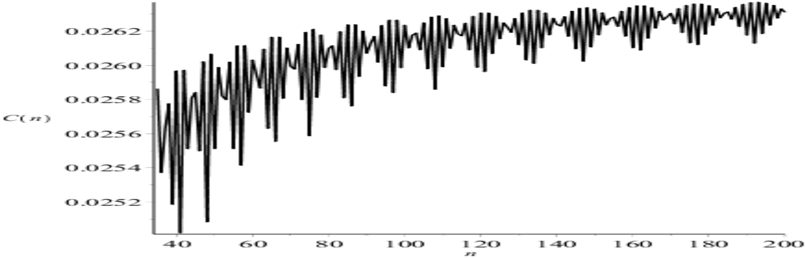
Karlsruher Institut für Technologie

Finanzmathematik in diskreter Zeit

Prof. Dr. Nicole Bäuerle

Institut für Stochastik (STOCH)



3. Das Cox-Ross-Rubinstein Modell

3.1 Einperiodiges Cox-Ross-Rubinstein-Modell

Das Modell

- Es sei $T = 1$, $\Omega = \{u, d\}$ und $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$ die Potenzmenge von Ω.
- Weiter seien $B_0 = 1$ und $B_1 = 1 + r$ mit $r \geq 0$.
- Wir nehmen an, dass $S_0 > 0$ gegeben ist und

$$S_1(\omega) := \begin{cases} uS_0, & \text{falls } \omega = u, \\ dS_0, & \text{falls } \omega = d \end{cases}$$

für Faktoren $0 < d < u$.

Arbitragefreiheit

Theorem 1

Gegeben sei das einperiodige Cox-Ross-Rubinstein-Modell. Dann gilt:

$$(NA) \Longleftrightarrow d < 1 + r < u.$$

Beweis

Offenbar gilt:

$$
\begin{aligned}
d < 1 + r < u \quad & \Leftrightarrow \quad \frac{d}{1+r} < 1 < \frac{u}{1+r} \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{dS_0}{1+r} < S_0 < \frac{uS_0}{1+r} \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{dS_0}{1+r} - S_0 < 0 < \frac{uS_0}{1+r} - S_0 \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{S_1(d)}{1+r} - S_0 < 0 < \frac{S_1(u)}{1+r} - S_0 \\
& \Leftrightarrow \quad \tilde{S}_1(d) - S_0 < 0 < \tilde{S}_1(u) - S_0.
\end{aligned}
$$

Egal wie wir $\eta \neq 0$ wählen, $\exists \omega \in \Omega$ mit $\eta(\tilde{S}_1(\omega) - \tilde{S}_0) < 0$ und somit ist nach dem Satz letzte Stunde Arbitrage ausgeschlossen. $\square$

Vollständigkeit und Preisbestimmung

Theorem 2

Es gelte (NA). Dann ist das Cox-Ross-Rubinstein-Modell vollständig. Insbesondere ist die Hedging-Strategie für den Zahlungsanspruch H gegeben durch

$$\alpha_0 = \frac{H(u) - H(d)}{(u-d)S_0} \quad \text{und} \quad \beta_0 = \frac{uH(d) - dH(u)}{(u-d)(1+r)}$$

und damit der eindeutige Preis $\pi(H)$ von H

$$\pi(H) = \frac{uH(d) - dH(u)}{(u-d)(1+r)} + \frac{H(u) - H(d)}{(u-d)}.$$

Beweis

Damit φ eine Hedging-Strategie ist, muss zum Zeitpunkt $T = 1$ gelten: $V_1^\varphi = \beta_0(1+r) + \alpha_0 S_1 = H$. Da $\Omega = \{u, d\}$, erhalten wir

$$\beta_0(1+r) + \alpha_0 S_1(u) = H(u),$$
$$\beta_0(1+r) + \alpha_0 S_1(d) = H(d)$$

und daher

$$\beta_0(1+r) + \alpha_0 u S_0 = H(u),$$
$$\beta_0(1+r) + \alpha_0 d S_0 = H(d).$$

Auflösen nach β_0, α_0 und entsprechendes Umsortieren liefert die Behauptung. $\square$

Bemerkung

Die Preisformel kann umgeschrieben werden zu

$$\pi(H) = \frac{H(u)}{1+r}\frac{1+r-d}{u-d} + \frac{H(d)}{1+r}\left(1 - \frac{1+r-d}{u-d}\right).$$

