

# Finanzmathematik in diskreter Zeit

Prof. Dr. Nicole Bäuerle

Institut für Stochastik (STOCH)



## 4. Rückblick: Bedingte Erwartungswerte, Martingale und Stoppzeiten

Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  ein beliebiger Wahrscheinlichkeitsraum und  $X \in L^1$ , wobei

$$L^1 := \{X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : X \text{ ist eine ZV auf } (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \text{ mit } \mathbb{E} |X| < \infty\}.$$

## Definition 1

Sei  $X \in L^1$ . Der *bedingte Erwartungswert* von  $X$  gegeben  $B \in \mathcal{F}$  mit  $\mathbb{P}(B) > 0$  ist

$$\mathbb{E}[X|B] = \frac{\mathbb{E}[X1_B]}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \int_B X d\mathbb{P}.$$

Sei jetzt  $\Omega$  endlich und  $\mathbb{P}(\{\omega\}) > 0 \forall \omega \in \Omega$ . Eine Sub- $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{G}$  von  $\mathcal{F}$  kann dann immer durch eine Zerlegung von  $\Omega$  erzeugt werden, d.h.  $\exists A_1, \dots, A_n \subset \Omega$  mit  $A_i \cap A_j = \emptyset$  für  $i \neq j$  und  $\cup_{i=1}^n A_i = \Omega$ , sodass

$$\mathcal{G} = \sigma(\{A_1, \dots, A_n\}) = \left\{ \cup_{i \in T} A_i \text{ für alle } T \subset \{1, \dots, n\} \right\}.$$

## Definition 2

Sei  $\Omega$  endlich und  $\mathcal{G} = \sigma(\{A_1, \dots, A_n\})$  eine Sub- $\sigma$ -Algebra von  $\mathcal{F}$ . Der *bedingte Erwartungswert von  $X$  gegeben  $\mathcal{G}$*  ist die Zufallsvariable

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}](\omega) := \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X|A_i] 1_{A_i}(\omega), \quad \omega \in \Omega.$$

## Beispiel

Sei  $\Omega = \{1, \dots, 10\}$ ,  $\mathcal{F}$  = Potenzmenge von  $\Omega$ ,  $\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{10} \forall \omega \in \Omega$ .  
 Weiter sei  $X(\omega) = \omega$  und die Sub- $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{G}$  gegeben durch  
 $\mathcal{G} := \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$  mit  $A := \{1, 2, 3, 4\}$ . Dann gilt

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X|A]1_A + \mathbb{E}[X|A^c]1_{A^c},$$

wobei

$$\mathbb{E}[X|A] = \frac{1}{\mathbb{P}(A)} \int_A X d\mathbb{P} = \frac{10}{4} \cdot \left( \sum_{i=1}^4 i \frac{1}{10} \right) = \frac{5}{2},$$

$$\mathbb{E}[X|A^c] = \frac{1}{\mathbb{P}(A^c)} \int_{A^c} X d\mathbb{P} = \frac{10}{6} \cdot \left( \sum_{i=5}^{10} i \frac{1}{10} \right) = \frac{15}{2}.$$

Also folgt

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}](\omega) = \begin{cases} \frac{5}{2}, & \text{falls } \omega \in A, \\ \frac{15}{2}, & \text{falls } \omega \in A^c. \end{cases}$$

- a)  $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$  kann als Approximation von  $X$  verstanden werden:  
Für  $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$  ist  $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X]$  die „schlechteste“ Approximation von  $X$ . Mit  $\mathcal{G} = \mathcal{F}$  gilt  $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] = X$  die „beste“ Approximation.
- b) Ist  $Y$  eine diskrete ZV mit Werten  $y_1, \dots, y_n$  auf  $A_1, \dots, A_n$ , d.h.

$$A_i := \{\omega : Y(\omega) = y_i\}, \quad i = 1, \dots, n,$$

dann ist  $\mathbb{E}[X|Y] := \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ , wobei  $\mathcal{G} = \sigma(\{A_1, \dots, A_n\})$ .

