^\varphi < 0\}} \geq 0.$$

Die linke Seite ist außerdem mit positiver Wahrscheinlichkeit strikt positiv.

b) \Rightarrow a) :

Sei η wie in b) und definiere eine Handelsstrategie $\varphi = (\alpha, \beta)$ durch

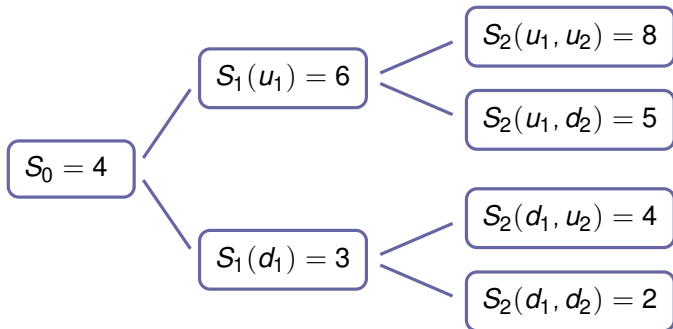
$$\alpha_m := \begin{cases} \eta, & \text{falls } m = t - 1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann kann α mit $V_0^\varphi = 0$ selbstfinanzierend ergänzt werden (siehe letzte Stunde).

Da $\frac{V_T^\varphi}{B_T} = \eta \cdot (\tilde{S}_t - \tilde{S}_{t-1})$ gilt, ist φ eine Arbitragestrategie. □

Beispiel

Gegeben sei ein Finanzmarkt mit $T = 2$, einem risikolosen Wertpapier mit $B_0 = B_1 = B_2 = 1$ und einer Aktie, die sich wie unten entwickelt.



Hier: $\Omega = \{u_1, d_1\} \times \{u_2, d_2\}$. Wir prüfen mit dem letzten Satz nach, ob der Finanzmarkt arbitragefrei ist. Betrachte erst $t = 1$. Hier ergibt sich

$$\eta(\tilde{S}_1(y_1) - S_0) = \begin{cases} \eta(6 - 4) = 2\eta, & \text{falls } y_1 = u_1 \\ \eta(3 - 4) = -\eta, & \text{falls } y_1 = d_1. \end{cases}$$

Es kann kein $\eta \neq 0$ gewählt werden mit $\eta(\tilde{S}_1(y_1) - S_0) \geq 0$ für alle y_1 . Sei nun $t = 2$. Wir betrachten den oberen Knoten

$$\eta(u_1)(\tilde{S}_2(u_1, y_2) - \tilde{S}_1(u_1)) = \begin{cases} \eta(u_1)(8 - 6) = 2\eta(u_1), & \text{falls } y_2 = u_2 \\ \eta(u_1)(5 - 6) = -\eta(u_1), & \text{falls } y_2 = d_2. \end{cases}$$

Hier haben wir wieder verschiedene Vorzeichen. Unterer Knoten:

$$\eta(d_1)(\tilde{S}_2(d_1, y_2) - \tilde{S}_1(d_1)) = \begin{cases} \eta(d_1)(4 - 3) = \eta(d_1), & \text{falls } y_2 = u_2 \\ \eta(d_1)(2 - 3) = -\eta(d_1), & \text{falls } y_2 = d_2. \end{cases}$$

Gleiche Situation. Also ist der Finanzmarkt arbitragefrei.

2.2 Optionen

Mathematisch ist eine Option durch ihre Auszahlung charakterisiert. Im Falle einer europäischen Option findet diese Auszahlung immer zum Ausübungszeitpunkt T statt.

Definition 12

Ein *Zahlungsanspruch* ist eine \mathcal{F}_T -messbare Zufallsvariable H mit Werten in \mathbb{R} .

Ist H sogar \mathcal{F}_T^S -messbar, so ist nach dem Faktorisierungssatz $H = h(S_0, S_1, \dots, S_T)$ für eine Funktion h .