Setzen wir nun $q := \frac{1+r-d}{u-d}$, so gilt $0 < q < 1$, da wegen (NA) für die Parameter $d < 1+r < u$ gilt. Dann folgt

$$\pi(H) = \frac{H(u)}{1+r}q + \frac{H(d)}{1+r}(1-q).$$

Wir definieren ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ durch $\mathbb{Q}(\{u\}) = q$ und $\mathbb{Q}(\{d\}) = 1-q$. Also können wir schreiben

$$\pi(H) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{H}{1+r}\right],$$

wobei $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}$ den Erwartungswert bezüglich des Maßes $\mathbb{Q}$ bezeichnet.

Bemerkung

Für den diskontierten Preis $\tilde{S}_1 = \frac{S_1}{B_1}$ gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\tilde{S}_1] &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{S_1}{B_1}\right] = \frac{S_1(u)}{B_1}q + \frac{S_1(d)}{B_1}(1-q) = \frac{uS_0}{1+r}q + \frac{dS_0}{1+r}(1-q) \\
&= S_0\left(\frac{u}{1+r}q + \frac{d}{1+r}(1-q)\right) = S_0\left(q\left(\frac{u}{1+r} - \frac{d}{1+r}\right) + \frac{d}{1+r}\right) \\
&= S_0\left(\frac{1+r-d}{u-d}\left(\frac{u-d}{1+r}\right) + \frac{d}{1+r}\right) = S_0 = \tilde{S}_0.
\end{aligned}$$

$\mathbb{Q}$ ist das einzige Wahrscheinlichkeitsmaß mit $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\tilde{S}_1] = \tilde{S}_0$, denn

$$S_0 = \frac{1}{1+r}(qS_1(u) + (1-q)S_1(d)) = \frac{1}{1+r}(quS_0 + (1-q)dS_0),$$

führt auf $1 + r = qu + (1-q)d$. Diese Gleichung hat die eindeutige Lösung $q = \frac{1+r-d}{u-d}$.

3.2 Mehrperiodiges Cox-Ross-Rubinstein-Modell

Das Modell

- Sei $T \in \mathbb{N}$ und $t = 0, 1, \dots, T-1$.
- Sei $r \geq 0$ und für $t = 0, 1, \dots, T-1$:

$$B_{t+1} = (1+r)B_t = (1+r)^{t+1}, \quad B_0 = 1,$$

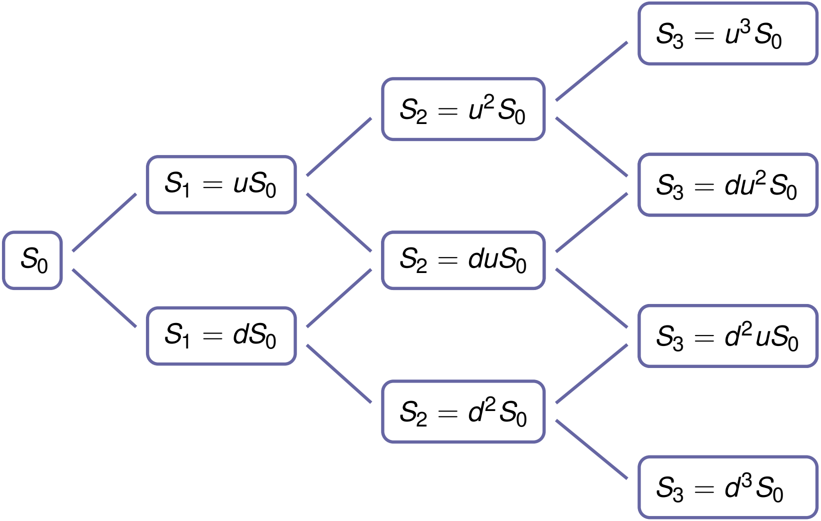
- $\Omega := \{d, u\}^T$, $\mathcal{F} :=$ Potenzmenge von Ω. Dabei ist $\omega = (y_1, \dots, y_T) \in \Omega$ mit $y_t \in \{d, u\}$ für $t \in \{1, \dots, T\}$.
- Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ mit $\mathbb{P}(\omega) > 0$ für alle $\omega \in \Omega$.
- Zufallsvariablen $Y_t : \Omega \to \{d, u\}$ mit