- c) Es gilt also  $\mathbb{E}[X|Y] = g(Y)$  mit  $g(y) := \sum_i \mathbb{E}[X|Y = y_i] 1_{\{y_i\}}(y)$ .

# Bedingter Erwartungswert (allgemeine Definition)

## Definition 3

Sei  $X \in L^1$  und  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$  eine Sub- $\sigma$ -Algebra von  $\mathcal{F}$ . Eine Zufallsvariable  $Z$  auf  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  heißt *bedingter Erwartungswert von  $X$  gegeben  $\mathcal{G}$* , falls gilt:

- $Z$  ist  $(\mathcal{G}, \mathcal{B})$ -messbar,
- $\int_A X d\mathbb{P} = \int_A Z d\mathbb{P}$  für alle  $A \in \mathcal{G}$ .

Beachte: Der bedingte Erwartungswert ist  $\mathbb{P}$ -f.s. eindeutig.

## Theorem 4

Bei endlichem  $\Omega$  stimmen beide Definitionen überein.

Beweis: Sei  $\Omega$  endlich und  $Z := \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X|A_i] 1_{A_i}$ .

- a)  $Z$  konstant auf  $A_j \Rightarrow Z$  ist  $(\mathcal{G}, \mathcal{B})$ -messbar.  
 b) Es genügt die erzeugenden Ereignisse  $A_j$  der  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{G}$  zu betrachten:

$$\begin{aligned} \int_{A_j} Z \, d\mathbb{P} &= \int_{A_j} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X|A_i] 1_{A_i} \, d\mathbb{P} = \int_{A_j} \mathbb{E}[X|A_j] \, d\mathbb{P} = \int_{A_j} \frac{\mathbb{E}[X 1_{A_j}]}{\mathbb{P}(A_j)} \, d\mathbb{P} \\ &= \frac{\mathbb{E}[X 1_{A_j}]}{\mathbb{P}(A_j)} \mathbb{P}(A_j) = \int_{A_j} X \, d\mathbb{P}. \quad \square \end{aligned}$$

## Lemma 5 (Eigenschaften bedingter Erwartungswerte)

Seien  $X, Y \in L^1$  und  $\mathcal{G}, \mathcal{H}$  seien Sub- $\sigma$ -Algebren von  $\mathcal{F}$ . Dann gilt:

- a)  $\mathbb{E} \left[ \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \right] = \mathbb{E}[X]$ .
- b) Falls  $X$  sogar  $\mathcal{G}$ -messbar ist, gilt  $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = X$ .
- c) *Linearität:*  $\mathbb{E}[aX + bY|\mathcal{G}] = a\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] + b\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$ , für  $a, b \in \mathbb{R}$ .
- d) *Monotonie:*  $X \leq Y \Rightarrow \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \leq \mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$ .
- e) *Bedingte Jensen-Ungl.:* Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  konvex und  $f(X) \in L^1$ . Dann ist

$$\mathbb{E}[f(X)|\mathcal{G}] \geq f(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]).$$

- f) *Turmeigenschaft:* Ist  $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ , dann gilt:

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{H}]|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{H}].$$

- g) *Messbares Ausklammern:* Sei  $Y$   $\mathcal{G}$ -messbar und  $YX \in L^1$ , dann gilt  $\mathbb{E}[YX|\mathcal{G}] = Y \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ .
- h) Wenn  $X$  unabhängig von  $\mathcal{G}$  ist, dann gilt  $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X]$ .

## Definition 6

Sei  $(X_t)$  ein  $(\mathcal{F}_t)$ -adaptierter stochastischer Prozess mit  $X_t \in L^1$  für alle  $t \in \mathbb{N}_0$ . Der Prozess  $(X_t)$  heißt  $(\mathcal{F}_t)$ -*Martingale*, falls gilt:

$$\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s \quad \text{für alle } s \leq t.$$

Der Prozess  $(X_t)$  heißt *Submartingale*, falls  $\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] \geq X_s$  für alle  $s \leq t$ , und  $(X_t)$  heißt *Supermartingale*, falls  $\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] \leq X_s$  für alle  $s \leq t$ .