- *Europäische Call-Option mit Basispreis K : $H = (S_T - K)^+$.*
- *Europäische Put-Option mit Basispreis K : $H = (K - S_T)^+$.*
- *Future: Nehmen wir an, der heute festgelegte Referenzpreis eines Wertpapiers ist K und der Liefertermin T . Dann findet aus Sicht des Käufers zur Zeit T die Zahlung $H = S_T - K$ statt.*
- *Digital-Call-Option mit Basispreis K : $H = 1_{\{S_T > K\}}$.*
- *Down-and-Out-Call mit Basispreis K und Barriere B :
 $H = (S_T - K)^+ 1_{\{\min_{t \in \{0, \dots, T\}} S_t > B\}}$.*
- *Asiatische Call-Option: $H = (S_T - \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T S_t)^+$.*

Definition 13

- a) Ein Zahlungsanspruch H heißt *erreichbar*, wenn es eine selbstfinanzierende Handelsstrategie φ gibt mit $V_T^\varphi = H$. Dann heißt $\pi(H) := V_0^\varphi$ ein *Preis* von H und φ eine *Hedging-Strategie* von H .
- b) Ein Markt wird als *vollständig* bezeichnet, wenn jeder Zahlungsanspruch erreichbar ist.

Lemma 14

Es gelte (NA). Dann ist der Preis $\pi(H)$ für erreichbare Zahlungsansprüche eindeutig bestimmt und damit unabhängig von der Wahl einer Hedging-Strategie.

Sei H ein erreichbarer Zahlungsanspruch und $\varphi = (\alpha, \beta)$ bzw. $\tilde{\varphi} = (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ zwei Hedging-Strategien für H . Es folgt dann

$$V_0^\varphi + G_T^\alpha = \frac{V_T^\varphi}{B_T} = \frac{H}{B_T} = \frac{V_T^{\tilde{\varphi}}}{B_T} = V_0^{\tilde{\varphi}} + G_T^{\tilde{\alpha}}.$$

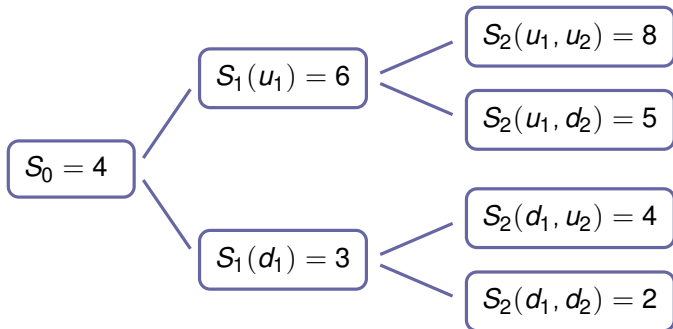
Wir nehmen an, dass $d := V_0^{\tilde{\varphi}} - V_0^\varphi > 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &= V_0^\varphi - V_0^{\tilde{\varphi}} - G_T^{\tilde{\alpha}} + G_T^\alpha \\ &= -d - G_T^{\tilde{\alpha}} + G_T^\alpha = -d - \sum_{n=1}^T \tilde{\alpha}_{n-1} \cdot \Delta \tilde{S}_n + \sum_{n=1}^T \alpha_{n-1} \cdot \Delta \tilde{S}_n \\ &= -d + \sum_{n=1}^T (\alpha_{n-1} - \tilde{\alpha}_{n-1}) \cdot \Delta \tilde{S}_n = -d + G_T^{\alpha - \tilde{\alpha}}. \end{aligned}$$

$\implies G_T^{\alpha - \tilde{\alpha}} > 0$. Also ist $\psi = (\hat{\alpha}, \hat{\beta})$, $\hat{\alpha} = \alpha - \tilde{\alpha}$, eine Arbitragemöglichkeit. Dies ist ein Widerspruch zu (NA). □