$$Y_t(\omega) = Y_t((y_1, \dots, y_T)) := y_t, \quad t = 1, \dots, T.$$

- Der Preisprozess $S = (S_t)$ ist dann gegeben durch

$$S_t = S_0 \prod_{n=1}^{t} Y_n, \quad t = 1, 2, \dots, T.$$

Preisentwicklung



Filtration

Die Informationen im Markt werden durch die folgende Filtration modelliert:

$$\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\},$$
$$\mathcal{F}_t := \sigma(Y_1, \dots, Y_t) = \sigma(S_1, \dots, S_t) = \mathcal{F}_t^S \text{ für } t \in \{1, \dots, T-1\},$$
$$\mathcal{F}_T := \mathcal{F}.$$

Arbitragefreiheit

Theorem 3

Im T-periodigen Cox-Ross-Rubinstein-Modell gilt:

$$(NA) \Longleftrightarrow d < 1 + r < u.$$

Beweis

Wir verwenden den Satz über die lokale Arbitragefreiheit. Sei η eine $\mathcal{F}_{t-1}$-messbare Zufallsvariable und

$$\eta\Big(\frac{S_t}{B_t} - \frac{S_{t-1}}{B_{t-1}}\Big) = \eta\Big(\frac{Y_t S_{t-1}}{(1+r)B_{t-1}} - \frac{S_{t-1}}{B_{t-1}}\Big).$$

Also ist

$$\eta(\tilde{S}_t - \tilde{S}_{t-1}) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \eta\Big(\frac{Y_t}{1+r} - 1\Big) \geq 0.$$

η ist unabhängig von Y_t. Weiter haben $\frac{u}{1+r} - 1$ und $\frac{d}{1+r} - 1$ genau dann unterschiedliche Vorzeichen, wenn $d < 1 + r < u$. Nur in diesem Fall kann kein η gewählt werden mit $\eta(\tilde{S}_t(\omega) - \tilde{S}_{t-1}(\omega)) \geq 0$ für alle $\omega \in \Omega$ und $\eta(\tilde{S}_t(\omega) - \tilde{S}_{t-1}(\omega)) > 0$ für mindestens ein ω. $\square$

Das künstliche Wahrscheinlichkeitsmaß

Karlsruher Institut für Technologie

Wir definieren $\mathbb{Q}$ wie folgt:

$$\mathbb{Q}(\{\omega\}) := \mathbb{Q}(\{(y_1, \dots, y_T)\}) := q_{y_1} \cdot \ldots \cdot q_{y_T},$$

mit

$$q_{y_t} := \begin{cases} q, & \text{falls } y_t = u, \\ 1-q, & \text{falls } y_t = d, \end{cases} \quad \text{und } \; q := \frac{1+r-d}{u-d},$$

wobei wir voraussetzen, dass $d < 1 + r < u$.

Unter $\mathbb{Q}$ sind die Zufallsvariablen $Y_1, \dots, Y_T$ unabhängig und identisch verteilt mit $\mathbb{Q}(Y_t = u) = q = 1 - \mathbb{Q}(Y_t = d)$.

Vollständigkeit und Preisbestimmung

Theorem 4

Es gelte (NA). Dann ist das T-periodige Cox-Ross-Rubinstein-Modell vollständig. Der Preis eines Zahlungsanspruchs H ist gegeben durch

$$\pi(H) = \beta_0 B_0 + \alpha_0 S_0 = \sum_{\omega=(y_1,\ldots,y_T)\in\Omega} q_{y_1} \cdot \ldots \cdot q_{y_T} \frac{H(\omega)}{B_T} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{H}{B_T}\right].$$

Beweis

Sei H ein beliebiger Zahlungsanspruch. Der Preis von H und die Hedging-Strategie φ können rekursiv im Binomialbaum ermittelt werden. Da $\varphi = (\alpha, \beta)$ selbstfinanzierend ist, gilt für $t = 1, \ldots, T$

$$V_t^\varphi = \beta_{t-1} B_t + \alpha_{t-1} S_t, \tag{1}$$

$$V_{t-1}^\varphi = \beta_{t-1} B_{t-1} + \alpha_{t-1} S_{t-1}. \tag{2}$$

Beginne mit $t = T$. Setze $V_T^\varphi = H$ und fixiere $h_{T-1} := (y_1, \ldots, y_{T-1})$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
V_T^\varphi(h_{T-1}, u) &= H(h_{T-1}, u) \\
&= \beta_{T-1}(h_{T-1}) B_T + \alpha_{T-1}(h_{T-1}) S_{T-1}(h_{T-1}) u \\
V_T^\varphi(h_{T-1}, d) &= H(h_{T-1}, d) \\
&= \beta_{T-1}(h_{T-1}) B_T + \alpha_{T-1}(h_{T-1}) S_{T-1}(h_{T-1}) d.
\end{aligned}$$