- a) Es genügt, die Martingalgleichung für Zeitpunkte  $t, t+1 \in \mathbb{N}_0$  zu prüfen, denn: seien  $s < t$  mit  $t - s > 1$ , dann ist  $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_{t-1} \subset \mathcal{F}_t$  und

$$\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_{t-1}] | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[X_{t-1} | \mathcal{F}_s] = \dots = \mathbb{E}[X_s | \mathcal{F}_s] = X_s.$$

- b)  $\mathbb{E}[X_{t+1} | \mathcal{F}_t] = X_t \iff \mathbb{E}[X_{t+1} - X_t | \mathcal{F}_t] = 0.$   
c) Sei  $X$   $\mathcal{F}$ -messbar. Dann ist  $X_t := \mathbb{E}[X | \mathcal{F}_t]$  ein  $(\mathcal{F}_t)$ -Martingal.  
(Doob-Martingal)

Seien  $X_1, X_2, \dots \in L^1$  unabhängige ZV mit  $\mathbb{E}[X_t] = 0$ . Definiere  $S_0 := 0$  und  $S_t := \sum_{n=1}^t X_n$ . Weiter sei  $\mathcal{F}_t := \sigma(X_1, \dots, X_t)$  und  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ . Dann ist  $(S_t)$  ein  $(\mathcal{F}_t)$ -Martingal:

- Integrierbarkeit und Adaptiertheit sind klar.
- Sei  $t \in \mathbb{N}_0$ :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_{t+1} | \mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}[S_t + X_{t+1} | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[S_t | \mathcal{F}_t] + \mathbb{E}[X_{t+1} | \mathcal{F}_t] \\ &= S_t + \mathbb{E}[X_{t+1} | \mathcal{F}_t] = S_t + \mathbb{E}[X_{t+1}] \\ &= S_t + 0 = S_t.\end{aligned}$$

## Lemma 7

Sei  $(X_t)$  ein  $(\mathcal{F}_t)$ -Martingal und  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine konvexe Funktion mit  $\mathbb{E} |f(X_t)| < \infty$  für alle  $t \in \mathbb{N}_0$ . Dann ist  $(f(X_t))$  ein Submartingal.

Beweis:

Für  $s \leq t$  gilt:

$$\mathbb{E}[f(X_t)|\mathcal{F}_s] \geq f(\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s]) = f(X_s).$$

Die Integrierbarkeit ist bereits vorausgesetzt. □

## Definition 8

Ein stochastischer Prozess  $(X_t)$  heißt *vorhersagbar*, falls  $X_t$  bereits  $\mathcal{F}_{t-1}$ -messbar ist für alle  $t \geq 1$ .

## Theorem 9

Sei  $(X_t)$  ein  $(\mathcal{F}_t)$ -Supermartingal. Dann gilt:

$$X_t = M_t + A_t, \quad t \in \mathbb{N}_0,$$

wobei  $(M_t)$  ein  $(\mathcal{F}_t)$ -Martingal ist und  $(A_t)$  mit  $A_0 = 0$  ein fallender Prozess ist, d.h.  $A_{t+1} \leq A_t$  für  $t \in \mathbb{N}_0$ . Außerdem ist  $(A_t)$  vorhersagbar. Die Zerlegung ist  $\mathbb{P}$ -f.s. eindeutig.

Betrachte ein Glücksspiel: Zu den Zeitpunkten  $t \in \mathbb{N}$  wird gespielt, und

$$\Delta Z_t := Z_t - Z_{t-1}$$

sei der Nettogewinn im  $t$ -ten Spiel pro eingesetzter Geldeinheit. Es sei  $\mathcal{F}_t := \sigma(Z_0, Z_1, \dots, Z_t)$ .

- Falls  $(Z_t)$  ein Martingal ist, ist das Spiel *fair*, da  $\mathbb{E}[\Delta Z_t | \mathcal{F}_{t-1}] = 0$ ,
- falls  $(Z_t)$  ein Supermartingal ist, ist das Spiel unvorteilhaft, da  $\mathbb{E}[\Delta Z_t | \mathcal{F}_{t-1}] \leq 0$ ,
- und vorteilhaft, falls ein Submartingal vorliegt.