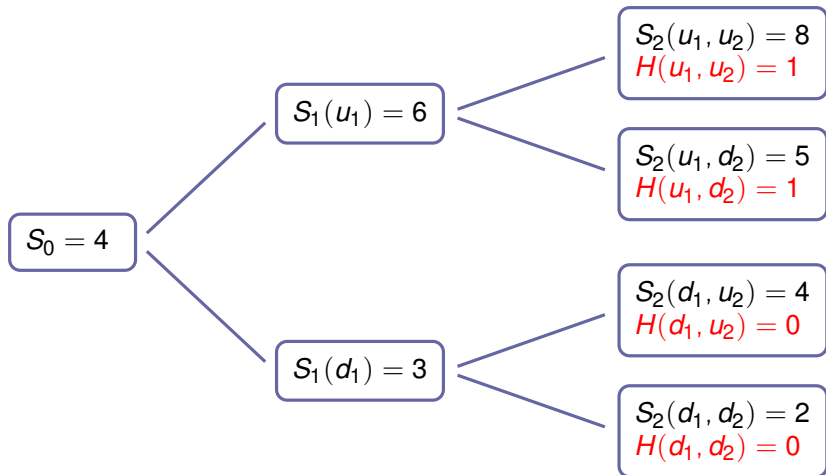
Beispiel

Gegeben sei ein Finanzmarkt mit $T = 2$, einem risikolosen Wertpapier mit $B_0 = B_1 = B_2 = 1$ und einer Aktie, die sich wie unten entwickelt.



Beispiel

Für $H = 1_{\{S_2 \geq 5\}}$ berechne eine Hedging-Strategie und den Preis. Die Auszahlung der Option ist gegeben durch



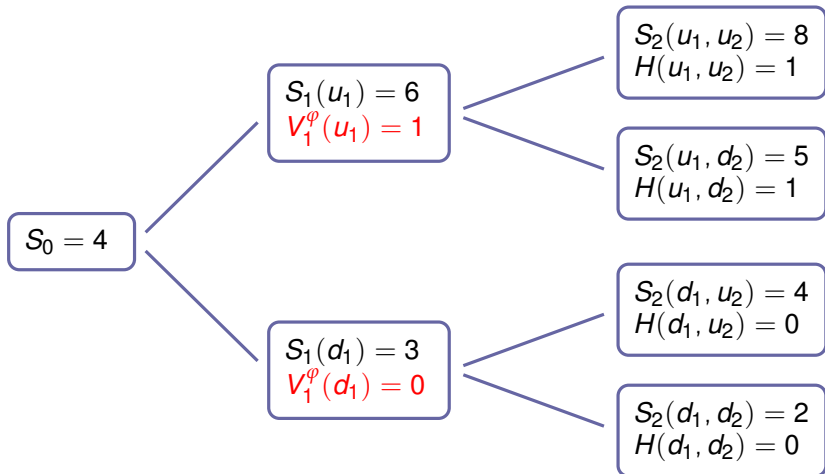
Für eine Hedging-Strategie $\varphi = (\alpha, \beta)$ muss $V_T^\varphi = H$ gelten. Wir betrachten $t = 2$, den oberen Knoten:

$$\begin{aligned}8 \alpha_1(u_1) + \beta_1(u_1) &= 1 = H(u_1, u_2) \\5 \alpha_1(u_1) + \beta_1(u_1) &= 1 = H(u_1, d_2).\end{aligned}$$

Lösung: $\alpha_1(u_1) = 0, \beta_1(u_1) = 1$ und $V_1^\varphi(u_1) = 6 \alpha_1(u_1) + \beta_1(u_1) = 1$. Wir betrachten $t = 2$, den unteren Knoten:

$$\begin{aligned}4 \alpha_1(d_1) + \beta_1(d_1) &= 0 = H(d_1, u_1) \\2 \alpha_1(d_1) + \beta_1(d_1) &= 0 = H(d_1, d_2).\end{aligned}$$

Lösung: $\alpha_1(d_1) = 0, \beta_1(d_1) = 0$ und $V_1^\varphi(d_1) = 0$.



Wir betrachten noch $t = 1$:

$$\begin{aligned}6 \alpha_0 + \beta_0 &= 1 = V_1^\varphi(u_1) \\3 \alpha_0 + \beta_0 &= 0 = V_1^\varphi(d_1).\end{aligned}$$

Lösung: $\alpha_0 = \frac{1}{3}$, $\beta_0 = -1$ und $V_0^\varphi = 4 \alpha_0 + \beta_0 = \frac{1}{3}$.

Somit haben wir eine Hedging-Strategie $\varphi = (\alpha, \beta)$ bestimmt, und für den Preis der Option ergibt sich $\pi(H) = \frac{1}{3}$.