Beweis

Dieses lineare Gleichungssystem ist eindeutig lösbar, und die Lösung $(\alpha_{T-1}, \beta_{T-1})$ in Abhängigkeit von $h_{T-1} = (y_1, \ldots, y_{T-1})$ ist

$$\begin{aligned}
\alpha_{T-1}(h_{T-1}) &= \frac{H(h_{T-1}, u) - H(h_{T-1}, d)}{(u-d)S_{T-1}(h_{T-1})} \\
\beta_{T-1}(h_{T-1}) &= \frac{uH(h_{T-1}, d) - dH(h_{T-1}, u)}{(u-d)B_T}.
\end{aligned}$$

Mit (2) und Einsetzen von α_{T-1} und β_{T-1} folgt dann

$$\begin{aligned}
V^{\varphi}_{T-1}(h_{T-1}) &= \beta_{T-1}(h_{T-1})B_{T-1} + \alpha_{T-1}(h_{T-1})S_{T-1}(h_{T-1}) \\
&= \frac{1}{1+r}\Big(qH(h_{T-1}, u) + (1-q)H(h_{T-1}, d)\Big).
\end{aligned}$$

Für $T > 1$ kann der Schritt für $t = T-1,\ t = T-2$ usw. rekursiv wiederholt werden. $\square$

Spezialfall $H = h(S_T)$

Es gelte (NA) und es sei $H = h(S_T)$. Ist φ eine Hedging-Strategie, so gilt

$$\begin{aligned} V_T^\varphi(S_{T-1}u) &= h(S_{T-1}u) = \beta_{T-1}(S_{T-1})B_T + \alpha_{T-1}(S_{T-1})S_{T-1}u \\ V_T^\varphi(S_{T-1}d) &= h(S_{T-1}d) = \beta_{T-1}(S_{T-1})B_T + \alpha_{T-1}(S_{T-1})S_{T-1}d. \end{aligned}$$

Beachte; α_{T-1} und β_{T-1} hängen von h_{T-1} nur über S_{T-1} ab. Das Gleiche gilt auch für V_{T-1}:

$$V_{T-1}^\varphi(S_{T-1}) = \beta_{T-1}(S_{T-1})B_{T-1} + \alpha_{T-1}(S_{T-1})S_{T-1}.$$

Durch Induktion: α_t, β_t und V_t^φ hängen nur von S_t ab.

Spezialfall $H = h(S_T)$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}\alpha_{t-1}(S_{t-1}) &= \frac{V_t^\varphi(S_{t-1}u) - V_t^\varphi(S_{t-1}d)}{(u-d)S_{t-1}},\\ \beta_{t-1}(S_{t-1}) &= \frac{uV_t^\varphi(S_{t-1}d) - dV_t^\varphi(S_{t-1}u)}{(u-d)B_t}.\end{aligned}$$

Außerdem erhalten wir

$$V_{t-1}^\varphi(S_{t-1}) = \frac{1}{1+r}\Big(qV_t^\varphi(S_{t-1}u) + (1-q)V_t^\varphi(S_{t-1}d)\Big).$$

In diesem Spezialfall muss man also weniger Gleichungssysteme lösen, da die Vorgeschichten $h_t = (y_1, \ldots, y_t)$ mit gleich vielen u und d alle auf dieselbe Gleichung führen.