Können wir nun durch geschicktes Variieren des Einsatzes einen positiven erwarteten Gewinn erzielen?

- Sei  $(C_t)$  ein  $(\mathcal{F}_t)$ -adaptierter stochastischer Prozess.
- $C_{t-1}$  = Spieleinsatz im  $t$ -ten Spiel.
- Gewinn im  $t$ -ten Spiel:  $C_{t-1}\Delta Z_t = C_{t-1}(Z_t - Z_{t-1})$ .
- Gesamtgewinn bis zur Zeit  $t$ :

$$G_t := \sum_{n=1}^t C_{n-1}(Z_n - Z_{n-1}), \quad G_0 := 0.$$

- Falls  $(Z_t)$  ein Martingal ist, wird  $(G_t)$  eine *Martingaltransformation* von  $(Z_t)$  genannt.

## Theorem 10

Seien  $(Z_t)$  und  $(C_t)$  jeweils  $(\mathcal{F}_t)$ -adaptierte stochastische Prozesse, sodass

$$G_t = \sum_{n=1}^t C_{n-1}(Z_n - Z_{n-1}), \quad t \in \mathbb{N}, G_0 = 0$$

integrierbar ist. Ist  $(Z_t)$  ein Martingal, so auch  $(G_t)$ .

- Nach Voraussetzung ist  $G_t$  integrierbar.
- Adaptiertheit ist auch klar, da  $(C_t)$  und  $(Z_t)$  adaptiert sind.
- Betrachte für  $t \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[G_t - G_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}] &= \mathbb{E}[C_{t-1}(Z_t - Z_{t-1}) | \mathcal{F}_{t-1}] \\ &= C_{t-1} \mathbb{E}[(Z_t - Z_{t-1}) | \mathcal{F}_{t-1}] = 0,\end{aligned}$$

also ist die Martingaltransformation  $(G_t)$  ebenfalls ein Martingal. □

$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$  sei ein beliebiger filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum.

## Definition 11

Eine  $(\mathcal{F}_t)$ -*Stoppzeit* ist eine  $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ -wertige Zufallsvariable  $\tau$ , sodass

$$\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad \text{für alle } t \in \mathbb{N}_0.$$

## Lemma 12

- a)  $\tau$  ist eine  $(\mathcal{F}_t)$ -Stoppzeit  $\Leftrightarrow \{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$  für alle  $t \in \mathbb{N}_0$ .
- b) Sind  $\tau, \sigma$   $(\mathcal{F}_t)$ -Stoppzeiten, so sind  $\min\{\tau, \sigma\}$ ,  $\max\{\tau, \sigma\}$  und  $\tau + \sigma$   $(\mathcal{F}_t)$ -Stoppzeiten.

- a) Sei  $\tau$  ( $\mathcal{F}_t$ )-Stoppzeit  $\Rightarrow \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$  und  $\{\tau \leq t-1\}^c \in \mathcal{F}_{t-1} \subset \mathcal{F}_t$ .  
Also  $\{\tau = t\} = \{\tau \leq t\} \cap \{\tau \leq t-1\}^c \in \mathcal{F}_t$ .  
Sei nun umgekehrt  $\{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$  für alle  $t \in \mathbb{N}_0$ .  $\Rightarrow$   
 $\{\tau \leq t\} = \bigcup_{k \leq t} \{\tau = k\} \in \mathcal{F}_t$  da  $\{\tau = k\} \in \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_t$ .
- b) Es gilt für  $t \in \mathbb{N}_0$ :

$$\{\min\{\tau, \sigma\} \leq t\} = \{\tau \leq t\} \cup \{\sigma \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

$$\{\max\{\tau, \sigma\} \leq t\} = \{\tau \leq t\} \cap \{\sigma \leq t\} \in \mathcal{F}_t,$$

und damit sind  $\min\{\tau, \sigma\}$  und  $\max\{\tau, \sigma\}$  Stoppzeiten. Weiter gilt:

$$\{\tau + \sigma \leq t\} = \bigcup_{k=0}^t \{\tau = k\} \cap \{\sigma \leq t - k\} \in \mathcal{F}_t,$$

woraus folgt, dass  $\tau + \sigma$  eine ( $\mathcal{F}_t$ )-Stoppzeit ist. □

a) Eine konstante Zeit  $\tau = t_0 \in \mathbb{N}_0$  ist eine Stoppzeit, da

$$\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\} = \{\omega \in \Omega : t_0 \leq t\} \in \{\Omega, \emptyset\}.$$

b) Sei  $(S_t)$  ein  $(\mathcal{F}_t)$ -adaptierter Preisprozess. Dann ist für  $b \in \mathbb{R}$

$$\tau := \inf\{t \in \mathbb{N}_0 : S_t \geq b\}$$

eine  $(\mathcal{F}_t)$ -Stoppzeit, da  $\{\tau \leq t\} = \cup_{k \leq t} \{S_k \geq b\} \in \mathcal{F}_t$ .

c) Sei  $(S_t)$  wie in b). Definiere  $\tau := \arg \max_{t=0, \dots, T} S_t$ .  $\tau$  ist i.A. keine Stoppzeit.

## Theorem 13

*Sei  $\tau$  eine beschränkte  $(\mathcal{F}_t)$ -Stoppzeit und  $(X_t)$  ein  $(\mathcal{F}_t)$ -Martingal. Dann ist  $X_\tau$  integrierbar und  $\mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_0]$ .*

- a) Den letzten Satz kann man auch auf ein Supermartingal  $(X_t)$  anwenden und erhält dann  $\mathbb{E}[X_\tau] \leq \mathbb{E}[X_0]$ .
- b) Die Annahme, dass die Stoppzeit  $\tau$  beschränkt ist, kann durch eine der beiden folgenden Bedingungen ersetzt werden:
- $(X_t)$  ist f.s. beschränkt (d.h., es gibt ein  $C$  mit  $\mathbb{P}(|X_t| \leq C) = 1$  für alle  $t$ ) und  $\tau$  ist f.s. endlich, d.h.  $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$ .
  - $\mathbb{E} \tau < \infty$  und es gibt ein  $C$  mit  $\mathbb{P}(|X_t - X_{t-1}| \leq C) = 1$  für alle  $t$ .

## Lemma 14

*Sei  $(X_t)$  ein  $(\mathcal{F}_t)$ -adaptierter stochastischer Prozess mit  $X_t \in L^1$  für alle  $t \in \mathbb{N}_0$ . Für jede beschränkte Stoppzeit  $\tau$  gelte  $\mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_0]$ . Dann ist  $(X_t)$  ein Martingal.*

Seien  $0 \leq s < t$  und  $A \in \mathcal{F}_s$ . Dann ist  $\tau := t1_A + s1_{A^c}$  eine beschränkte Stoppzeit und es gilt

$$\mathbb{E}[X_0] = \mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_s 1_{A^c} + X_t 1_A] = \mathbb{E}[X_s 1_{A^c}] + \mathbb{E}[X_t 1_A].$$

Da  $\sigma \equiv s$  auch eine beschränkte Stoppzeit ist, gilt

$$\mathbb{E}[X_0] = \mathbb{E}[X_s] = \mathbb{E}[X_s 1_{A^c} + X_s 1_A] = \mathbb{E}[X_s 1_{A^c}] + \mathbb{E}[X_s 1_A].$$

Daher gilt für alle  $A \in \mathcal{F}_s$ :

$$\mathbb{E}[X_t 1_A] = \mathbb{E}[X_s 1_A], \quad \text{d.h.} \quad \int_A X_t d\mathbb{P} = \int_A X_s d\mathbb{P}$$

und damit  $\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$ . □

## Definition 15

Sei  $\tau$  eine  $(\mathcal{F}_t)$ -Stoppzeit. Die  $\sigma$ -Algebra der  $\tau$ -Vergangenheit ist

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \text{ für alle } t \in \mathbb{N}_0\}.$$