Spezialfall $H = h(S_T)$

Corollary 5

Sei $H = h(S_T)$. Dann ist der Preis gegeben durch

$$\pi(H) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{h(S_T)}{B_T}\right] = \frac{1}{B_T}\sum_{t=0}^{T}\binom{T}{t}q^t(1-q)^{T-t}h(S_0u^t d^{T-t}).$$

Beweis

- Es gilt
$$S_T = S_0 \prod_{t=1}^{T} Y_t$$
mit $\mathbb{Q}(Y_t = u) = q = 1 - \mathbb{Q}(Y_t = d)$.
- Daher ist die Anzahl der „ups“ bis zur Zeit T binomialverteilt mit Parameter T und q.
- Die Auszahlung von $H = h(S_T)$ ist also bei jeweils $\binom{T}{t}$ Pfaden gleich.
- Diese Wahrscheinlichkeiten, werden hier zusammengefasst. $\square$

Beispiel

- Es sei $T = 10$, $u = 1,1$ sowie $d = 0,9$ und $r = 0,02$ und $S_0 = 100$.
- Bestimme den Preis einer Call-Option mit Basispreis $K = 220$ zur Zeit $t = 0$ sowie die Anfangsinvestition (α_0, β_0) der Hedging-Strategie.
- $q = 0,6$.
- Nur $\omega = (u, \dots, u)$ liefert $H(u, \dots, u) = S_0 u^{10} - K = 39,37 > 0$.
- Damit ist der Preis zur Zeit $t = 0$

$$\pi(H) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{H}{B_T}\right] = \left(\frac{q}{1+r}\right)^{10} H(u, \dots, u) = 0,195.$$

- $V_1^{\varphi}(d) = 0$ und $V_1^{\varphi}(u) = \left(\frac{q}{1+r}\right)^9 H(u, \dots, u) = 0,332$.
- Löse

$$\begin{aligned} \alpha_0 S_0 u + \beta_0 B_1 &= 0,332 \\ \alpha_0 S_0 d + \beta_0 B_1 &= 0. \end{aligned}$$

- Ergebnis: $\alpha_0 = 0,0166$ und $\beta_0 = -1,464$.

3.3 Grenzübergang zum Black-Scholes-Modell

Wir nehmen jetzt an, dass wir ein festes Zeitintervall $[0, T]$ in n Teile der Länge $\Delta_n := \frac{T}{n}$ teilen und eine Folge von Cox-Ross-Rubinstein-Modellen mit speziellen Parametern d_n, u_n, r_n betrachten.

Unterjährige Verzinsung

Bei einer unterjährigen Verzinsung wird der Zins auf die Perioden aufgeteilt und das Kapital mehrfach verzinst. Z.B. bei halbjähriger Verzinsung erhalten wir für eine eingesetzte Geldeinheit am Ende

$$(1+\frac{r}{2})(1+\frac{r}{2}) = (1+\frac{r}{2})^2, \quad r \geq 0$$

Bei n Perioden

$$\left(1+\frac{r}{n}\right)^n \to e^r \text{ für } n \to \infty.$$

Tatsächlich wird $B_t^{stetig} = e^{rt}$ bei stetigen Modellen angenommen. Wir wählen r_n so, dass $1 + r_n = e^{r\Delta_n}$ ist. Dann gilt nach t Perioden

$$B_t = (1+r_n)^t = e^{rt\Delta_n} = B_{t\Delta_n}^{stetig}$$

.

Wahl der Parameter

Wir wählen nun folgende Parameter

$$\begin{aligned} r_n &:= e^{r\Delta_n} - 1, \\ u_n &:= \exp(\sigma\sqrt{\Delta_n}), \\ d_n &:= u_n^{-1} = \exp(-\sigma\sqrt{\Delta_n}), \end{aligned}$$

wobei $\sigma > 0$. Wenn n groß ist, gibt es keine Arbitragemöglichkeit, da gilt:

$$e^{-\sigma\sqrt{\Delta_n}} < 1 + r_n < e^{\sigma\sqrt{\Delta_n}}.$$

Preis einer Call-Option

Call-Option mit Auszahlung $H = h(S_T) = (S_T - K)^+$. Der Preis zur Zeit $t = 0$ ergibt sich mit $a_n := \min\{k \in \mathbb{N}_0 : S_0 u_n^k d_n^{T-k} - K > 0\}$ zu:

$$
\begin{aligned}
C_0^{(n)} &:= \frac{1}{(1+r_n)^n} \sum_{k=a_n}^{n} \binom{n}{k} q_n^k (1-q_n)^{n-k} (S_0 u_n^k d_n^{n-k} - K) \\
&= S_0 \sum_{k=a_n}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{q_n u_n}{1+r_n}\right)^k \left(\frac{(1-q_n) d_n}{1+r_n}\right)^{n-k} - \frac{K}{(1+r_n)^n} \sum_{k=a_n}^{n} \binom{n}{k} q_n^k (1-q_n)^{n-k} \\
&= S_0 \sum_{k=a_n}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{q_n u_n}{1+r_n}\right)^k \left(1 - \frac{q_n u_n}{1+r_n}\right)^{n-k} - \frac{K}{(1+r_n)^n} \sum_{k=a_n}^{n} \binom{n}{k} q_n^k (1-q_n)^{n-k}.
\end{aligned}
$$

mit $q_n := \frac{1+r_n-d_n}{u_n-d_n}$.