## Lemma 16

- a) *Für eine Stoppzeit  $\tau$  ist  $\mathcal{F}_\tau$  eine  $\sigma$ -Algebra.*
- b) *Seien  $\sigma, \tau$  Stoppzeiten mit  $\sigma \leq \tau$ . Dann gilt  $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_\tau$ .*

a) Offenbar ist  $\emptyset \in \mathcal{F}_\tau$ . Sei  $A \in \mathcal{F}_\tau$ . Dann ist

$$A^c \cap \{\tau \leq t\} = (A \cap \{\tau \leq t\})^c \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t,$$

also ist  $A^c \in \mathcal{F}_\tau$ . Schließlich folgt mit  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}_\tau$  auch, dass

$$\left(\bigcup_k A_k\right) \cap \{\tau \leq t\} = \bigcup_k (A_k \cap \{\tau \leq t\}) \in \mathcal{F}_t,$$

also ist  $\bigcup_k A_k \in \mathcal{F}_\tau$ .

b) Sei  $A \in \mathcal{F}_\sigma$ . Dann ist  $A \cap \{\sigma \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ . Wegen  $\sigma \leq \tau$  gilt

$$A \cap \{\tau \leq t\} = (A \cap \{\sigma \leq t\}) \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Also folgt  $A \in \mathcal{F}_\tau$ . □

## Lemma 17

*Sei  $(X_t)$  ein  $(\mathcal{F}_t)$ -adaptierter stochastischer Prozess und  $\tau$  eine  $(\mathcal{F}_t)$ -Stopzeit. Dann ist  $X_\tau$  messbar bezüglich  $\mathcal{F}_\tau$ .*

Zu zeigen ist:  $\{X_\tau \in B\} \in \mathcal{F}_\tau$  für alle  $B \in \mathcal{B}$ . Nach Definition von  $\mathcal{F}_\tau$  ist dies äquivalent zu

$$\{X_\tau \in B\} \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \Leftrightarrow \bigcup_{s=0}^t \{X_s \in B\} \cap \{\tau = s\} \in \mathcal{F}_t,$$

was wegen  $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$  für  $s \leq t$  richtig ist. □

## Theorem 18

*Sei  $(X_t)$  ein  $(\mathcal{F}_t)$ -Martingal und seien  $\tau, \sigma$  beschränkte Stoppzeiten mit  $\sigma \leq \tau$ . Dann gilt*

$$\mathbb{E}[X_\tau | \mathcal{F}_\sigma] = X_\sigma$$

*und daher  $\mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_\sigma]$ . Ist  $(X_t)$  ein Sub- oder Supermartingal, dann gelten die entsprechenden Ungleichungen.*

$\tau, \sigma$  beschränkt  $\Rightarrow \exists T \in \mathbb{N}$ , sodass  $\tau(\omega), \sigma(\omega) \leq T$  für  $\mathbb{P}$ -fast alle  $\omega$ .  
Wir zeigen zunächst:  $X_\tau = \mathbb{E}[X_T | \mathcal{F}_\tau]$ . Dazu genügt, für alle  $A \in \mathcal{F}_\tau$  zu zeigen, dass  $\mathbb{E}[X_T 1_A] = \mathbb{E}[X_\tau 1_A]$ . Da  $\{\tau = t\} \cap A \in \mathcal{F}_t$ , folgt:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_\tau 1_A] &= \sum_{t=0}^T \mathbb{E}[X_t 1_{\{\tau=t\} \cap A}] = \sum_{t=0}^T \mathbb{E} \left[ \mathbb{E}[X_T | \mathcal{F}_t] 1_{\{\tau=t\} \cap A} \right] \\ &= \sum_{t=0}^T \mathbb{E}[X_T 1_{\{\tau=t\}} 1_A] = \mathbb{E}[X_T 1_A].\end{aligned}$$

Die gleiche Aussage gilt für  $\sigma$ . Damit erhalten wir:

$$X_\sigma = \mathbb{E}[X_T | \mathcal{F}_\sigma] = \mathbb{E} \left[ \mathbb{E}[X_T | \mathcal{F}_\tau] \middle| \mathcal{F}_\sigma \right] = \mathbb{E}[X_\tau | \mathcal{F}_\sigma].$$