Der Preis der Call-Option konvergiert gegen den Preis im Black-Scholes Modell

Karlsruher Institut für Technologie

Theorem 6
Es gilt

$$C_0^{BS} := \lim_{n\to\infty} C_0^{(n)} = S_0\Phi(d) - Ke^{-rT}\Phi(d - \sigma\sqrt{T}),$$

$$mit\ d := \frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

wobei Φ *die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist.*

Bemerkung

Die Formel für C_0^{BS} ist die Formel von Black und Scholes (1973). Hier ist

- r: Zinsrate im stetigen Modell,
- σ: Volatilität des risikobehafteten Wertpapiers. Sie gibt an, wie stark die Anlage schwankt,
- S_0: Preis des risikobehafteten Wertpapiers zur Zeit $t = 0$,
- T: Ausübungszeitpunkt der Option,
- K: Basispreis.

Beweis

Es gilt:

$$C_0^{(n)} = S_0 \sum_{k=a_n}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{q_n u_n}{1+r_n}\right)^k \left(1 - \frac{q_n u_n}{1+r}\right)^{n-k} - \frac{K}{(1+r_n)^n} \sum_{k=a_n}^{n} \binom{n}{k} q_n^k (1-q_n)^{n-k}.$$

Definiere $\hat{q}_n := \frac{q_n u_n}{1+r_n}$, (beachte: $\hat{q}_n \in (0,1)$) und

$$\bar{B}_{n,p}(x) := \sum_{k=x}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \; x \in \{0, 1, \dots, n\},$$

so gilt

$$C_0^{(n)} = S_0 \bar{B}_{n,\hat{q}_n}(a_n) - \frac{K}{(1+r_n)^n} \bar{B}_{n,q_n}(a_n).$$

Beweis

Offenbar ist

$$(1+r_n)^{-n} = \exp(-r\frac{T}{n}n) = \exp(-rT).$$

Wir müssen also zeigen, dass

$$\lim_{n\to\infty} \overline{B}_{n,\hat{q}_n}(a_n) = \Phi(d), \quad \lim_{n\to\infty} \overline{B}_{n,q_n}(a_n) = \Phi(d-\sigma\sqrt{T}).$$

(Wir zeigen hier nur die erste Aussage, die zweite geht analog.)

Rückblick: ZGWS von Lindeberg-Feller

Theorem 7

Für $n \in \mathbb{N}$ seien $X_{n1}, \ldots, X_{nr_n}$ unabhängige ZV mit $\mathbb{E}\, X_{nk} =: \mu_{nk}$ und $0 < Var(X_{nk}) =: \sigma_{nk}^2 < \infty$. Wir setzen $\sigma_n^2 := \sigma_{n1}^2 + \ldots + \sigma_{nr_n}^2$. Wenn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{k=1}^{r_n} \mathbb{E}\left[(X_{nk} - \mu_{nk})^2 1_{\{|X_{nk}-\mu_{nk}|>\varepsilon\sigma_n\}}\right] = 0, \qquad \text{für alle } \varepsilon > 0$$

erfüllt ist, dann gilt für $S_n := X_{n1} + \ldots + X_{nr_n}$:

a) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n - \mathbb{E}\, S_n}{\sqrt{Var(S_n)}} \le x\right) = \Phi(x)$, *für alle $x \in \mathbb{R}$.*

b) *Sind $(\alpha_n) \subset \mathbb{R}$ und $(\beta_n) \subset \mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$ und $\lim_{n\to\infty} \beta_n = \beta$ mit $\alpha \le \beta$, so gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\alpha_n \le \frac{S_n - \mathbb{E}\, S_n}{\sqrt{Var(S_n)}} \le \beta_n\right) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha).$$

Beweis

Sei $Z_n \sim B(n, \hat{q}_n)$. Dann ist $\overline{B}_{n,\hat{q}_n}(a_n) = \mathbb{P}(a_n \le Z_n \le n)$. Weiter sei

$$\tilde{Z}_n := \frac{Z_n - \mathbb{E}[Z_n]}{\sqrt{Var(Z_n)}} = \frac{Z_n - n\hat{q}_n}{\sqrt{n\hat{q}_n(1-\hat{q}_n)}}$$

und wir erhalten

$$a_n \le Z_n \le n \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_n := \frac{a_n - n\hat{q}_n}{\sqrt{n\hat{q}_n(1-\hat{q}_n)}} \le \tilde{Z}_n \le \frac{n(1-\hat{q}_n)}{\sqrt{n\hat{q}_n(1-\hat{q}_n)}} =: \beta_n.$$

Also ist

$$\overline{B}_{n,\hat{q}_n}(a_n) = \mathbb{P}(a_n \le Z_n \le n) = \mathbb{P}(\alpha_n \le \tilde{Z}_n \le \beta_n).$$

Beweis

- Wir bestimmen a_n:

$$S_0 u_n^k d_n^{n-k} - K > 0 \quad \Leftrightarrow \quad k > \frac{\log\left(\frac{K}{S_0}\right) - n\log(d_n)}{\log\left(\frac{u_n}{d_n}\right)} =: a_n.$$

- Weiter gilt

$$\log\left(\frac{u_n}{d_n}\right) = \log\left(\frac{e^{\sigma\sqrt{\Delta_n}}}{e^{-\sigma\sqrt{\Delta_n}}}\right) = 2\sigma\sqrt{\Delta_n} \quad \text{und} \quad \log(d_n) = -\sigma\sqrt{\Delta_n}$$

- $\lim_{n\to\infty} q_n = \lim_{n\to\infty} \hat{q}_n = \frac{1}{2}$,
- $\lim_{n\to\infty} n(1-2\hat{q}_n)\sqrt{\Delta_n} = -T\left(\frac{r}{\sigma} + \frac{\sigma}{2}\right)$.

Beweis

Wir erhalten:

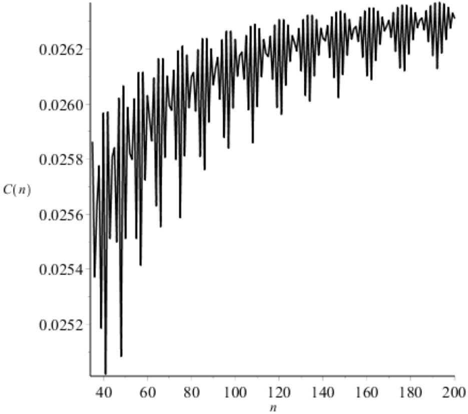
$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \alpha_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - n\hat{q}_n}{\sqrt{n\hat{q}_n(1-\hat{q}_n)}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(\frac{K}{S_0}\right) - n\log(d_n) - n\hat{q}_n 2\sigma\sqrt{\Delta_n}}{\sqrt{n\hat{q}_n(1-\hat{q}_n)}2\sigma\sqrt{\Delta_n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(\frac{K}{S_0}\right) + \sigma n\sqrt{\Delta_n}\,(1-2\hat{q}_n)}{\sqrt{n\Delta_n\hat{q}_n(1-\hat{q}_n)}2\sigma} \\
&= \frac{\log\left(\frac{K}{S_0}\right) - \sigma T\left(\frac{r}{\sigma} + \frac{\sigma}{2}\right)}{\frac{1}{2}\sqrt{T}2\sigma} = -d.
\end{aligned}$$

Analog : $\lim_{n\to\infty} \beta_n = +\infty$. Mit dem ZGWS (Vor. sind erfüllt)

$$\lim_{n\to\infty} \overline{B}_{n,\hat{q}_n}(a_n) = \Phi(\lim_{n\to\infty} \beta_n) - \Phi(\lim_{n\to\infty} \alpha_n) = \Phi(\infty) - \Phi(-d) = \Phi(d).$$

Analog zeigt man, dass $\lim_{n\to\infty} \overline{B}_{n,q_n} = \Phi(d - \sigma\sqrt{T})$. □

Konvergenz an einem Beispiel



Preis im Black-Scholes-Modell ist hier $0,0264$.

Aktienkurs im Black-Scholes Modell